Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Educación Matemática

México • vol. 37 • núm. 3• diciembre de 2025

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

UNIVERSIDAD DE
GUADALAJARA

Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingenierías

La revista *Educación Matemática* es una publicación cuatrimestral (abril, agosto y diciembre) que se ha venido publicando en forma ininterrumpida desde 1989. Actualmente su formato es exclusivamente digital, y recibe manuscritos originales en español o inglés, que sean producto de investigaciones originales que busquen contribuir al avance del conocimiento sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos. La rEM está indexada en diferentes plataformas, como Scopus, Redalyc y SciELO, es de acceso abierto y publicación gratuita, con arbitraje doble ciego, y es editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. (SOMIDEM, A. C), y por la Universidad de Guadalajara (UdeG) a través del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI).). Las colaboraciones son recibidas en la plataforma www.autores-educacion-matematica.com Mantenemos el contacto: educacion.matematica@administrativos.udg.mx

Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

UNIVERSIDAD DE
GUADALAJARA
Red Universitaria e Institución Benemérita de Jalisco
Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingenierías

Educación Matemática *vol. 37 • núm. 3 • diciembre de 2025*

© Educación Matemática, diciembre de 2025, vol. 37, núm. 3, es una publicación cuatrimestral editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Adolfo Prieto 1734, Col. Del Valle centro, 03100, Benito Juárez, Ciudad de México, correo electrónico somidem2023@gmail.com y la Universidad de Guadalajara a través del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, dirección Blvd. Marcelino García Barragán #1421, esq. Calzada Olímpica, C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México, correo electrónico educacion.matematica@administrativos.udg.mx

Editores responsables: María del Socorro García González y Humberto Gutiérrez Pulido. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 1 de diciembre de 2025.

https://www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

 https://doi.org/10.24844/EM3703.00

Un nuevo ciclo editorial en educación matemática: continuidad, renovación y compromiso compartido

María del Socorro García González,[1] Humberto Gutiérrez Pulido[2]

Este número de *Educación Matemática* marca el inicio de un nuevo periodo bajo la responsabilidad del Comité Editorial 2025–2029. En este marco, consideramos oportuno abrir una reflexión sobre este **momento de transición**, en el que visualizamos **un futuro compartido en educación matemática**. Nuestra intención es reafirmar los compromisos que han sostenido a la revista a lo largo del tiempo, al mismo tiempo que delineamos los horizontes y desafíos que orientarán su desarrollo en los próximos años.

A lo largo de más de tres décadas, *Educación Matemática* ha transitado por etapas decisivas que la han consolidado como una revista de referencia en Iberoamérica y, como un patrimonio de la comunidad dedicada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en nuestra región. Su trayectoria reciente, bajo la conducción de Avenilde Romo (2018–2021) y Ernesto Sánchez (2021–2025), marcó un periodo de renovación y fortalecimiento institucional. Durante esos años, se estableció y consolidó el convenio entre SOMIDEM y la Universidad de Guadalajara, que permitió asegurar la continuidad editorial, diversificar los apoyos técnicos y consolidar su presencia internacional con la incorporación a índices como *Scopus*. Estos logros, fruto del esfuerzo sostenido de quienes nos antecedieron, constituyen hoy una base sólida desde la cual inicia **una nueva etapa de desarrollo**, **que reafirma la posición de** *Educación Matemática* **como un referente para la comunidad iberoamericana y un punto de encuentro con expertos de otras regiones**.

En el periodo 2025–2029, la revista emprende una nueva etapa con un Comité Editorial ampliado, diverso y comprometido con fortalecer su proyección internacional. Ahora con dos editores en Jefe, con los que se busca equilibrar las responsabilidades entre ambas instituciones editoras (SOMIDEM y Universidad de Guadalajara), y atender de manera conjunta los diversos frentes que

[1] Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, SOMIDEM. mariagargonza2020@gmail.com

[2] Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad de Guadalajara, México. humberto.gpulido@academicos.udg.mx

implica la gestión de una publicación científica. Nos acompañan, en esta aventura, cinco editores asociados, que son colegas con una destacada trayectoria en educación matemática y una sólida experiencia en gestión académica: José Martínez Hinestroza (Universidad de Texas en San Antonio, Estados Unidos), Marcela Parraguez González (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile), Ulises Salinas Hernández (CCH–UNAM, México), María Guadalupe Vera Soria y Carlos Valenzuela García (ambos de la Universidad de Guadalajara, México). Junto a ellos, agradecemos la continuidad de miembros del Comité y del Consejo Editorial, así como el valioso respaldo del equipo técnico, José Luis López, Delia Mendoza y Jorge Rizo, e incorporamos a una nueva generación de asistentes editoriales, doctorandos en educación matemática que colaboran en tareas técnicas y editoriales, reforzando así el compromiso formativo de la revista.

Este nuevo ciclo editorial se guiará por una política orientada **a promover la diversidad de enfoques teóricos y metodológicos, el diálogo entre investigación y práctica docente, y la difusión de conocimiento que contribuya a entender la educación matemática como una práctica crítica, inclusiva y situada**. El horizonte que nos proponemos es claro: fortalecer los procesos editoriales con transparencia y rigor, reducir los tiempos de gestión de manuscritos y abrir la revista a nuevos públicos y temáticas emergentes. En este contexto, reconocemos el impacto disruptivo que las tecnologías de inteligencia artificial comienzan a tener en la educación matemática y en la comunicación científica. Lejos de concebirlas solo como una herramienta técnica, reconocemos la necesidad de reflexionar críticamente sobre sus implicaciones éticas, epistemológicas y pedagógicas. *Educación Matemática* se propone como foro plural para ese diálogo urgente y necesario.

Además, entre nuestros desafíos de mediano plazo se encuentran: mejorar la navegabilidad y accesibilidad de nuestra página web, fortalecer la presencia de la revista en diversos índices y bases de datos internacionales y, avanzar gradualmente hacia un formato más bilingüe que incremente la proporción de artículos publicados en inglés. Con ello buscamos aumentar la visibilidad y el impacto de las contribuciones, y fomentar un diálogo más amplio entre comunidades académicas de distintas regiones.

Queremos que *Educación Matemática* siga siendo un foro plural, donde converjan diversas perspectivas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y que evolucione hacia un modelo de ciencia abierta, con prácticas editoriales éticas, inclusivas y sostenibles. Este es un compromiso compartido, que requiere dedicación continua y diálogo con la comunidad. **Invitamos a nuestras lectoras y lectores a acompañarnos en este proceso de renovación y diálogo**, con la convicción de que el futuro de *Educación Matemática* se construye colectivamente.

Editores en Jefe 2025-2029

 https://doi.org/10.24844/EM3703.01

Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de primaria

Elementary school students' attitudes towards mathematics

Alejandra Herrera Salgado,[1] Osiel Ramírez Sandoval,[2] María del Socorro García González[3]

Resumen: Esta investigación fue diseñada utilizando el Modelo Tripartita de la Actitud como marco conceptual para indagar las actitudes hacia las matemáticas en educación primaria. El estudio fue de corte cuantitativo y contó con la participación de 329 estudiantes de los seis grados de una escuela pública (6-12 años) en México. Las actitudes se midieron mediante una adaptación de la Escala de Actitudes hacia la Matemática Temprana, que evalúa el gusto por las matemáticas, la percepción de dificultad y de utilidad, el autoconcepto matemático, la perseverancia y la curiosidad. Los resultados mostraron que las actitudes hacia las matemáticas en todos los grados son ligeramente positivas, con una tendencia más favorable en el cuarto grado; el gusto por las matemáticas es mayor en los primeros cuatro grados; los estudiantes de primero, segundo y cuarto grados perciben menor dificultad y mayor utilidad en las tareas matemáticas; los tres grados superiores manifiestan mayor curiosidad por aprender matemáticas; y en el autoconcepto matemático no se observaron diferencias. Estos hallazgos pueden servir como sustento para futuras

Fecha de recepción: 7 de mayo de 2025. **Fecha de aceptación:** 9 de octubre de 2025.

[1] Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Instituto de Ingeniería y Tecnología, Chihuahua, México, al232583@alumnos.uacj.mx / alejandrahsal@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8632-7172.

[2] Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Instituto de Ingeniería y Tecnología, Chihuahua, México, osiel.ramirez@uacj.mx, https://orcid.org/0000-0003-3376-8406.

[3] Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Guerrero, México, msgarcia@uagro.mx, https://orcid.org/0000-0001-7088-1075.

investigaciones relacionadas con el fortalecimiento de las actitudes hacia las matemáticas en educación primaria.

Palabras clave: *Actitudes, matemáticas, estudiantes, primaria.*

Abstract: This research was designed using the Tripartite Model of Attitude as a conceptual framework to study attitudes toward mathematics in primary education. The study was quantitative and involved 329 students from all six grades of a public elementary school (ages 6–12) in Mexico. Attitudes were measured through an adaptation of the *Escala de Actitudes hacia la Matemática Temprana (Early Mathematics Attitudes Scale)*, which assesses liking of mathematics, perceived difficulty and usefulness, mathematical self-concept, perseverance, and curiosity. The results showed that attitudes toward mathematics across all grades were slightly positive, with a more favorable trend in fourth grade. Liking of mathematics was greater in the first four grades; students in first, second, and fourth grades perceived less difficulty and greater usefulness in mathematical tasks; students in the three upper grades demonstrated greater curiosity about learning mathematics; and no significant differences were observed in mathematical self-concept. These findings may serve as a basis for future research aimed at strengthening attitudes toward mathematics in elementary education.

Keywords: *Attitudes, mathematics, students, elementary school.*

ANTECEDENTES

El estudio del Dominio Afectivo, o afecto, en Educación Matemática parte del trabajo seminal de McLeod (1992), quien lo definió como “una amplia gama de creencias, sentimientos y estados de ánimo que van más allá del ámbito de la cognición” (p. 576), y señaló que las actitudes, creencias y emociones son sus descriptores básicos. McLeod argumentó que “la mejora de la educación matemática requería cambios en las respuestas afectivas tanto de los niños como de los adultos” (1992, p. 575), subrayando así la importancia de atender procesos cognitivos y las dimensiones emocionales en el aula. Décadas después, Gómez-Chacón (2000) confirmó que el afecto influye recíprocamente en el autoconcepto del estudiante y en su aprendizaje, la experiencia afectiva al enfrentarse a tareas matemáticas modifica las creencias del alumnado, las cuales a su vez condicionan su comportamiento y su disposición a aprender. La presente investigación se enfoca en las actitudes, particularmente en el contexto del aprendizaje de las matemáticas.

El crecimiento de los estudios sobre actitudes ha sido impulsado, en gran medida, por el rechazo hacia las matemáticas. En esta línea, se pueden identificar diversos intereses, algunas investigaciones se han enfocado en medir las actitudes considerando los contenidos matemáticos propios de los niveles escolares en los que se indagan, o bien centrándose en áreas específicas. Un grupo importante ha dirigido su atención hacia la estadística (Auzmendi, 1992), lo que ha derivado en la elaboración de escalas (Fennema y Sherman, 1976) y su adaptación. Otros se han concentrado en explorar la relación entre las actitudes y el rendimiento matemático, mientras que muy pocos se han dedicado a atender cuestiones conceptuales (Di Martino y Zan, 2010). Esto último se debe, en parte, a la falta de consenso en torno a la definición del constructo actitud (García y Juárez, 2011).

Respecto a este último punto, las actitudes pueden entenderse, de manera simple, como el gusto hacia las matemáticas; sin embargo, también pueden concebirse como un conjunto de componentes: uno afectivo, relacionado con las emociones; uno cognitivo, asociado a las creencias y el autoconcepto; y uno conductual, que da cuenta de aspectos como la motivación, la perseverancia, la curiosidad y el deseo de aprender. Por ello, en los siguientes párrafos, al describir algunos hallazgos de la investigación sobre actitud, se hará referencia a estos componentes.

Diversos estudios internacionales han evidenciado una disminución progresiva de actitudes positivas hacia las matemáticas a medida que avanza la escolaridad. Hidalgo *et al.* (2004), en España, investigaron el rechazo hacia las matemáticas desde la educación primaria hasta la universidad. Como resultado, encontraron que en el primer ciclo de primaria el nivel de rechazo era bajo; sin embargo, el gusto por las matemáticas tendía a disminuir en los siguientes dos ciclos, siendo esta tendencia más evidente en la secundaria. Además, observaron que los estudiantes de quinto grado percibían las matemáticas como más difíciles en comparación con quienes cursaban tercero.

También descubrieron una relación entre el autoconcepto matemático y el rendimiento académico, a la que denominaron "peligroso círculo vicioso": cuando la dificultad en matemáticas desemboca en un bajo rendimiento escolar, se produce una progresiva disminución del autoconcepto matemático, lo que incrementa el desinterés y el rechazo hacia la materia, agravando así las dificultades de comprensión. Este patrón concuerda con los hallazgos de Cvencek *et al.* (2021) en Croacia, donde el autoconcepto matemático era más alto en estudiantes de primero que en los de quinto grado.

En Estados Unidos, Adelson y McCoach (2011) midieron las actitudes hacia las matemáticas en educación primaria, considerando el autoconcepto matemático, el disfrute de las matemáticas y la utilidad percibida de la materia. Sus resultados mostraron que los estudiantes más pequeños disfrutan más de las matemáticas que los mayores. Un hallazgo similar fue reportado por Deieso y Fraser (2019), quienes estudiaron las actitudes hacia las matemáticas durante la transición de la educación primaria a la secundaria en Australia; encontraron que tanto el nivel de involucramiento como el disfrute de las matemáticas disminuían al pasar de un nivel educativo a otro.

En Tanzania, Mazana *et al.* (2019) investigaron las actitudes hacia las matemáticas desde la educación primaria hasta la universidad. Encontraron que al 94.5% del estudiantado le gustaban las matemáticas; sin embargo, las actitudes negativas comenzaban a desarrollarse en primaria y se volvían más notorias en secundaria. Además, observaron que los estudiantes de primaria mostraban mayor autoconfianza y motivación intrínseca en comparación con los de secundaria.

Respecto a la actitud hacia temas específicos, en España Vásquez *et al.* (2019) investigaron las actitudes hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza en futuras profesoras de Educación Infantil. Como resultado, encontraron que las actitudes hacia la estadística y su enseñanza eran ligeramente más positivas que las actitudes hacia la probabilidad.

En México, el panorama respecto al estudio de las actitudes hacia las matemáticas presenta algunas particularidades en comparación con los hallazgos internacionales previamente mencionados. Ortiz *et al.* (2018) investigaron el autoconcepto matemático en estudiantes de primaria y su relación con el rendimiento académico. Los resultados mostraron que no existe una correlación significativa entre ambas variables; no obstante, más del 50% del estudiantado se identificó con un autoconcepto matemático elevado.

Por su parte, Sánchez y Ursini (2010) analizaron la relación entre actitud y rendimiento en estudiantes de secundaria, encontrando una falta de consistencia en la correlación entre estas variables. Asimismo, reportaron una actitud predominantemente neutra hacia las matemáticas y un nivel bajo de autoconcepto matemático entre los participantes.

En cuanto al nivel medio superior, Eudave (1994) exploró las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes y profesorado, utilizando el Modelo Tripartita de la Actitud (afectivo, cognoscitivo y conductual). Los hallazgos indicaron que más de la mitad de los participantes presentaron actitudes favorables, una tercera parte mostró posturas indecisas y el resto, actitudes desfavorables. Años más tarde, Lemus y Ursini (2018) retomaron dicho modelo para analizar exclusivamente las actitudes de estudiantes hacia las matemáticas, encontrando que 74% manifestó una tendencia altamente positiva.

Como se ha mostrado, el estudio de las actitudes hacia las matemáticas en la educación primaria ha cobrado relevancia a nivel internacional. Los hallazgos indican que, en general, los estudiantes manifiestan actitudes más positivas hacia esta disciplina en comparación con los niveles escolares posteriores. De manera similar, en el contexto mexicano, los estudios citados señalan tendencias favorables en el autoconcepto y las actitudes hacia las matemáticas durante la primaria. No obstante, dichos estudios no son recientes, lo cual plantea una brecha en el conocimiento actual sobre esta temática.

Considerando los cambios sociales y educativos de los últimos años, resulta fundamental actualizar el conocimiento sobre las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de primaria en México. Hacerlo permitirá identificar si las tendencias positivas se mantienen, se han modificado o presentan nuevas dinámicas. Por ello, esta investigación persigue dos objetivos, 1) conocer las actitudes hacia las matemáticas que manifiestan los estudiantes de primaria, y 2) analizar si existe un cambio en los aspectos observables de dichas actitudes a lo largo de este nivel educativo.

MARCO CONCEPTUAL

Para la realización de esta investigación se tomó como referencia conceptual el Modelo Tripartita de la Actitud, también conocido como Modelo ABC por sus siglas en inglés (Affect, Behaviour y Cognition). Este modelo fue propuesto por Rosenberg y Hovland (1960) y ha sido retomado por diversos autores en investigaciones sobre las actitudes hacia las matemáticas (Eudave, 1994; Lemus y Ursini, 2018; López *et al.*, 2018; Ursini y Sánchez, 2019; Mazana *et al.*, 2019).

La premisa de este modelo es que la actitud tiene tres componentes (APA, 2018): afectivo (A), conductual (B) y cognitivo (C), como se observa en la figura 1. Por ello, las actitudes se pueden expresar a través de las emociones, de los pensamientos o del propio comportamiento (Ursini y Sánchez, 2019). Décadas atrás, Ajzen (1993) se había percatado que la actitud es inaccesible a la observación directa, y por ello debe ser inferida de las reacciones medibles, por lo que esta descomposición de la actitud en el modelo resulta favorable para su medición.

Así como existe falta de consenso en la definición de actitud, también se presentan diversas descripciones del Modelo Tripartita de la Actitud. Aunque este modelo reconoce tres componentes, distintas categorías pueden ser incluidas en cada uno de ellos; por ejemplo, la confianza en sí mismo, la ansiedad y el disfrute pueden considerarse parte del componente afectivo, mientras que la motivación intrínseca se asocia al componente conductual y la utilidad percibida al componente cognitivo (Mazana *et al.*, 2019). Ante esta situación, se optó por tomar la caracterización de componentes propuesta por Román *et al.* (2019), dado que su indagación se centra en estudiantes pequeños.

Figura 1. Modelo Tripartita de las Actitudes

Nota: Esquema generado con ayuda de IA.

De la figura 1, el *gusto o agrado hacia las matemáticas* refiere al grado en que el estudiante disfruta de la materia de matemáticas y sus clases. Y el a*utoconcepto* a la confianza del alumno en su propia habilidad para resolver correctamente las tareas matemáticas. La p*ercepción de dificultad* alude a la creencia del alumno sobre el nivel de facilidad-complejidad de las tareas matemáticas. Mientras que la *percepción de valor-utilidad* refiere a la importancia que tienen las matemáticas para el estudiante, según sus creencias, tanto en la vida diaria como a futuro. La *perseverancia* es la capacidad de constancia del alumno ante los ejercicios de matemáticas, y la *curiosidad* refiere a la motivación por aprender matemáticas, en especial nuevos conceptos y actividades.

Los componentes de la actitud fueron operacionalizados en el instrumento de recolección de datos con el fin de obtener indicadores que informaran de la actitud de los estudiantes.

MÉTODO

Para alcanzar los objetivos se delimitó un enfoque cuantitativo no experimental, de alcance descriptivo pues tiene como finalidad describir propiedades y características, en este caso, las actitudes hacia las matemáticas, en un determinado contexto, tal como lo conceptualiza Creswell (2014), además, es de tipo transversal pues se midió y recabó información en un solo punto en el tiempo para poder hacer comparaciones entre los distintos grados de educación primaria.

CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y PARTICIPANTES

La educación primaria en México forma parte de la educación básica, junto con el preescolar y la secundaria. Este nivel comprende seis grados, a los que asisten niños y niñas de entre 6 y 12 años. La investigación se llevó a cabo en una escuela primaria pública de sostenimiento estatal, ubicada al oriente de Ciudad Juárez, en el norte de México. La elección del plantel fue por conveniencia, ya que es el centro de trabajo de la primera autora. Un total de 329 estudiantes participaron en el estudio, lo que representa el 100% de la matrícula. Para llevar a cabo la investigación se contó con el permiso de la autoridad escolar, además, en todo momento de la investigación se protegieron los datos personales de los estudiantes pues se les asignó un número de identificación en sustitución del nombre.

INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS

El instrumento utilizado para recolectar información y medir las actitudes hacia las matemáticas es una adaptación de la Escala de Actitudes hacia la Matemática Temprana (en lo sucesivo ESAMAT), que es una escala tipo Likert elaborada por Román *et al.* (2019), consta de 12 ítems con tres opciones de respuesta (favorable, neutral, desfavorable), cada una con una puntuación de 0 a 2 puntos, lo que da un total de 24 puntos posibles en la escala. Y mide 6 categorías, dos por cada componente, gusto o agrado hacia las matemáticas, autoconcepto, percepción de dificultad y utilidad, perseverancia y curiosidad.

ESAMAT está diseñada para estudiantes de 4 a 7 años, pues consta de dibujos acompañados de frases cortas que son las opciones de respuesta, y su fácil comprensión fue el motivo principal para utilizarse en este estudio. Al estar en español, no fue necesaria su traducción, pero como fue elaborada en España, existieron algunos términos que fueron necesarios adaptar para su comprensión por parte de estudiantes mexicanos, pues era imperativo utilizar palabras y frases de uso cotidiano en el español de México y, sobre todo, en la frontera norte.

De la ESAMAT con las adaptaciones realizadas, al medir la consistencia interna del instrumento en la muestra total en que se aplicó (329 estudiantes), se obtuvo un Coeficiente Alfa de Cronbach de 0.75, por lo que se considera confiable. La escala adaptada se muestra en el Anexo 1.

ANÁLISIS DE DATOS

Cada opción de respuesta en los 12 ítems de la ESAMAT tenía un valor numérico (desfavorable o negativa 0, neutro 1, favorable o positiva 2), por lo que con las respuestas se construyó una matriz de datos que fue importada a la aplicación de software libre PSPP para el análisis estadístico.

En la primera fase del análisis se trabajó con la puntuación global del instrumento que resultó de la suma de todas las puntuaciones de los ítems. Los datos se organizaron de acuerdo con el grado que cursaron los estudiantes, por lo que se obtuvieron seis muestras independientes. De estas muestras, se realizó un análisis exploratorio para obtener las frecuencias, medias y desviaciones estándar. Posteriormente, se establecieron hipótesis tanto de normalidad como de comparación y se llevaron a cabo las pruebas de hipótesis pertinentes.

En la segunda fase del análisis se consideró por separado cada categoría del instrumento, es decir, cada aspecto observable de las actitudes que a su vez pertenecían a algún componente de la actitud. Al igual que en la primera fase, se establecieron hipótesis de normalidad y de comparación y se llevaron a cabo las pruebas de hipótesis pertinentes.

RESULTADOS

Análisis global de la actitud

Como primer momento de análisis, se llevaron a cabo pruebas estadísticas con la puntuación global de la ESAMAT (0 a 24 puntos) por grado, para dar alcance al primer objetivo de investigación. Según los resultados obtenidos, y como se muestra en la tabla 1, los estudiantes presentan actitudes positivas hacia las matemáticas (pues se encuentran por encima de la media), y es el cuarto grado el que tiene actitudes más positivas, mientras que primer grado tiene actitudes menos positivas.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de la puntuación global de la ESAMAT

Grado	Casos	Media	Desviación estándar
1	45	14.5	4.67
2	48	16.6	3.83
3	41	15.5	4.96
4	55	17.1	3.68
5	62	14.6	3.81
6	78	14.7	3.66
Total	329		

Fuente: Elaboración propia.

Dado que los datos de la puntuación global se encuentran distribuidos de manera normal, como lo arrojaron las pruebas Shapiro-Wilk en 1°, 2° y 3° (tabla 2) y Kolmogorov-Smirnov en 4°, 5° y 6° (tabla 3), fue necesario llevar a cabo pruebas estadísticas paramétricas para poder determinar si existía diferencia en las actitudes hacia las matemáticas en los distintos grados.

Tabla 2. Prueba de normalidad Shapiro-Wilk para primero, segundo y tercer grados

Grado	Variable	df	Sign.
1	Suma	45	.13
2	Suma	48	.24
3	Suma	41	.43

Nota. df: elementos de la muestra (estudiantes). Sign. = p.

Tabla 3. Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov para cuarto, quinto y sexto grados

Grado	N	Desviación estándar	Sig. Asínt. (2-colas)
4	55	3.68	.34
5	62	3.81	.68
6	78	3.66	.63

Nota. N: elementos de la muestra (estudiantes). Sig. = p.

Por medio de un Análisis de Varianza se detectó una diferencia significativa entre las actitudes de los seis grados (tabla 4), sin embargo, fue a través de la prueba t que se detectó que esta diferencia se encuentra entre 1° y 4°, 4° y 5° y 5° y 6° grados.

Tabla 4. Análisis de Varianza de los seis grados

	df	Suma de cuadrados	Media de cuadrados	F	Sign.
Entre Grupos	5	312.14	62.43	3.82	0.002**
Intra Grupos	323	5279.89	16.35		
Total	328	5592.03			

Nota: ** $p \leq 0.05$

Para conocer si esta diferencia o cambio era positivo o negativo se llevó a cabo la prueba estadística Tukey, como se observa en la tabla 5.

Tabla 5. Prueba de comparaciones múltiples Tukey

Grados	Diff	lwr	upr	Valor p
2-1	2.07	-0.33	4.47	0.13
3-1	1.00	-1.50	3.50	0.86
4-1	2.56	0.23	4.89	0.02**
5-1	0.29	-1.97	2.56	0.99
6-1	0.21	-1.95	2.38	0.99
3-2	-1.07	-3.53	1.39	0.81
4-2	0.48	-1.80	2.77	0.99
5-2	-1.77	-4.00	0.45	0.20
6-2	-1.85	-3.97	0.27	0.12
4-3	1.56	-0.83	3.95	0.42
5-3	-0.70	-3.03	1.62	0.95
6-3	-0.78	-3.01	1.45	0.91
5-4	-2.26	-4.41	-.011	0.03**
6-4	-2.34	-4.38	-0.30	0.01**
6-5	-0.07	-2.04	1.89	0.99

Nota: ** $p \leq 0.05$

El cambio entre 1° y 4° fue positivo, no obstante, de 4° a 5° y de 4° a 6° fue negativo. A pesar de que se encontró que las actitudes fueron positivas en todos los grados, lo fueron en menor medida en 1°, 5° y 6°, por lo que nuestros hallazgos apuntan a que las actitudes son menos positivas desde inicios de primaria.

El resultado anterior apunta al segundo objetivo de investigación, pues existe una diferencia en las actitudes en al menos tres grados, por ello consideremos relevante analizar en qué componentes de las actitudes, de acuerdo con el Modelo Tripartita de la Actitud, se encuentran estas diferencias, para lo cual, se llevó a cabo un análisis por categorías de dichos componentes.

Análisis por categorías de los componentes de actitud

Dentro del componente afectivo, se estudiaron el gusto o disfrute por las matemáticas y el autoconcepto matemático del estudiante; en el componente cognitivo se estudiaron la percepción de dificultad de las matemáticas y la percepción de valor-utilidad; y en el componente conductual se estudiaron la perseverancia al realizar tareas matemáticas y la curiosidad entendida como motivación intrínseca por aprender matemáticas.

En este estudio se midieron 6 categorías a través de los 12 ítems, cada una mediante dos ítems y la suma aritmética de sus puntuaciones. La puntuación más alta era de 4 y la más baja de 0. Al hacer un análisis exploratorio, se encontró que tanto la percepción de valor-utilidad como la curiosidad fueron positivas, mientras que el gusto o agrado, la percepción de dificultad y la perseverancia fueron neutras, y el autoconcepto matemático se inclina a lo negativo (tabla 6). Todo esto de forma global en los seis grados. Esta interpretación se obtuvo al dividir la puntuación máxima (4) en tres rangos, y dado que a mayor puntuación más positivas son las actitudes, se organizó de la siguiente forma. Negativas de 0 a 1.33 puntos. Neutras de 1.34 a 2.68 puntos. Positivas: de 2.68 a 4 puntos.

Tabla 6. Estadísticos descriptivos de cada categoría

Categoría	Media	Desviación estándar
Gusto o agrado	2.57	1.25
Percepción de dificultad	2.31	1.04
Percepción de valor-utilidad	3.34	0.89
Autoconcepto matemático	1.84	1.04
Perseverancia	2.64	1.04
Curiosidad	3.03	1.31

Fuente: Elaboración propia.

Si bien los estadísticos descriptivos arrojan información valiosa, en la búsqueda de diferencias estadísticamente significativas, se realizaron las pruebas Kruskal-Wallis y U de Mann-Whitney en cada categoría para conocer, en primer lugar, si existe una diferencia, y, en segundo lugar, en qué grados se presentó. Se llevaron a cabo estas pruebas no paramétricas, debido a que los datos de cada categoría no tenían una distribución normal, información que arrojaron las pruebas Shapiro-Wilk en los primeros tres grados y Kolmogorov-Smirnov en los últimos tres (tablas 7 y 8).

Tabla 7. Prueba de normalidad Shapiro-Wilk para 1°, 2° y 3°

Variable (categoría)	Grado					
	1		2		3	
	Est.	Sign.	Est.	Sign.	Est.	Sign.
Gusto o agrado	.87	.00**	.86	.00**	.89	.00**
Percepción de dificultad	.90	.00**	.87	.00**	.88	.00**
Percepción de valor-utilidad	.81	.00**	.67	.00**	.77	.00**
Autoconcepto matemático	.89	.00**	.90	.00**	.91	.00**
Perseverancia	.86	.00**	.88	.00**	.85	.00**
Curiosidad	.81	.00**	.76	.00**	.72	.00**

Nota. Est=Estadístico ** $p \leq 0.05$

Tabla 8. Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov para 4°, 5° y 6°

Variable (categoría)	Grado		
	4 Sig. Asint (2-colas)	5 Sig. Asint (2-colas)	6 Sig. Asint (2-colas)
Gusto o agrado	.003**	.000**	.000**
Percepción de dificultad	.008**	.000**	.000**
Percepción de valor-utilidad	.000**	.000**	.000**
Autoconcepto matemático	.004**	.002**	.000**
Perseverancia	.004**	.001**	.000**
Curiosidad	.000**	.000**	.000**

Nota. ** $p \leq 0.05$

A través de la prueba U de Mann-Whitney, se encontró que todos los grupos de 1° a 4° tuvieron una diferencia estadísticamente significativa con los grados de 5° y 6°, y en todas ellas, el rango medio es mayor en el grado inferior, como se observa en la tabla 9, por lo que se interpreta que el gusto o agrado por las matemáticas es mayor en los grados inferiores y menor en los dos grados superiores.

Tabla 9. Pruebas U de Mann-Whitney de Gusto hacia las matemática

Grado	n	Rango medio	Suma de rangos	U	Sign.
1	45	62.74	2823.50	1001.50	.008**
5	62	47.65	2954.50		
1	45	74.36	3346.00	1199.00	.002**
6	78	54.87	4280.00		
2	48	66.60	3197.00	955.00	.001**
5	62	46.90	2908.00		
2	48	78.68	3776.50	1143.50	.000**
6	78	54.16	4224.50		
3	41	60.05	2462.00	941.00	.017**
5	62	46.68	2894.00		
3	41	71.56	2934.00	1125.00	.005**
6	78	53.92	4206.00		
4	55	68.10	3745.50	1204.50	.003**
5	62	50.93	3157.50		
4	55	79.61	4378.50	1451.50	.001**
6	78	58.11	4532.50		

Nota. ** $p \leq 0.05$

Una de las creencias más comunes acerca de las matemáticas en el contexto escolar es que son difíciles, sin embargo, esta idea no fue compartida por todos los participantes de la investigación, pues las pruebas estadísticas arrojaron que los estudiantes de 1° percibieron más fáciles las matemáticas que los de 5°, esto mismo sucedió con los estudiantes de 2° y 5°, pues los del grado inferior percibían mayor facilidad que los del grado superior (tabla 10). El mismo fenómeno se observó también en las parejas de 2° y 6°, 4° y 5° y 4° y 6°, pues en todos los casos fueron los estudiantes del grado superior quienes percibieron una mayor dificultad en las tareas matemáticas.

Tabla 10. Pruebas U de Mann-Whitney de Percepción de dificultad

Grado	n	Rango medio	Suma de rangos	U	Sign.
1	45	60.77	2734.50	1090.50	.041**
5	62	49.09	3043.50		
2	48	67.32	3231.50	920.50	.000**
5	62	46.35	2873.50		
2	48	73.55	3530.50	1389.50	.008**
6	78	57.31	4470.50		
4	55	69.05	3797.50	1204.50	.001**
5	62	50.09	3105.50		
4	55	74.71	4109.00	1721.00	.035**
6	78	61.56	4802.00		

Nota. ** $p \leq 0.05$

En cuanto a la percepción de valor-utilidad de las matemáticas, se observó un cambio positivo entre 1° y 2°, pues los estudiantes de 2° percibieron una mayor utilidad de las matemáticas que los de 1°; un cambio positivo entre 1° y 4°; un cambio negativo entre 2° y 3°; un cambio positivo entre 3° y 4° y un cambio negativo entre 4° y 5° y 4° y 6° (tabla 11). En conclusión, los estudiantes de segundo y cuarto grado fueron los que percibieron en mayor medida la utilidad de las matemáticas tanto en la actualidad como a futuro.

Tabla 11. Pruebas U de Mann-Whitney de Percepción de valor-utilidad

Grado	n	Rango medio	Suma de rangos	U	Sign.
1	45	40.24	1811.00	776.00	.009**
2	48	53.33	2560.00		
1	45	41.26	1856.50	821.50	.001**
4	55	58.06	3193.50		
2	48	49.66	2383.50	760.50	.038**
3	41	39.55	1621.50		
3	41	40.74	1670.50	809.50	.006**
4	55	54.28	2985.50		
4	55	65.78	3618.00	1332.00	.017**
5	62	52.98	3258.00		
4	55	74.61	4103.50	2344.50	.025**
6	78	61.63	4807.50		

Nota. ** $p \leq 0.05$

Respecto del autoconcepto, en la tabla 6, se mostró que en promedio es negativo y, a través de la prueba Kruskal-Wallis, que busca diferencia entre muestras independientes, se encontró que no hubo cambios en el autoconcepto que fueran significativos estadísticamente.

Respecto de la perseverancia, esta fue neutra, más inclinado a lo positivo, al realizar el análisis entre grados para conocer si hubo alguna diferencia significativa, se detectó una mayor perseverancia en el grupo de 3° en comparación con el de 6°; así como una mayor perseverancia en los estudiantes de 4° en comparación con los de 6° (tabla 12). Este hallazgo del grado superior como el que se percibe menos perseverante podría deberse a diversos factores como la edad, los contenidos matemáticos, la dificultad de los contenidos, otros intereses en los alumnos. Resultaría conveniente investigarlos en el futuro para comprender lo observado al tener las causas determinadas.

Tabla 12. Pruebas U de Mann-Whitney de Perseverancia

Grado	n	Rango medio	Suma de rangos	U	Sign.
3	41	69.22	2838.00	1221.00	.024**
6	78	55.15	4302.00		
4	55	80.09	4405.00	1425.00	.001**
6	78	57.77	4506.00		

Nota. ** p ≤ 0.05

La curiosidad resultó positiva, no obstante, hay una mayor curiosidad por aprender en niños de 4°, 5° y 6° que de 1°; así como una mayor curiosidad por aprender en estudiantes de 4° que los de 3° y 6° (tabla 13).

Tabla 13. Pruebas U de Mann-Whitney de Curiosidad

Grado	n	Rango medio	Suma de rangos	U	Sign.
1	45	38.07	1713.00	678.00	.000**
4	55	60.67	3337.00		
1	45	42.74	1923.50	888.50	.001**
5	62	62.17	3854.50		
1	45	51.32	2309.50	888.50	.008**
6	78	68.16	5316.50		
2	48	45.28	2173.50	997.50	.011**
4	55	57.86	3182.50		
3	41	41.76	1712.00	851.00	.013**
4	55	53.53	2944.00		
4	55	76.57	4211.50	1618.50	.006**
6	78	60.25	4699.50		

Nota. ** p ≤ 0.05

Estos cambios en la curiosidad podrían parecer extraños, ya que son precisamente los estudiantes de grados superiores (5° y 6°) quienes encuentran más difíciles las matemáticas, sin embargo, podría presentarse un fenómeno que llamamos *círculo de esperanza*, ya que, a pesar de que encuentran difícil hacer matemáticas y su gusto hacia ellas es menor, son los estudiantes que muestran una mayor curiosidad por aprenderlas, por lo que quizá cambiando la forma de enseñanza podrían parecer más fáciles, y las actitudes volverse más favorables.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La intención de este estudio fue conocer las actitudes hacia las matemáticas de estudiantes de educación primaria, particularmente de una escuela pública en Ciudad Juárez, México y, analizar si existe un cambio en los aspectos observables de dichas actitudes a lo largo de este nivel educativo. Para ello, se recurrió al Modelo Tripartita de la Actitud, que establece tres componentes, afectivo, cognitivo y conductual (APA, 2018). Estos fueron medidos a través de seis categorías, gusto, autoconcepto, percepción de dificultad y valor-utilidad, perseverancia y curiosidad, utilizando la Escala de Actitudes hacia la Matemática Temprana (ESAMAT, Román *et al.*, 2019).

Aunque algunos estudios previamente reportados emplearon instrumentos distintos a la ESAMAT, en esta sección se realizan comparaciones con ellos, dado que todos estudian el mismo fenómeno, la actitud hacia las matemáticas. Estas comparaciones se centran en características generales de la actitud, como su estabilidad a lo largo del tiempo, así como en factores relacionados, como el autoconcepto matemático, y tienen la intención de situar nuestros hallazgos en un contexto más general, permitiendo reconocer patrones consistentes, identificar diferencias relevantes y, con ello, interpretar la importancia y el alcance de nuestros resultados dentro de la literatura existente.

En relación con el primer objetivo, los resultados indican que las actitudes hacia las matemáticas son ligeramente positivas entre los estudiantes de educación primaria, y los estudiantes de cuarto presentan mejores actitudes que el resto, mientras que los estudiantes de 1°, 5° y 6° las tuvieron en menor medida, lo que difiere con lo reportado por Mazana *et al.* (2019), quienes encontraron que, si bien en educación primaria las actitudes fueron positivas, disminuyeron hasta la educación secundaria.

En cuanto al segundo objetivo, se encontraron diferencias a lo largo de los grados. El gusto o agrado hacia las matemáticas es mayor en los grados inferiores que en los dos superiores, esto coincide con lo que se encontró en el estudio de Adelson y McCoach (2011) pues los estudiantes más pequeños disfrutan más de las matemáticas. De igual manera el hallazgo fue muy similar al realizado años antes por Hidalgo *et al.* (2004) en el que se expuso que había una disminución, aunque no sustancial, en el gusto por las matemáticas del 3° al 5°.

Los estudiantes de grados inferiores, como lo fueron 1°, 2° y 4°, encontraron menos difíciles las matemáticas que los de los grados superiores 5° y 6°. Hidalgo *et al.* (2004) encontraron un resultado similar en su estudio, sin embargo, el cambio en este aspecto de las actitudes hacia las matemáticas fue hallado en 3° y 5°, pues los de 5° encontraron más difícil entender matemáticas que los de 3°.

El autoconcepto matemático de los estudiantes, en promedio fue negativo, lo que difiere del estudio de Ortiz *et al.* (2018) donde se encontró que el autoconcepto en estudiantes de primaria fue alto y lo atribuyeron a que posiblemente no se había desarrollado por completo y sugirieron indagar sobre este aspecto en los distintos grados para ver si se reflejaba su construcción, sin embargo, dado que no existió un cambio, no se pudo percibir en este estudio esa construcción. Al analizar cada grupo, no se encontraron cambios significativos estadísticamente, tal como se observó en el estudio de Adelson y McCoach (2011). Esto se contrapone, tanto a lo observado por Hidalgo (2004) como por Cvencek *et al.* (2021) pues estos últimos encontraron que había un mejor autoconcepto en primer grado que en quinto grado de educación primaria.

Como se pudo percibir en los resultados, el cuarto grado presentó mayores puntuaciones, diferenciándose de los otros en todos los aspectos evaluados, excepto en el autoconcepto matemático, en el que no se observó diferencia significativa entre los grados. Este hallazgo contrasta con lo que se ha observado en diversos estudios internacionales, donde las actitudes positivas hacia las matemáticas tienden a disminuir a medida que los estudiantes avanzan en la escolaridad (McLeod, 1992; Deieso y Fraser, 2019; Mazana *et al.*, 2019; Cvencek *et al.*, 2021).

En el contexto mexicano, la literatura señala que existen tendencias positivas en el autoconcepto y las actitudes hacia las matemáticas durante la educación primaria (Ortiz *et al.*, 2018). Nuestros hallazgos confirman la presencia de actitudes positivas, pero difieren en cuanto al autoconcepto, ya que encontramos que, en promedio, el autoconcepto de los participantes es negativo. Al parecer, los estudiantes tienen poca confianza en sus propias habilidades para resolver correctamente las tareas matemáticas, pero, a pesar de ello, mantienen una actitud positiva. Este resultado es relevante, ya que, aunque la actitud general sea positiva, algunos de sus componentes no lo son, lo que sugiere la necesidad de trabajar en aumentar la confianza de los estudiantes en sus habilidades matemáticas.

Una de las implicaciones de nuestro estudio para la Educación Matemática es la importancia de conocer las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes para poder intervenir de manera adecuada y diseñar estrategias pertinentes para fomentar actitudes positivas en el aula. Además, el uso de instrumentos amigables y de fácil comprensión, como la ESAMAT, resulta relevante, como sugirieron Sánchez y Ursini (2010), ya que homogeneizar la forma en que se miden las actitudes podría facilitar la comparación de estudios en distintos contextos. Sería conveniente, también, realizar estudios con muestras más grandes e incluir estudiantes de distintos niveles educativos para extender las comparaciones y observar cómo evolucionan las actitudes hacia las matemáticas a lo largo de toda la escolaridad.

Como limitación de este estudio, señalamos la falta de un análisis cualitativo que permitiera indagar más a fondo en el autoconcepto matemático y otros componentes de las actitudes. En este sentido, sería importante que futuros estudios implementen un enfoque de investigación mixto, que incluya grupos focales o entrevistas semiestructuradas, para profundizar en cada uno de los componentes de la actitud.

REFERENCIAS

Adelson, J. L., y McCoach, D. B. (2011). Development and psychometric properties of the Math and Me Survey: Measuring third through sixth graders' attitudes toward mathematics. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development, 44*(4), 225–247. https://doi.org/10.1177/0748175611418522

Ajzen, I. (1993). Attitude theory and the attitude-behaviour relation. En Krebs, D. y Schmidt, P. (Eds.) *New directions in attitude measurement* (pp. 41-57). Walter de Gruyter.

American Psychological Association, APA. (Abril de 2018). *Tripartite model of attitudes*. APA Dictionary of Psychology. https://dictionary.apa.org/tripartite-model-of-attitudes.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la Matemática Estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4º ed.). Sage.

Cvencek, D., Brecic, R., Gacesa, D., y Meltzoff, A. (2021). Development of math attitudes and math self-concepts: gender differences, implicit-explicit dissociations, and relations to math achievement. *Child Development, 92*(5), 940-956. https://doi.org/10.1111/cdev.13523

Deieso, D., y Fraser, B. J. (2019). Learning environment, attitudes and anxiety across the transition from primary to secondary school mathematics. *Learning Environments Research, 22*, 133-152. https://doi.org/10.1007/s10984-018-9261-5

Di Martino, P., y Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 27–48.

Dolores, C., Martínez, G., García, M., Juárez, J., y Ramírez, J. (Eds). (2018). *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa*. Ediciones Eón; Universidad Autónoma de Guerrero.

Eudave, D. (1994). Las actitudes hacia las matemáticas de los maestros y alumnos de bachillerato. *Educación Matemática, 6*(1), 46-58.

Fennema, E. y Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(5), 324-326.

García, M, S. y Juárez, J. (2011). Revisión del constructo actitud en Educación Matemática: 1959-1979. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Unión* 26(1), 117-125. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/933

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Hidalgo, S., Maroto, A., y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación, 334*, 75-95.

Lemus, M. y Ursini, S. (2018). Creencias y actitudes hacia las matemáticas: un estudio exploratorio con alumnos de bachillerato. En C. Dolores, G. Martínez, M. García, J. Juárez, y J. Ramírez (Eds), *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa* (pp. 175-190). Ediciones Eón; Universidad Autónoma de Guerrero.

López, J., Ramírez, J., García, A. y Verduzco, M. (2018). Actitudes hacia las matemáticas en los estudiantes de educación especial. En C. Dolores, G. Martínez, M. García, J. Juárez, y J. Ramírez (Eds.), *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa* (pp. 211- 224). Ediciones Eón; Universidad Autónoma de Guerrero.

Mazana, M., Montero, C., y Casmir, R. (2019). Investigating students' attitude towards learning mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(1), 207-231. https://doi.org/10.29333/iejme/3997

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 575-596). Macmillan Publishing Company.

Ortiz, C., Ramírez, J., y Ávalos, M. (2018). Autoconcepto matemático y rendimiento académico en alumnos de quinto grado de primaria. En C. Dolores, G. Martínez, M. García, J. Juárez, y J. Ramírez (Eds.), *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa* (pp. 143- 158). Ediciones Eón; Universidad Autónoma de Guerrero.

Román, B., Mera, C., Aragón, E. y Delgado, C. (2019). Descripción de una escala de actitudes hacia la matemática temprana (ESAMAT). *Revista INFAD de Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology, 3*(1), 213–220. https://doi.org/10.17060/ijodaep.2019.n1.v3.1472

Rosenberg, M. J., Hovland, C. I., McGuire, W. J., Abelson, R. P., y Brehm, J. W. (1960). *Attitude organization and change: An analysis of consistency among attitude components. (Yales studies in attitude and communication).* Yale Univer. Press.

Sánchez, G. y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 13*(4-II), (303-318).

Ursini S. y Sánchez, G. (2019) *Actitudes hacia las matemáticas. Qué son. Cómo se miden. Cómo se evalúan. Cómo se modifican*. UNAM, FES Zaragoza.

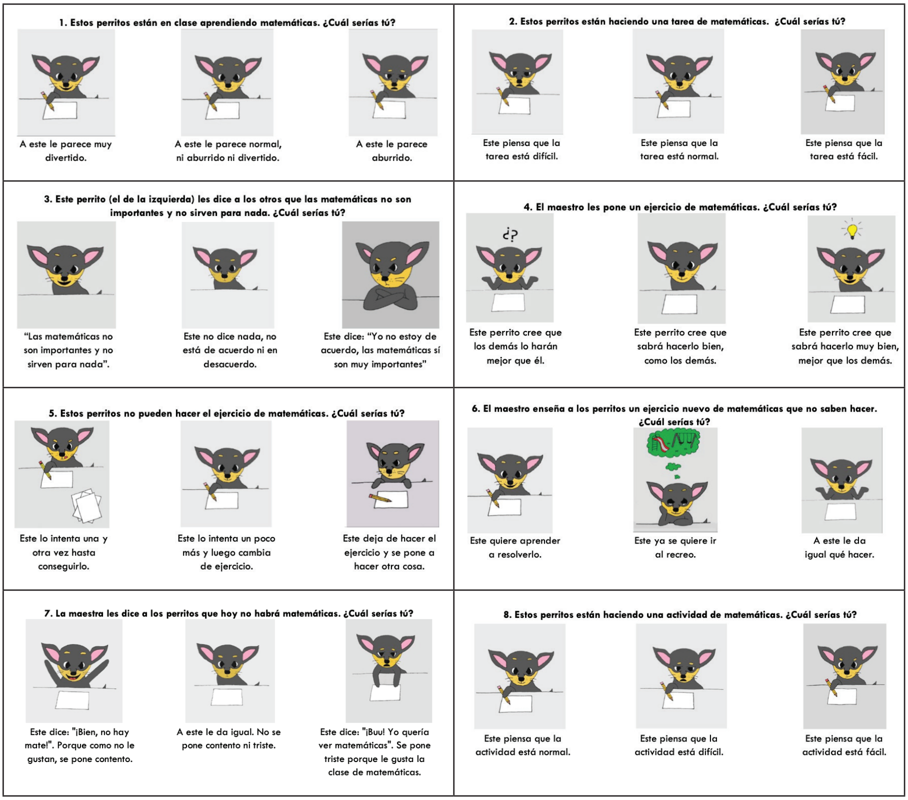
Vásquez, C., Alvarado, H., y Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza. *Educación matemática*, 31(3), 177-202.

Autora de correspondencia:

Alejandra Herrera Salgado

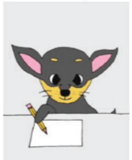
Dirección: Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Instituto de Ingeniería y Tecnología.
Avenida del Charro 450 Norte, Colonia Partido Romero, Código Postal 32310,
Ciudad Juárez, Chihuahua, México.
al232583@alumnos.uacj.mx / alejandrahsal@gmail.com

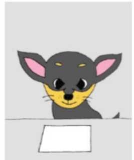
ANEXO 1. ADAPTACIÓN DE LA ESCALA DE ACTITUDES HACIA LA MATEMÁTICA TEMPRANA



9. Estos perritos están aprendiendo a hacer operaciones con números. ¿Cuál serías tú?

Este piensa que es muy importante aprender números porque sirven para muchas cosas.


Este piensa que los números son importantes y sirven, pero no tanto.


Este piensa que no es importante aprender números.

10. El profesor encargó tarea de matemáticas. ¿Cuál serías tú?

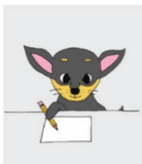

Este perrito no sabe hacer bien la tarea y quiere que le ayuden.

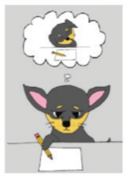

Este hace la tarea solo, aunque tenga algunas dudas o cosas que no entienda bien.


Este perrito hace la tarea solo y sabe hacerlo todo sin dudas.

11. Estos perritos están cansados de hacer una actividad con números. ¿Cuál serías tú?


Este quiere terminar la actividad, no importa el cansancio.

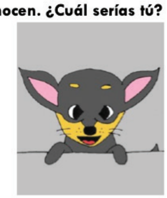

Este quiere seguir un ratito con la actividad, pero descansar pronto.


Este quiere parar ya y descansar poquito.

12. En clase van a aprender nuevos temas de matemáticas que no conocen. ¿Cuál serías tú?


Este perrito quiere irse a jugar.


A este perrito le da igual qué hacer.


Este perrito quiere aprender cosas nuevas de matemáticas.

 https://doi.org/10.24844/EM3703.02

Retroalimentación en clases de matemáticas en educación primaria

Feedback and mathematical learning in primary education students

María Verónica Leiva Guerrero,[1] Gloria Contreras Pérez,[2] Grace Morales Ibarra[3]

Resumen: Este artículo analiza las retroalimentaciones realizadas por tres profesores sobre el desempeño de estudiantes de educación primaria, de tres escuelas de la Región de Valparaíso, Chile, en la asignatura de matemáticas, en el nivel quinto año básico, edad 10 años. Fueron observadas, grabadas y transcritas cuatro clases de 45 minutos, por cada profesor. Se identificaron 289 segmentos que fueron analizados en base a la tipología de Tunstall y Gipps, el marco estructural de praxeología (Godino) y efectos didácticos (Brousseau). Los resultados sugieren que las retroalimentaciones pueden ser caracterizadas en cada profesor, observándose principalmente las de tipo evaluativo o, asociadas a la aplicación de técnicas y elaboración de argumentos y efectos didácticos que podrían influir en la construcción de conocimientos matemáticos. Sostenemos que este tipo de retroalimentaciones influye en la manera que los estudiantes descubren, construyen, asimilan, articulan y asocian sus

Fecha de recepción: 19 de marzo de 2024. **Fecha de aceptación:** 4 de agosto de 2025.

[1] Escuela de Pedagogía, Facultad de Filosofía y Educación, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, veronica.leiva@pucv.cl, https://orcid.org/0000-0002-7641-0087.

[2] Escuela de Pedagogía, Facultad de Filosofía y Educación, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, gloria.contreras@pucv.cl, https://orcid.org/0000-0002-3813-515X.

[3] Escuela de Pedagogía, Facultad de Filosofía y Educación, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, grace.morales@pucv.cl, https://orcid.org/0000-0002-4881-6127.

conocimientos matemáticos, al poder limitar protagonismo y autonomía en su proceso educativo.

Palabras clave: *Tipos de retroalimentación, efectos didácticos, modelo praxeológico, matemáticas, educación primaria.*

Abstract: This article analyses the feedback provided by three teachers on the performance of primary school students in the subject of mathematics, in the fifth grade, age 10 years, from three schools in the Valparaíso Region, Chile. Four 45-minute classes were observed, recorded and transcribed by each teacher. 289 segments were identified and analysed based on the Tunstall and Gipps typology, the structural framework of praxeology (Godino) and didactic effects (Brousseau). The results suggest that feedback can be characterised in each teacher, mainly observing evaluative or associated with the application of techniques and elaboration of arguments and didactic effects that could influence the construction of mathematical knowledge. We argue that this type of feedback influences the way in which students discover, construct, assimilate, articulate and associate their mathematical knowledge, which may limit their protagonism and autonomy in their educational process.

Keywords: *Types of feedback, didactic effects, praxeological model, mathematics, primary education.*

1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La evaluación del aprendizaje en su sentido formativo ha ganado una importancia creciente tanto en el ámbito escolar como universitario, a nivel mundial. Actualmente, se reconoce su valor como parte integral de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en contraposición a ser considerada como una actividad adicional al finalizar dichos procesos (Contreras-Pérez y Zúñiga-González, 2017; O'Donovan *et al.*, 2019; Talanquer, 2015; Wiliam, 2011). Investigaciones en esta área indican que la evaluación formativa puede potenciar el aprendizaje y la autoconciencia de los estudiantes al involucrarse activamente en el proceso evaluativo (Arzola-Franco, 2017; Bizarro Flores *et al.*, 2021; Canabal y Mangalef, 2017). En este contexto, la retroalimentación emerge como un elemento esencial, ya que implica la utilización por parte de docentes y estudiantes de evidencia sobre el aprendizaje para mejorarlo.

La política educativa en Chile, desde la década de 2000 en adelante, ha fortalecido la evaluación formativa en las escuelas mediante diversas iniciativas legales y orientaciones para apoyar el trabajo docente en el aula, el papel de los directivos escolares, la formación inicial y continua de los profesores y el ejercicio profesional. Estas iniciativas han convergido gradualmente hacia una visión más unificada sobre el significado y la práctica de la evaluación formativa, alineada con enfoques socioconstructivistas del aprendizaje. Se espera una alta participación estudiantil en las actividades de evaluación, una diversidad de métodos para recopilar información y una estrecha relación entre enseñanza, evaluación y aprendizaje. Además, se promueve la colaboración entre directivos y docentes. Ejemplos de estas políticas son los Estándares de Desempeño Docente (Ministerio de Educación de Chile, 2021), la Política para el Fortalecimiento de la Evaluación en el Aula (Ministerio de Educación de Chile, 2018) y el Decreto de Evaluación, Promoción y Calificación (2018), comúnmente conocido como Decreto 67/2018.

Una de las características más relevantes del Decreto 67/2018 es su énfasis en el aspecto pedagógico de la evaluación y el uso de la retroalimentación. Las directrices emitidas por el Ministerio de Educación de Chile para comprender e implementar adecuadamente este decreto resaltan la retroalimentación como parte fundamental del proceso de evaluación, describiéndola como la provisión de información pertinente al estudiante para mejorar su aprendizaje sobre los objetivos evaluados, así como para fomentar la reflexión del docente sobre cómo su práctica pedagógica influye en el progreso de los estudiantes (Ministerio de Educación de Chile, 2019).

Sin embargo, a pesar de estos esfuerzos, algunos antecedentes indican que las prácticas de evaluación formativa, en particular las relacionadas con la retroalimentación, no han experimentado una renovación significativa en el sistema escolar chileno. Por ejemplo, el Sistema de Evaluación del Desempeño Profesional Docente en Chile informa consistentemente que la evaluación del aprendizaje, en términos de los instrumentos de evaluación y la retroalimentación, muestra resultados insatisfactorios, independientemente de las asignaturas y niveles escolares. Esto se ilustra con los siguientes porcentajes de logro a nivel nacional en 2019: uso del error para el aprendizaje (10%), retroalimentación a los estudiantes (22%), y análisis y uso de los resultados de la evaluación (17%) (Navarro *et al.*, 2021). Además, una revisión de la literatura sobre retroalimentación en español realizada por Herrera *et al.* (2023) destaca la escasez de investigaciones en el ámbito escolar chileno y, en cuanto a los resultados de dichas investigaciones, señala una predominancia de retroalimentación de tipo evaluativa, elogios y comentarios generales, con escaso potencial para apoyar el aprendizaje de los estudiantes.

Estos antecedentes evidencian la necesidad de que los docentes adquieran competencias sólidas en el proceso de retroalimentación para promover aprendizajes significativos en sus estudiantes, especialmente en el contexto de la asignatura de matemáticas, donde los resultados de las evaluaciones nacionales e internacionales señalan desafíos significativos para el sistema escolar chileno (Valdés, 2015). Específicamente, la evaluación y retroalimentación en matemáticas deberían facilitar la valoración de los aspectos realmente importantes de la disciplina, contribuir al aprendizaje y proporcionar oportunidades para que todos los estudiantes demuestren sus aprendizajes (Stacey y Wiliam, 2013). Para lograrlo, Zakaryan y Ribeiro (2016) sugieren que los docentes deben poseer un profundo conocimiento del contenido matemático que enseñan, ya que este conocimiento influye en la calidad de la enseñanza y la retroalimentación del aprendizaje.

A pesar de que la investigación en matemáticas, especialmente en lo que respecta a la retroalimentación, está en sus primeras etapas, algunos estudios de los últimos cuatro años revelan que los docentes requieren de conocimientos específicos sobre retroalimentación y sus tipos. Ante estos antecedentes, se diseñó una investigación para caracterizar los tipos de retroalimentación que ofrecen los profesores a sus estudiantes de quinto año de primaria en la asignatura de matemáticas y para conjeturar acerca de cómo este proceso puede influir en el aprendizaje. Este estudio se llevó a cabo en tres escuelas de la ciudad de Valparaíso, Región de Valparaíso, Chile.

2. IMPORTANCIA DE LA RETROALIMENTACIÓN EN EL DESARROLLO DEL APRENDIZAJE

En su origen el término retroalimentación designa a un proceso de comunicación y ajuste de resultados. En su revisión conceptual Ramaprasad (1983), establece que se trata de información sobre la brecha entre un estado de referencia y un estado deseable, información que es usada para cerrar dicha brecha. Sobre esta base, Sadler (1989) señala que para que la retroalimentación tenga efectos positivos en el estudiante, éste debe, apoyado por el profesor, comprometerse en una acción apropiada que conduzca al cierre de la brecha. Por lo tanto, no pueden considerarse retroalimentación aquellos procedimientos que se utilizan para comunicar a un estudiante si la respuesta a una pregunta es correcta o incorrecta, por ejemplo, puntajes en las pruebas, notas y símbolos (Sadler, 2010).

En una perspectiva actualizada la retroalimentación se comprende como un proceso de diálogo que involucra una interacción coordinada entre profesor-estudiante, o incluso entre estudiante-estudiante, que promueve una actividad reflexiva que permite al alumnado construir significados. Para ellos es conveniente que el profesor cree un ambiente estimulante e interactivo de enseñanza, adapte los comentarios a las necesidades de los estudiantes y recurra a distintas fuentes, incluyendo a los compañeros, y a diversas modalidades de diálogo (Van der Kleij *et al*., 2019; Winstone *et al*., 2022). Entonces, para que la retroalimentación sea efectiva tiene que ser informativa, comprensible y usable (Brookhart y Ruiz Primo, 2018). De esta forma ayudará al estudiantado a sentirse en control de su aprendizaje y desarrollar habilidades de autoevaluación y monitoreo para mejorar su desempeño (Muñoz, 2020; Novoa, 2023). Al respecto, el estudio de Zavaleta y Dolores (2021), evidencia que los profesores que aplican una retroalimentación grupal y verbal, implementada de manera sistemática y planificada, contribuyen significativamente al aprendizaje de los estudiantes en el aula.

2.1 Retroalimentación efectiva para el aprendizaje

Tunstall y Gipps (1996), a partir de una investigación en Gran Bretaña, diseñada para conocer los tipos de retroalimentación que se daba a niños en la enseñanza primaria en el área de matemáticas, desarrollaron una tipología que agrupa los tipos de retroalimentación en dos grandes ejes. A continuación, se describe cada tipo de retroalimentación y luego se discute su efecto en el aprendizaje.

A1: Recompensar. Se usa para premiar a los estudiantes por sus esfuerzos en su trabajo o por su comportamiento. Se trata de retroalimentación de motivación extrínseca y se expresa en aspectos concretos y tangibles tales como caritas felices o estrellas.

A2: Castigar. Es la retroalimentación extrínseca más negativa y la usan los docentes para expresar su completa desaprobación. Se expresa de manera física y en acciones concretas tales como echar al alumno de la sala o destruir su trabajo.

B1: Aprobar. Es un tipo de retroalimentación que se usa como refuerzo positivo. Se trata de expresiones de aprobación por el trabajo, actitudes o esfuerzo. Los ejemplos más frecuentes son decir al estudiante "muy bien" o "bien hecho". Con menor frecuencia se encuentran señales físicas, tales como sonreír al alumno o levantar un dedo.

B2: Desaprobar. Se trata de retroalimentación evaluativa y negativa y se otorga cuando el docente siente que el trabajo o el comportamiento no es adecuado. Se dirige a la autoestima del alumno como una forma de atribuir responsabilidad a su actitud por su bajo desempeño y, de esta forma, lograr que se corrija. Un ejemplo es decir al estudiante que es flojo y por eso no le va bien.

C1: Especificar lo logrado. Es retroalimentación descriptiva dirigida al trabajo del estudiante e identifica de manera específica aquello que está bien logrado y por qué. De esta forma apoya y refuerza el aprendizaje a través del uso de los criterios de evaluación y la forma en que el alumno los ha cumplido. Un ejemplo frecuente de este tipo de retroalimentación en Matemática se da cuando el docente dice al estudiante que su gráfico está bien hecho porque asignó nombres a los ejes, la distancia entre los números de los ejes es equivalente, entre otros.

C2: Especificar lo que hay que mejorar. Retroalimentación descriptiva y dirigida al trabajo del estudiante. El docente la usa para especificar qué es lo que falta, está errado o requiere alguna mejora. En el ejemplo anterior del gráfico, el profesor puede señalar al alumno que le faltó poner un título coherente con la temática.

C1 y **C2** se asocian a retroalimentaciones más bien unilaterales, sin mediar diálogo con el estudiante.

D1: Construir aprendizajes. Retroalimentación descriptiva que se usa mientras se desarrolla un trabajo. Implica un diálogo entre profesor y estudiante en que el estudiante es estimulado a describir, explicar o fundamentar su trabajo mientras lo va realizando. De esta manera su nivel de participación en la retroalimentación es mayor que en los casos anteriores. Por ejemplo, si los estudiantes se encuentran desarrollando una guía de ejercicios de Matemática, el docente puede pasar por el puesto de cada uno indagando sobre el trabajo con consultas tales como ¿por qué usaste esta fórmula?

D2: Construir el camino hacia el futuro. Retroalimentación descriptiva y de diálogo en que más bien el docente sugiere y orienta al alumno en vez de decirle qué debe hacer. Es decir, el alumno es más autónomo y protagónico. Como en D1, el lenguaje es fundamental. Un ejemplo es que un estudiante, o un grupo, presente al profesor y a toda la clase un trabajo solicitando opiniones, sugerencias y discutiendo sobre cómo se puede mejorar el trabajo a futuro.

Como se aprecia, la tipología está dividida en dos grandes tipos de retroalimentación: evaluativa (A1, A2, B1 y B2) y descriptiva (C1, C2, D1, D2). La más valiosa para promover el aprendizaje es la de tipo descriptiva, en tanto que la de tipo evaluativa resulta tener muy poco impacto e incluso, en algunos casos, puede perjudicar el aprendizaje. La retroalimentación descriptiva del tipo D puede conducir al estudiante a la autorregulación de sus aprendizajes.

Anijovich (2010) señala que "la retroalimentación es más productiva si se centra en la tarea, en cómo el alumno la resuelve, y cómo autorregula su aprendizaje" (p. 132). Perrenoud (2008), a su vez, indica que la autorregulación fortalece las capacidades cognoscitivas que el estudiante pone en juego durante los procesos evaluativos.

Por tanto, este tipo de retroalimentación ayuda a los alumnos a vivir los procesos de forma autorregulada, pues permite que ellos, por medio de preguntas, comentarios que realice el docente, evalúen constantemente su aprendizaje, alcanzando autonomía y desarrollando la autoestima (Anijovich, 2010; Nicol y Macfarlane-Dick, 2006). Estos autores plantean que el estudiante podrá ajustar y orientar los objetivos en virtud del aprendizaje, reaccionando y utilizando oportunamente las preguntas y comentarios efectuados por el profesor.

A partir de lo expuesto, la retroalimentación será conceptualizada como una práctica evaluativa formativa, que "es efectiva cuando la información comunicada al estudiante con la intención de estimular y modificar su pensamiento tiene el propósito de mejorar el aprendizaje" (Shute, *et al*., 2007, p.127), jugando un rol fundamental para su desarrollo y progreso (Anijovich, 2010; Brookhart, 2007; Hattie y Timperley, 2007; McMillan, 2007; Osorio y López, 2014; Sadler, 1998; Tunstall y Gipps, 1996). La retroalimentación oral es aquella que entrega el docente verbalmente al estudiante, para generar un diálogo (interacción) que promueva, fortalezca y proyecte su aprendizaje, asumiendo éste su responsabilidad y dirección del acto de aprender (Black y Wiliam, 1998), para el desarrollo de la metacognición y la construcción de un individuo autónomo y autorregulado (Anijovich, 2010; Sadler, 2010; Wiggins, 2012).

2.2 Aportes de elementos teóricos didácticos para la retroalimentación efectiva en clases de matemáticas.

En este apartado se examina la retroalimentación a partir de elementos de dos teorías didácticas de las matemáticas para determinar las características y formas que adoptan las prácticas retroalimentadoras. Por una parte, de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1991) se destaca el concepto de praxeología, por su contribución al análisis de tareas, técnicas, tecnología y teorías involucradas en el aprendizaje. Y, por otra, de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1998) se destacan los disfuncionamientos en la comunicación, efectos didácticos, que afectan en algún grado el aprendizaje durante la interacción profesor-estudiante.

Respecto de la primera teoría, Chevallard propone una estructura que denomina praxeología, constituida por la cuaterna tarea-técnica-tecnología-teoría. El par tarea-técnica $[T, \tau]$ es el componente que se refiere a la praxis y la dupla tecnología-teoría $[\theta, \Theta]$ es el componente relacionado al logos (Castela y Romo-Vazquez, 2011; Godino, 2023). Bajo esta estructura, se posibilita el estudio de las actividades de aprendizaje (tareas matemáticas), que se resuelven aplicando procedimientos o un conjunto de estrategias (técnicas).

Respecto de la segunda teoría, Brousseau (1998), plantea que durante la enseñanza se produce un conjunto de interrelaciones entre el estudiante, el profesor y el contexto, siendo el profesor quien estructura el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento (Chavarría, 2006). En este proceso pueden surgir efectos didácticos, es decir, disfuncionamientos en el esquema de comunicación, que pueden afectar, inhibir, interrumpir y/o limitar la forma de construcción de conocimientos (Brousseau, 1998; Chavarría, 2006). Brousseau propone cuatro efectos didácticos que aportan especificaciones en el diálogo del aula (Brousseau, 1998; Chavarría, 2006; Joya, 2016):

- *Efecto Topaze*: se da en las situaciones en las que el estudiante llega a la solución del problema, pero no por sus propios medios, sino porque el profesor orienta la resolución del mismo. Es decir, el profesor le realiza preguntas cada vez más fáciles hasta que aparece la respuesta esperada.

De este modo, el profesor rebaja las condiciones de exigencia, modifica el problema que el estudiante debería resolver.
- *Efecto Jourdain*: Se da cuando el profesor admite el indicio de un conocimiento matemático en la respuesta del estudiante, aun cuando se trate de un conocimiento banal, evitando de esta forma el debate con el estudiante.
- *Deslizamiento Metacognitivo*: Se da cuando el profesor cambia el objetivo de su enseñanza, ya que no logra la comprensión de los estudiantes, construyendo un conocimiento de menor nivel cognitivo o centrándose en el manejo de una técnica. Con ello reduce el análisis del conocimiento matemático que está realmente implicado.
- *Uso Abusivo de la Analogía*: Se da cuando el docente utiliza un ejemplo particular para el estudio de un determinado contenido matemático, desviando el aprendizaje de lo que es esencial pues otros elementos toman prioridad y el razonamiento no logra ser adecuado en aquello que pretende enseñar.

En general, estos efectos didácticos emergen durante el diálogo cuando el profesor intenta apoyar la construcción de conocimientos de sus estudiantes. Por tanto, la retroalimentación que les brinda puede influir en cómo toman decisiones, cómo aplican una técnica o cómo la argumentan, favoreciendo o entorpeciendo la construcción de conocimientos matemáticos.

Estos tres enfoques pueden aportar una visión más holística para caracterizar la retroalimentación verbal en matemáticas, ya que cada marco aporta una función complementaria. La tipología de Tunstall y Gipps permite distinguir aquellas retroalimentaciones más efectivas para el aprendizaje. El enfoque de praxeología (Chevallard, 1991; Camacho, 2010) brinda una perspectiva estructural para el análisis: tareas, técnicas, tecnología y/o teoría matemática que subyacen en las prácticas diarias en el aula. Las retroalimentaciones podrían ser usadas para mediar y poner en relación estos elementos estructurales, compatibilizando con la propuesta de Brousseau. Por una parte, el profesor puede aportar al estudiante, a través de sus retroalimentaciones, el establecimiento de relaciones entre las tareas (lo que se espera que los estudiantes hagan), las técnicas (cómo deben proceder), y las teorías que subyacen (concepciones matemáticas y didácticas). Por otra parte, los efectos didácticos aportan a comprender cómo los profesores y estudiantes negocian y reinterpretan las matemáticas en el aula.

3. MÉTODO

La investigación es de tipo observacional descriptiva (Flick, 2015) y se centró en observar, contabilizar y describir segmentos de los tipos de retroalimentación presentes en cuatro clases de matemáticas de tres profesores, en el nivel 5° básico, sin intentar influir en ellas (Maxwell, 2005).

3.1 Participantes

Los participantes son tres profesores de matemáticas (P1, P2 y P3) de Educación Primaria de tres colegios de la ciudad de Valparaíso, Chile. Se escogieron establecimientos escolares de distinta dependencia administrativa y financiera bajo el supuesto de que, debido a las diferencias en los resultados de la prueba estandarizada SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación) los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación se pueden estar desarrollando con características distintivas de acuerdo a dichas dependencias (Barahona *et al.*, 2018). Las características de los profesores se presentan en la tabla I.

Los profesores fueron seleccionados por criterio de conveniencia (Flick, 2015) y fueron observados y grabados. Se determinó la asignatura de matemáticas, principalmente, por los bajos resultados obtenidos en la prueba estandarizada SIMCE en los últimos tres años (Agencia de Calidad de la Educación, 2019).

Tabla I. Caracterización Participantes

Profesor	Género	Título	Años de experiencia	Curso de actualización en didáctica de las matemáticas	Matrícula curso	Dependencia centro escolar
P1	Masculino	Profesor de Educación Media en Matemática.	9 años	No	17 alumnos	Particular-pagado.
P2	Femenino	Profesora de Educación Básica con Mención en Matemática	5 años	Sí	28 alumnos	Particular-Subvencionado
P3	Femenino	Profesora de Educación Básica con Mención en Matemática	14 años	No	28 alumnos	Municipal

Fuente: elaboración propia

3.2 Procedimiento e instrumento de recolección de información

Por cada profesor se observaron cuatro clases durante una semana. Cada clase contó con dos horas pedagógicas de 45 minutos cada una, con un total de 360 minutos aproximadamente de observación por profesor.

Las clases fueron grabadas en audio y transcritas, acompañadas con un formato de registro de campo, cuya unidad de análisis fueron aquellos segmentos de la clase en los que se identificó una interacción que contemplaba una retroalimentación por parte del profesor (Derry *et al.* 2011).

3.3 Contexto de las clases

En las cuatro clases observadas los profesores trataron contenidos para quinto año de primaria establecidos en el Plan de Estudios de Educación Básica del Ministerio de Educación de Chile, referidos a los ejes temáticos de geometría, datos y probabilidades, medición, números y operaciones. El detalle de los contenidos específicos abordados en cada clase se observa en la tabla II.

Tabla II. Contenidos tratados en las clases observadas

Profesor	Contenidos			
	Clase 1	**Clase 2**	**Clase 3**	**Clase 4**
P1	Cálculo de áreas.	Cálculo de áreas Medición de longitud y transformación de unidades de longitud.	Estadística: lectura e interpretación de gráficos (de barras y circulares).	Estadística: lectura e interpretación de tablas.
P2	Representación de cuadriláteros.	Transformaciones isométricas. Coordenadas.	Transformaciones isométricas. Coordenadas.	Transformaciones isométricas. Coordenadas.
P3	Concepto de fracción Suma de fracciones.	Suma de fracciones.	Resta de fracciones.	Multiplicación de fracciones.

Fuente: elaboración propia.

3.4 Análisis de los datos

Utilizando la tipología de Tunstall y Gipps (retroalimentaciones descriptivas y evaluativas), el marco estructural de la praxeología de Chevallard (tareas, técnicas, tecnología y teoría) y los efectos didácticos de Brousseau (Topaze, Jourdain, deslizamiento cognitivo y uso abusivo de la analogía), se aplicó la estrategia de análisis de contenido mediante categorías deductivas (Mayring, 2000), para las transcripciones de observaciones de las cuatro clases de cada profesor. Dos investigadores fueron, en un primer momento, analizando de forma independiente, seleccionando fragmentos y estableciendo códigos en las transcripciones de las observaciones de clases. Tanto los análisis sobre la estructura praxeológica como los efectos didácticos, consideraron el contexto y objetivo de enseñanza. Terminados los análisis por cada investigador, en un segundo momento, se reunieron ambos para revisar las codificaciones asignadas, y en aquellas en que existían diferencias, se analizaron nuevamente para llegar a un consenso.

4. RESULTADOS

4.1 Retroalimentaciones según la tipología de Tunstall y Gipps

Se puede señalar que P1 realiza mayor cantidad de retroalimentaciones del tipo A1, Premiar, (N=16) y de Aprobar, B1, (N=12), Castigar, A2, (N=5) y Desaprobar, B2, (N=6), con un total de 39 retroalimentaciones evaluativas. P3 cuenta con 10 retroalimentaciones evaluativas de Premiar, A1, (N=2) y Aprobar, B1, (N=8). Las de tipo Castigar, A2, tienen menos presencia en los tres profesores. Sobre las descriptivas, en las clases de P2 (N=35), se observan mayoritariamente las referidas a Especificar el logro, C1, (N=16), mientras que en P3, las descriptivas están bastante ausentes (N=4). Ninguno de los tres profesores presenta retroalimentaciones del tipo Construir el camino hacia el futuro, D2, como se aprecia en la tabla III.

Tabla III. Tipos de retroalimentación

Prof.	Retroalimentación Evaluativa					Retroalimentación Descriptiva				
	A1	A2	B1	B2	Total	C1	C2	D1	D2	Total
P1	16	5	12	6	39	8	4	4	0	16
P2	3	1	10	2	16	16	11	8	0	35
P3	2	2	8	2	14	2	1	1	0	4

Fuente: elaboración propia.

Algunos ejemplos de retroalimentaciones realizadas por P1, P2 y P3 se muestran en la tabla IV.

Tabla IV. Ejemplos de retroalimentaciones de acuerdo a la tipología de Tunstall y Gipps

<table>
<tr><th colspan="2">Evaluativas</th><th colspan="2">Descriptivas</th></tr>
<tr><th>A1</th><th>B1</th><th>C1</th><th>D1</th></tr>
<tr><th>Recompensar</th><th>Aprobar</th><th>Especificar lo logrado</th><th>Construir aprendizajes</th></tr>
<tr><td>P1: “Siete coma cinco centímetros. Vayan colocándose ticket si lo tienen bueno, si lo tienen malo lo corrigen…”</td><td>P3: “Por ejemplo, en esta fracción el tres es el numerador ¿Y el cinco qué es?
A: ¡Denominador!
¡Muy bien!</td><td>P1: ¡Se dan cuenta que, primero, tenemos que mirar las columnas para saber de qué se trata y, luego, ir relacionando las filas! Ahora, primera pregunta. ¿Esa tabla qué representa?
A: La cantidad de computadores que hay en el hogar.
P1: Ya, muy bien. La cantidad de computadores que hay en cada hogar.</td><td rowspan="4">P2“¿Cuáles son las dificultades que hemos enfrentado al realizar el trabajo con traslaciones en el plano? ¿Cómo las hemos resuelto?”
A: “No empezar del vértice negrito.”
P2: No empezar del vértice señalado. ¿Cómo resolvemos esa dificultad?
A: “Lo debemos resolver, primero, observando todos los vértices que se mostraban, y después, con las preguntas que nos hacía Ud. nos dábamos cuenta cuando usted nos planteaba preguntas que nos hacían pensar y podíamos aprender que se comenzaba por el punto en negrito.
P2: ¡Muy bien! Y ¿De qué manera desarrollamos nuestro pensamiento
geométrico?”</td></tr>
<tr><th>A2</th><th>B2</th><th>C2</th></tr>
<tr><th>Castigar</th><th>Desaprobar</th><th>Especificar lo que hay mejorar</th></tr>
<tr><td>P3: “Chiquillos, ahora voy a explicar la sustracción de fracciones… ¿Alguien sabe cómo hacerlo?
A: “No sé tía. (Realiza ruido molesto).”
P3:”¡Ándate a la sala de Integración!”.</td><td>P2: ¿Qué saben de los planos cartesianos?
A: “Que son planos”.
P2: “Eso no es, parece que no entendió nada”</td><td>P2: “¿Qué fue lo que hiciste?”
A: “Marqué primero en 9 y luego en 2, obteniendo el resultado de N.”
P2; “Veamos. Lo primero que tengo que mirar es el eje de posición X, el que dice 2. y, luego, el eje de posición Y, que dice 9. Tú, miraste al revés, es decir, marcaste como eje y el valor del eje x y como x el valor del eje y, sin embargo, el procedimiento era contrario. Recuerda cautelar eso, siempre se comienza por eje de la X o abscisas y, posteriormente, por la Y u ordenadas.”</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

4.2 Retroalimentaciones asociadas a la estructura praxeológica

P1 concentra 30 retroalimentaciones entre las cuatro clases: 13 centradas en la técnica, con 43 % del total; en tecnología registra 10, es decir 33 %; en tarea alcanza 4, representando 13 %; y en teoría se observaron tres, correspondiendo al 10 %. A partir de estos datos se puede inferir que para P1 fue relevante retroalimentar enfatizando la comprensión de la técnica. Además, dio importancia a establecer relaciones argumentales que dan sentido a la técnica (tecnología).

En P2 se registraron 64 retroalimentaciones en las cuatro clases. Se observaron 26 sobre la teoría, representando 41 %; 14 enfocadas en la tecnología, con 22 %; 12 centradas en la tarea con 19 % y 12 en la técnica con 19 %. Llama la atención que P2 da mayor importancia a las retroalimentaciones asociadas a saberes del conocimiento matemático de las clases (63 % entre teoría y tecnología), y es el profesor que más moviliza conocimientos teóricos matemáticos en relación a los otros dos profesores. Además, no deja de lado las relacionadas con la tarea y la técnica, con 38 %.

En P3 se observaron 13 retroalimentaciones entre las cuatro clases: nueve relacionadas a la técnica, 69 %; dos se asociaron a elementos de la "teoría", 16 %; una a elementos sobre la tarea, 8 %; y una a elementos sobre la tecnología, 8 %. Se puede señalar que prioriza el trabajo de la técnica muy por encima de la "teoría", tecnología y la tarea. Cabe señalar que es el profesor que menos retroalimentaciones realizó en comparación a los otros.

Todo lo anterior se sintetiza en la tabla V.

Tabla V. Retroalimentación asociada a estructura praxeológica

	Retroalimentación Estructura Praxeológica				
Profesor	**Tarea**	**Técnica**	**Tecnología**	**Teoría**	**Total**
P1	4	13	10	3	30
P2	12	12	14	26	64
P3	1	9	1	2	13

Fuente: elaboración propia.

En la tabla VI se ejemplifican extractos de retroalimentaciones asociadas a la estructura praxeológica realizadas por los profesores en las clases de matemáticas.

Tabla VI. Extractos de retroalimentaciones asociadas a praxeologías de los tres profesores observados

Tipos de retroalimentación	Extractos	Análisis
Tarea	*P1: ¿Se dan cuenta que, primero, tenemos que mirar las columnas para saber de qué se trata y, luego, ir relacionando las filas? Ahora, primera pregunta. ¿Esa tabla qué representa, Sebastián?* *Alumno: La cantidad de computadores que hay en el hogar.* *P1: Ya, muy bien. La cantidad de computadores que hay en cada hogar. Bien. También, podemos verlo como una pregunta, ¿Cuál sería esta pregunta?* *Alumno: ¿Cuántos computadores hay en cada hogar?* *P1: Bien.* *(P1, C4)*	Frente a la tarea de interpretación de datos en una tabla, la retroalimentación de P1 toma forma de pregunta, incentivando la reflexión de los estudiantes sobre la tabla como contenido central de este momento. Focaliza la atención sobre la comprensión de la tabla y sus datos ("¿qué representa?") y reafirma la respuesta ("ya, muy bien"). Sobre esta base, la segunda intervención provocaría la definición del problema en forma de una pregunta que contiene el problema matemático ("podemos verlo como una pregunta, ¿Cuál sería esta pregunta?").
Técnica	*P3: (Anota en la pizarra) ¿Cómo empiezo?* *Alumno: ¡Multiplico uno por cuatro!* *P3: ¿Después qué hago?* *Alumno: Le sumamos dos por tres.* *P3: ¿Qué más?* *Alumno: Multiplicamos los denominadores y listo.* *P3: ¡Muy bien, así se hace!* *(P3, C3).*	Frente a la tarea de sumar fracciones con denominadores distintos, P3 orienta el diálogo con el alumno poniendo foco en la descripción de un procedimiento conocido. Inicia con una pregunta ("¿Cómo empiezo?"), continuando con el paso a paso ("¿Después qué hago?", "¿Qué más?").

Tecnología	*P2: ¿Qué tendríamos que hacer para poder realizar un cuadrado, de lado cuatro cuadraditos, con los dos vértices con los que contamos?* *Alumno: Tenemos que hacer más vértices.* *P2: ¿Tengo que tener cuántos vértices para que sea un cuadrado?* *Alumno: ¡Cuatro!* *P2: Bien, entonces, tenemos que tener cuatro vértices ¿Qué podemos hacer?* *Alumno: Tiene que poner las coordenadas.* *P2: Bien, venga, Francisca, a hacerlo en la pizarra.* *Alumno: (Comienza a contar los cuadrados en la pizarra) En el (7,1), aquí, se encuentra un vértice, y, en el (3,1) se encuentra el otro vértice.* *P2: ¡Muy bien, Francisca! Perfecto ahí logramos armar un cuadrado, ¿Verdad?* *Alumno: ¡Sí!* *P2: Sí, perfecto.* *(P2, C4)*	Frente a la tarea de construir un cuadrado, se observa en esta retroalimentación, que P2 inicia con preguntas que permiten al estudiante utilizar propiedades del cuadrado para su construcción, estas son: todos los lados tienen igual medida, y los ángulos interiores miden 90°. En este contexto P2 pregunta parcialmente por la tecnología que justifica la técnica ("¿Qué tendríamos que hacer para poder realizar un cuadrado, de lado cuatro cuadraditos, con los dos vértices con los que contamos?", "Bien, entonces, tenemos que tener cuatro vértices ¿Qué podemos hacer?"). Al enfocarse menos en la razón de ser, pudo haber nutrido su retroalimentación, con preguntas como: "¿por qué los puntos deben compartir la abscisa o la ordenada?" apelando a que eso permitiría que los ángulos sean rectos. Y/o "¿por qué la distancia entre los puntos debe ser la misma?" interpelando a que la medida de los lados debe ser la misma.
Teoría	*P2: Entonces, ¿Qué es una traslación en el plano cartesiano?* *Alumno: Mover un punto.* *P2: ¡Muy bien, mover un punto! ¿Qué más se puede decir, Aylin?* *Alumno: Que se desplaza.* *P2: Ya. ¿Qué más, Paloma?* *Alumno: Cuando se traslada no se pierde el tamaño ni la forma.* *P2: ¡Sí! ¡No pierde el tamaño ni la forma!* *(P2, C4)*	En este diálogo, P2 incita a través de sus preguntas la descripción, evocación y enunciación de propiedades del objeto que es estudiado, en este caso, la traslación. Utiliza nociones matemáticas como: punto, tamaño y forma y/o representaciones metafóricas de estas, como: mover, desplazar y perder.

Fuente: elaboración propia.

4.3 Retroalimentaciones con efecto didáctico

El análisis de la tabla VII permite caracterizar los efectos didácticos. En las retroalimentaciones de P1 se identificaron 36 efectos didácticos: 42 % de Abuso de Analogía (N=15); 25 % de Deslizamiento Metacognitivo (N=9); 19 % efectos Topaze (N=7); 14 % de efectos Jourdain (N=5). En este caso, se podría decir que en ocasiones P1 desviaba sus retroalimentaciones perdiendo probablemente el foco central de la clase (abuso de la analogía y deslizamiento metacognitivo). Es el profesor con mayor cantidad de efectos didácticos.

P2 presenta únicamente retroalimentaciones con efecto Topaze (100%) entre todas sus clases, con una frecuencia poco significativa (N=5). Es el profesor con menos efectos didácticos de los tres.

En P3 se identificaron 17 efectos didácticos en sus retroalimentaciones durante sus clases: 47 % de efectos Topaze (N=8); 18 % de efectos Jourdain (N=3); 18 % de "Deslizamientos Metacognitivos" (N=3); y 18 % en "Abuso de la Analogía" (N=3). Sus retroalimentaciones tienen efectos en todas las categorías teniendo una baja frecuencia de tres en cada categoría, siendo más elevado el efecto Topaze.

Tabla VII. Retroalimentación con Efecto Didáctico

	Retroalimentación con Efecto Didáctico				
Profesor	**Jourdain**	**Topaze**	**Deslizamiento Metacognitivo**	**Abuso Analogía**	**Total**
P1	5	7	9	15	36
P2	0	5	0	0	5
P3	3	8	3	3	17

Fuente: elaboración propia.

En la tabla VIII se ejemplifican extractos de las clases donde se presentaron efectos didácticos.

Tabla VIII. Ejemplo de efectos didácticos identificados en las retroalimentaciones

Tipos de Retroalimentación	Extractos	Análisis
Efecto Jourdain	*P1: Muy bien Benjamín, seis por ocho es cuarenta y ocho. (Anota en la pizarra* $\frac{6}{7}-\frac{4}{8}=\frac{48-}{56}$*). ¿Cuántas veces cabe el ocho en el cincuenta y seis?* *Alumno: Siete veces tía.* *P1: ¿Cómo lo supo tan rápido?* *Alumno: Porque siete por ocho u ocho por siete es cincuenta y seis, tía.* *P1: ¡Muy bien! Porque el orden de los factores no altera el producto. Siete por ocho u ocho por siete da el mismo producto o resultado. ¡Excelente razonamiento!* *(P1, C4)*	En el ejemplo, la tarea es calcular la resta de dos fracciones con distinto denominador. Primero, fue calculado el numerador de la fracción equivalente del minuendo (48). P1 escribe 56 (denominador común), e interroga al alumno ("¿Cuántas veces cabe el ocho en el cincuenta y seis?", "Siete veces", "¿Cómo lo supo tan rápido?"). Frente a la respuesta "Porque siete por ocho u ocho por siete es cincuenta y seis" P1 señala "¡Muy bien! Porque el orden de los factores no altera el producto. Siete por ocho u ocho por siete da el mismo producto o resultado. ¡Excelente razonamiento!". En este caso, P1 amplía la respuesta del estudiante con su propio discurso ("Porque el orden de los factores no altera el producto") y parece asumir que el estudiante comprende el significado de lo que está diciendo (factores, conmutatividad, orden, producto, alteración) y atribuye este razonamiento al estudiante al felicitarlo ("Excelente razonamiento").
Efecto Topaze	*P1: No, vamos de nuevo con la idea. Están preguntando, en este caso, ¿Qué números toma la variable cantidad de computadores? De acuerdo. Nos están pidiendo señalar la cantidad de computadores que había por hogar. ¿Cuántos computadores hay en el hogar?* *Alumno 13: Cero, uno, dos y tres.* *P1: Ya, esos son los valores que pueden tomar. Entonces, ¿Qué números toma la variable cantidad de computadores, Gerardo?* *Alumno 2: Cero, uno, dos y tres.* *P1: ¡Muy bien!* *(P1, C4).*	P1 y los estudiantes se encuentran analizando los datos para completar una tabla. La pregunta: "¿Qué números toma la 'variable cantidad de computadores'?", es explicada y simplificada por P1 haciéndola más sencilla ("Nos están pidiendo señalar la cantidad de computadores que había por hogar. ¿Cuántos computadores hay en cada hogar?"). Sobre la respuesta producida ("Cero, uno, dos y tres"), establece que esos son "los valores que pueden tomar". Retoma la pregunta original haciendo evidente cual es la respuesta esperada: "Entonces, ¿Qué números toma la variable cantidad de computadores, Gerardo?", y el estudiante responde aludiendo a la respuesta de su compañero ("Cero, uno, dos y tres"). Y P1 valida esta respuesta "¡Muy bien!".

Deslizamiento Metacognitivo	*P1: ... ¿Cómo trabajamos el área del rombo?* *Alumno 11: Tenemos que dividir ¿El alto por el largo? Y, después, bueno, teníamos que ver el triángulo con el rectángulo.* *P1: No, vamos a ordenar las ideas. Ayer, teníamos una figura que era así (Muestra un romboide).* *Alumno 11: El romboide.* *P1: Bien, romboide. ¿Qué características tiene un romboide, Franco?* *Alumno 16: Todos sus lados son paralelos.* *P1: ¿Podría explicarnos cuáles son los lados paralelos, por favor? Salga a la pizarra y dibuja un romboide, por favor. Márcalos con una línea.* *(El estudiante marca las líneas paralelas entre sí).* *P1: Bien, muchas gracias.* *P1: Ya, entonces, ayer, trabajamos este que está acá. Ahora sí, Benjamín, ¿Cómo lo haces para calcular el área del romboide?* *(P1, C1)*	En el ejemplo, P1 busca que los alumnos evoquen la fórmula para calcular el área del rombo. Ante la respuesta de un alumno, P1 toma el ejemplo del romboide, visto en la clase anterior. Con sus preguntas apunta a la descripción de las cualidades del romboide, finalizando por la pregunta: '¿Cómo se calcula el área del romboide?'. Se podría pensar que usará la fórmula de cálculo del romboide para aplicarlo al rombo, pero las fórmulas son diferentes. Para calcular el área del rombo se multiplican las diagonales, y se divide por dos, mientras que el área del romboide se calcula multiplicando la altura por la base. Con este giro se podría decir que se aleja del estudio del área del rombo y lo invisibiliza, reemplazándolo por el estudio del romboide.
Abuso Analogía	*(En la pizarra se observa 5/6 : 4/3 =* *P3 traza una línea al costado derecho del ejercicio)* *P3: ¡Número tres al margen! Se invierte la segunda fracción.(anota ⅚ x / Dibuja la barra fraccionaria).* *Alumno: ¿Qué significa invertir?* *P3: Que se da vuelta. ¡Número cuatro al margen! Se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador. (anota ⅚ x ¾ =)* *Alumno: Tía, no entendí el número cuatro.* *P3: Se multiplica el de arriba con el de arriba y el de abajo con el de abajo.* *Alumno: ¡Ah!* *(P3, C4)*	P3 trabaja la técnica para resolver un ejercicio en el que se debe dividir dos fracciones. Para resolverlo se multiplica la fracción del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. Durante esta clase, ya han resuelto otros ejercicios. P3 responde al estudiante utilizando la metáfora "invertir" y "dar vuelta" para referirse a que las cifras que están en el numerador y en el denominador, cambian de posición ("arriba" y "abajo"). Describe la técnica de multiplicación de fracciones señalando: "se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador", invisibilizando el argumento (tecnología) que sustenta la presencia del inverso multiplicativo del divisor. Ante el comentario del estudiante ("no entendí el número cuatro"), evita la explicación y busca otra manera de explicar lo que hace ("Se multiplica el de arriba con el de arriba y el de abajo con el de abajo"). P3 mantiene en los siguientes ejercicios el mismo discurso.

Fuente: elaboración propia.

4.4 Contribución en la construcción de conocimientos matemáticos

A continuación, se presentan ejemplos de las retroalimentaciones otorgadas por los tres profesores en estudio a los estudiantes en las clases de matemáticas.

PROFESOR 1

Como se observó en las tablas III y VII el profesor 1 (P1), otorga mayor cantidad de retroalimentaciones evaluativas (N=39) y con más efectos didácticos (N=36), lo que limitaría la construcción de significados matemáticos en los estudiantes. En la figura 1 se presenta un ejemplo de una actividad sobre cálculo de área, correspondiente a la primera clase observada en el curso de 5° básico.

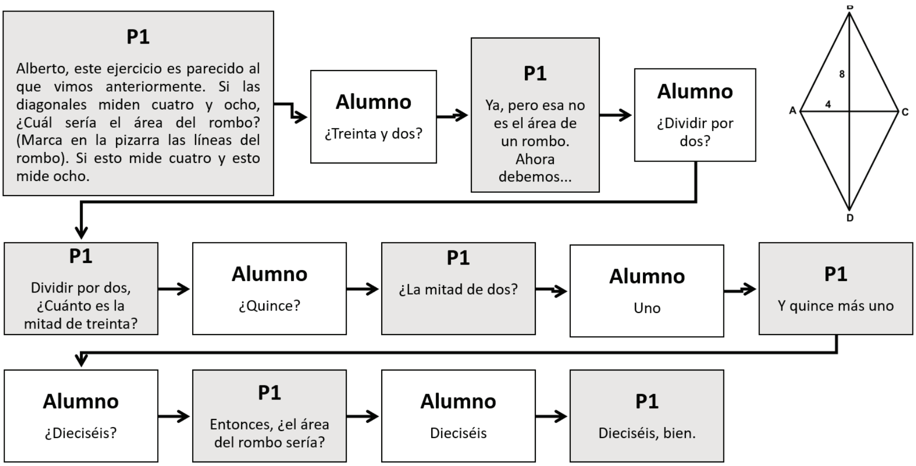


Figura 1. Ejemplo de Retroalimentación de P1. Elaboración propia.

En el ejemplo, se evidencia que el estudiante no tiene seguridad sobre sus conocimientos, especialmente sobre la selección de la técnica que tendría que aplicar para responder a la pregunta "¿Cuál sería el área del rombo"? El estudiante "tantea" a P1 con sus primeras respuestas ("¿Treinta y dos?", "¿Dividir por dos?", "¿Quince?") esperando retroalimentaciones que le permitan encontrar la respuesta solicitada. Se observa que P1 no aborda la construcción de la técnica junto al estudiante (multiplicación de diagonales y división del producto por dos). En vez de ello cambia el problema, limita la acción del estudiante y banaliza la tarea reduciendo la situación a resolver divisiones y sumas que él le propone hasta llegar a un resultado que permita responder a la pregunta inicial ("¿cuánto es la mitad de treinta?", "¿la mitad de dos?", "¿Y quince más uno", "Entonces, ¿el área del rombo sería?"). En la retroalimentación final ("Dieciséis, bien"), P1 aprueba y valida la respuesta, retroalimentación evaluativa del tipo (B1 y efecto Topaze, ya que el profesor rebaja las condiciones de exigencia al estudiante quien termina por resolver el problema sin desarrollar un razonamiento elaborado por sí mismo. Finalmente, al no contar con una técnica, el estudiante carece de referentes para entender el sentido de las divisiones, de cómo ellas aportan a la resolución y cómo finalmente podría obtener el resultado.

PROFESOR 2

El profesor 2 (P2) brinda la mayor cantidad de retroalimentaciones descriptivas (N=27) del tipo especificar lo logrado y especificar lo que se debe mejorar (ver tabla III). Se observa una vinculación de elementos conceptuales para argumentar las técnicas empleadas, contribuyendo al desarrollo de una actividad matemática más genuina en los estudiantes (Chevallard, 1991; Castela, 2008; Castela y Romo-Vazquez, 2011). En la figura 2, se presenta un ejemplo de una actividad matemática sobre representación de cuadriláteros, técnica de traslación: "(...) trasladar cada vértice, dos cuadraditos hacia la derecha y cinco cuadraditos hacia arriba", correspondiente a la primera clase observada en el curso de 5° básico.

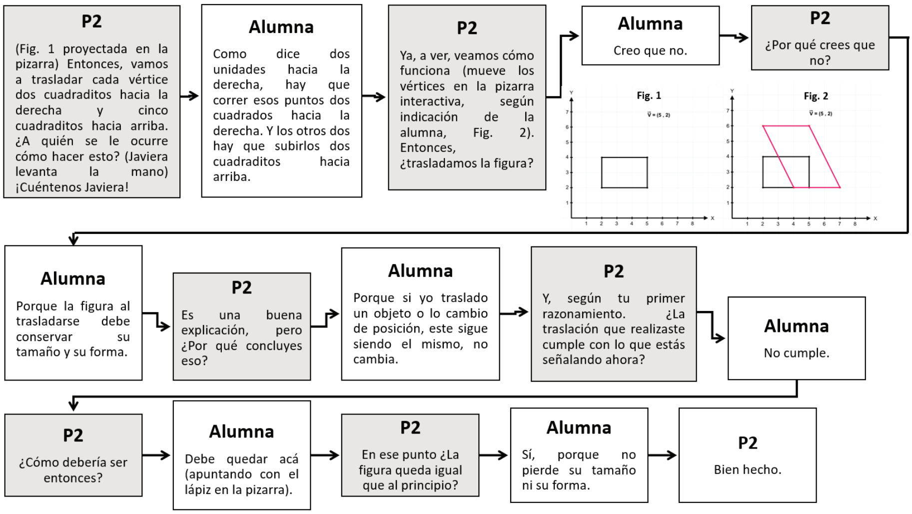


Figura 2. Ejemplo de retroalimentación de P2. Elaboración propia.

La retroalimentación de P2 gira en torno al resultado obtenido al implementar la propuesta de la alumna en la pizarra interactiva ("hay que correr esos puntos dos cuadrados hacia la derecha y los otros dos hay que subirlos dos cuadraditos hacia arriba"). P2 hace que el estudiante confronte su propuesta con el resultado obtenido ("Entonces, ¿trasladamos la figura?"), y nutre la reflexión del estudiante con preguntas que orientan la reflexión del estudiante ("¿Por qué crees que no?", "Es una buena explicación, pero ¿Por qué concluyes eso"?, "¿La traslación que realizaste cumple con lo que estás señalando ahora?", ¿Cómo debería ser entonces?", "En ese punto ¿queda igual que al principio?"). La aprobación final ("bien hecho") tipo B1 cierra una retroalimentación en la que P2 orienta la construcción del aprendizaje del estudiante, quien respondiendo a sus preguntas da cuenta de elementos de saber desde la tecnología ("si yo traslado un objeto o lo cambio de posición, este sigue siendo el mismo, no cambia").

PROFESOR 3

El profesor 3 (P3), brinda en sus clases menor cantidad de retroalimentaciones descriptivas (ver tabla III). Se detecta, además, que varios ejercicios son abordados sin existir previamente un comentario o discusión sobre la tarea matemática que deberán realizar, dificultando el grado de involucramiento y compromiso del estudiante con su proceso de aprendizaje. En la figura 3 esto se ejemplifica con una actividad matemática sobre suma de fracciones con distinto denominador, correspondiente a la segunda clase observada.

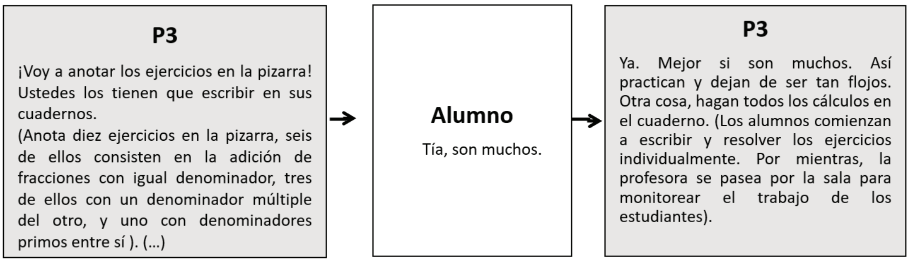


Figura 3. Elaboración propia.

De la misma manera, en las retroalimentaciones de P3 se observó en la cuarta clase que se privilegiaba la descripción del mecanismo de la técnica aplicada, sin desarrollar argumentos en el estudiante que le permitieran comprender el porqué de su uso, como se observa en el ejemplo de la figura 4 en el ejercicio de multiplicación de fracciones.

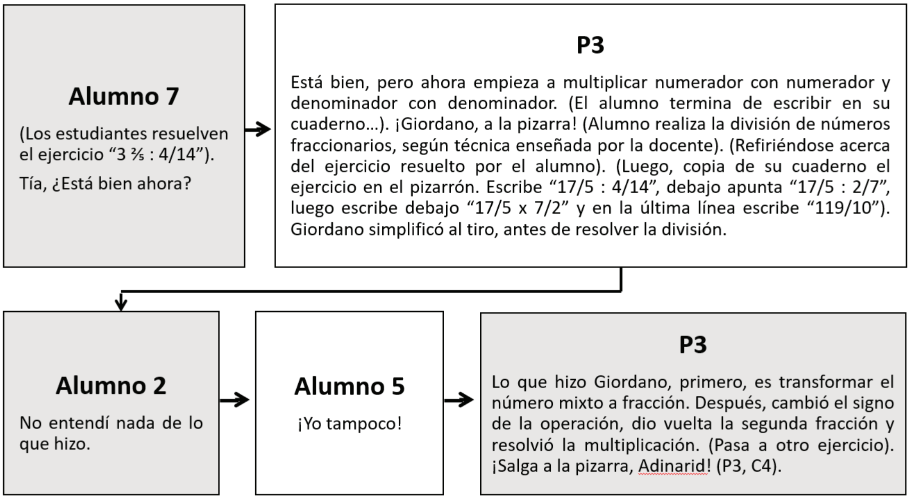


Figura 4. Elaboración propia.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

P1, de colegio particular privado, con nueve años de experiencia docente, no cuenta con cursos de actualización en didáctica de las matemáticas. Sus retroalimentaciones son más bien evaluativas que descriptivas, con énfasis en la aprobación o desaprobación de las tareas y acciones realizadas por los estudiantes, lo que no fomentaría procesos metacognitivos (Anijovich, 2010; Nicol yMacfarlane-Dick, 2006; Sadler, 2010; Wiggins, 2012). Enfatiza la comprensión de la técnica y al establecimiento de relaciones argumentales sobre las razones de la técnica empleada para resolver una tarea. También se observó especialmente el abuso de analogía y deslizamientos metacognitivos, probablemente desviando y afectando el foco central de la clase.

P2, de colegio particular subvencionado, cinco años de experiencia, cuenta con cursos de actualización. Sus prácticas son más bien descriptivas, vinculadas mayormente a argumentos basados en conocimiento (tecnología y teoría), sin desatender el trabajo de la tarea y la técnica. Además, se constató un bajo número de efectos didácticos, correspondiendo solamente a efectos Topaze. Se destaca que estas características podrían asociarse a la formación de este profesor. Su formación inicial es más reciente, y posiblemente más actualizada que los otros profesores.

P3 de una escuela municipal, con 14 años de experiencia docente, no cuenta con cursos de actualización en didáctica de las matemáticas. Sus retroalimentaciones son mayormente de tipo evaluativa, con énfasis en la aplicación y/o descripción de técnicas, con escasa incorporación de elementos teóricos. Además, se identificaron efectos didácticos mayormente de tipo Topaze, y una baja frecuencia en todas las categorías.

Estos resultados sugieren que una formación docente inicial actualizada sumada a cursos en didáctica de las matemáticas, contribuye a una buena práctica retroalimentadora y que los años de experiencia por sí solos no parecen ser suficientes para desplegar una retroalimentación efectiva.

La estructura praxeológica contribuyó a especificar mejor el análisis, observándose tres perfiles. P1 centró sus retroalimentaciones sobre la aplicación de técnicas y la argumentación de ellas. P2 brindó un robusto cuerpo de retroalimentaciones asociadas a conocimientos, sin desmerecer el trabajo sobre las tareas y aplicación de técnicas. Y, P3 centró sus retroalimentaciones sobre la aplicación de técnicas.

En relación a los efectos didácticos (Brousseau, 1998; Chavarría, 2006; Olfos *et al.*, 2014; Silva, 2012) los tres profesores presentaron principalmente efectos Topaze (P1, P2 y P3), abuso de analogías (P1 y P3) y deslizamientos metacognitivos (P1 y P3). Este tipo de efectos didácticos:

- disminuirían las condiciones de análisis y reflexión sobre las decisiones que toman los estudiantes al seleccionar técnicas sin llegar a fundamentarlas en elementos conceptuales, como el efecto Topaze;
- detendrían las explicaciones sobre analogías sin volver a retomar los conceptos matemáticos de base para terminar de construir sus significados;
- desviarían la reflexión hacia otras nociones, sin abordar directa y explícitamente los elementos matemáticos esenciales que requieren ser entendidos para completar una tarea matemática (deslizamiento metacognitivo).

A la luz de estos análisis, postulamos que la gestión de diferentes tipos de retroalimentación podría tener un efecto en la forma en que los estudiantes construyen significados de conocimientos matemáticos, al dejarlos inconclusos o incluso desviando los verdaderos significados. Esto nos invita a revisar, por una parte, la formación inicial de profesores en cuanto a las creencias sobre el aprendizaje y la evaluación en matemáticas (Nortvedt *et al.* 2016) y, por otra, el desempeño profesional en cuanto al nivel y profundidad de las prácticas de retroalimentación.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2019). Resultados Educativos 2019, https://archivos.agenciaeducacion.cl/PPT_Nacional_Resultados_educativos_2019.pdf

Anijovich, R. (2010). La retroalimentación en la evaluación. En R. Anijovich (Ed.), *La evaluación significativa* (pp. 129-149). Paidós.

Arzola-Franco, D. (2017). Evaluación, pruebas estandarizadas y procesos formativos: experiencias en escuelas secundarias del norte de México. *Educación*, *26*(50), 28-46. https://doi.org/1018800/educacion.201701.002.

Barahona, P., Veres Ferrer, E., y Barahona Droguett, M. (2018). Factores asociados a la calidad de la educación en Chile. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales. 14*(1),17-30. https://doi.org/10.18004/riics.2018.julio.017-030.

Bizarro Flores, W. H., Paucar Miranda, P. J., y Chambi Mescco, E. (2021). Evaluación formativa: una revisión sistemática de estudios en aula. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *5*(19), 872–891. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v5i19.244

Black, P., y Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice*, *5*(1), 7-73. https://doi.org/10.1080/0969595980050102

Brookhart, S. M. (2007). Expanding views about formative classroom assessment: A review of the literature. En J. McMillan (Ed.). *Formative classroom assessment: Theory into practice* (pp. 29-42). Teachers College.

Brookhart, S. y Ruiz-Primo, M. (2018). *Using feedback to improve learning*. Routledge.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensé sauvage.

Camacho, A. (2010). Utilización de un Modelo Praxeológico para el Desarrollo de Organizaciones Didácticas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet. 10*(2), 1-16. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=607972922002

Canabal, C. y Mangalef, L. (2017). La retroalimentación: la clave para una evaluación orientada al aprendizaje. *Profesorado, 21*(2), 149-170. https://revistaseug.ugr.es/index.php/profesorado/article/view/10329

Castela, C. y Romo-Vazquez, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. R*echerches en Didactique des Mathématiques*, *31*(1), 79-130. https://revue-rdm.com/2011/des-mathematiques-a-l-automatique/

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignores par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *28*(2), 135-182. https://revue-rdm.com/2008/travailler-avec-travailler-sur-la/

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *1*(2), 1-10. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6885/6571

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Aique.

Contreras-Pérez, G. y Zúñiga-González, C. (2017). Concepciones de profesores sobre retroalimentación:una revision de la literatura. *Magis, 9*(19), 69-90. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m9-19.cpsr

Derry, S., Pea, R., Barron, B., Engle, R., Erickson, F., Goldman, R., Hall, R., Koschmann, T., Lemke, J., Sherin, M., y Sherin, B. (2011). Conducting video research in the learning sciences: Guidance on selection, analysis, technology, and ethics. *The journal of the learning sciences*, *19*, 3-53. https://doi.org/10.1080/10508400903452884

Flick, U. (2015). *El diseño de investigación cualitativa.* Morata.

Godino, J. (2023). Diálogo entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática sobre las nociones de juicio de valor, praxeología y paradigma didáctico. *Educación Matemática. 35*(1), 229-254. https://doi.org/10.24844/EM3501.09

Hattie, J., y Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81-112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Joya, S. (2016). *El contrato didáctico y las prácticas comunicativas en el aula de matemáticas. Magíster en Educación.* Universidad Distrial Francisco José de Caldas. Colmbia.

Maxwell, J. A. (2005). *Qualitative research design: An interactive approach.* SAGE.

Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Fórum qualitative social research, 1*, 2-20. http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/1089/2385%3E

McMillan, J. H. (2007). Formative classroom assessment: The key to improving student achievement. En J. McMillan (Ed.). *Formative classroom assessment: Theory into practice* (pp. 1-28). Teachers College.

Ministerio de Educación de Chile (2009). Evaluación para el Aprendizaje: Educación Básica Segundo Ciclo. Unidad de Currículum y Evaluación. http://www.dfpd.edu.uy/cerp/cerp_norte/informacion/2016stem/evaluación%20para%20el%20aprendizaje.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2013). *Matemática. Programa de Estudio para Quinto Año Básico, Unidad de Currículum y Evaluación*. https://basica.mineduc.cl/matematica-5-6-basico/

Ministerio de Educación. de Chile (2019). *Orientaciones para la implementación del Decreto 67/2018 de evaluación, calificación y promoción.* https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-89350_archivo_01.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2021). *Estándares de Desempeño Docente.* 2021a. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/Categoria-p/pedagogias/

Muñoz, M. (2020). Análisis de las prácticas declaradas de retroalimentación en Matemáticas, en el contexto de la evaluación, por docentes chilenos. *Perspectiva Educacional, 59*(2), 111-135. https://doi.org/10.4151/07189729-vol.59-iss.2-art.1062

Nicol, D. J., y Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, *31*(2), 199-218. https://doi.org/10.1080/03075070600572090

Nortvedt, G. A., Santos, L.,y Pinto, J. (2016). Assessment for learning in Norway and Portugal: The case of primary school mathematics teaching. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, *23*(3), 377–395. https://doi.org/10.1080/0969594X.2015.1108900

Novoa, R. (2023). *Retroalimentación efectiva y su impacto en la mejora del aprendizaje en estudiantes de Educación Básica. Implicancias en el desarrollo del proceso educativo.* [Título Profesional de la Universidad del Desarrollo]. Repositorio Académico de la Universidad del Desarrollo. https://repositorio.udd.cl/bitstreams/d7eb7c20-cdfe-44c4-88ac-3918fffa8ea9/download

O'Donovan, B., den Outer, B., Price, M., y Lloyd, A. (2019). What makes good feedback good? *Studies in Higher Education*. https://doi.org/10.1080/03075079.2019.1630812

Olfos, R., Guzmán, I. y Estrella, S. (2014). Gestión Didáctica en Clases y su Relación con las Decisiones del Profesor: el caso del Teorema de Pitágoras en séptimo grado. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 341-359. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a17

Osorio, K., y López, A. (2014). La retroalimentación formativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje de estudiantes en edad preescolar. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, *7*(1), 13-30. https://doi.org/10.15366/riee2014.7.1.001

Perrenoud, P. (2008). *La evaluación de los alumnos. De la producción de la excelencia a la regulación de los aprendizajes. Entre dos lógicas.* Colihue.

Ramaprasad, A. (1983). On the definition of feedback. *Behavioral Science*, *28*(1), 4-13. https://doi.org/10.1002/bs.3830280103

Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional assessment. *Instructional Science, 18,* 119-144. https://doi.org/10.1007/BF00117714

Sadler, D. R. (2010). Beyond feedback: developing student capability in complex appraisal. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *35*(5), 535-550. https://doi.org/10.1080/02602930903541015

Shute, V. J., Hansen, E. G., y Almond, R. G. (2007). An assessment for learning system called ACED: Designing for learning effectiveness and accessibility. *ETS Research Report Series*, (2), i-45 . https://doi.org/10.1002/j.2333-8504.2007.tb02068x

Silva, L. (2012). Fenómenos de la didáctica de la matemática en docentes de matemática del Decanato de Administración y Contaduría de la UCLA. *Gestión y gerencia*, *6*(2), 108-126. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5303713

Stacey, K. y Wiliam, D. (2013). Technology and assessment in mathematics Education. En A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F. K. S. Leung (Eds.) *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 721-751). Springer.

Talanquer, V. (2015). La importancia de la evaluación formativa. *Educación Química, 26*(3), 177-179. https://doi.org/10.1016/j.eq.2015.05.001

Tunstall, P. y Gipps, C. (1996). Teacher feedback to young children in formative assessment: a tipology, *British educational Journal, 22*(4), 389-404. https://doi.org/10.1080/0141192960220402

Valdés, R. (2015). Los problemas aritméticos de enunciado verbal, según Luria y Tsvetkova, al finalizar primer ciclo de enseñanza básica en escuelas municipales de la comuna de Talca. *Perspectiva Educacional*, *54*(2), 92-108. https://doi.org/10.4151/07189729

Van der Kleij, F., Adie, L. y Cumming, J. (2019). A meta-review of the student role in feedback. *International Journal of Educational Research, 98,* 303-323. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.09.005

Wiggins, G. (2012). Seven Keys to Effective Feedback. *Educational leadership*, (70) 10-16. http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/sept12/vol70/num01/Seven-Keys-to-Effective-Feedback.aspx

Wiliam, D. (2011). What is assessment for learning? *Studies in Educational Evaluation 37*, 3–14. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2011.03.001

Winstone, N., Boud, D., Dawson, Ph. y Heron, M. (2022) From feedback-as-information to feedback-as-process: a linguistic analysis of the feedback literature, *Assessment & Evaluation in Higher Education, 47*(2) 13-230. https://doi.org/10.1080/02602938.2021.1902467

Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de los profesores de matemáticas: el conocimiento de un profesor secundario de números racionales. *Investigación en educación matemática*, *24*(3), 301-321. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1525422

Zavaleta, A. y Dolores, C. (2021). Evaluación para el aprendizaje en matemáticas: el caso de la retroalimentación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *107*, 9-34. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/107/Articulos_01.pdf

Autora de contacto

María Verónica Leiva Guerrero

Dirección: Av. El Bosque 1290, Santa Inés, Viña del Mar, Chile. Código postal 2520000
veronica.leiva@pucv.cl

 https://doi.org/10.24844/EM3703.03

Aprendizagem da grandeza massa: Uma abordagem exploratória

Learning about the mass magnitude: An exploratory approach

Marta Teixeira,[1] Maria de Lurdes Serrazina,[2] João Pedro da Ponte[3]

Resumo: Este artigo tem como objetivo conhecer a aprendizagem da grandeza massa feita por alunos do 4.º ano de escolaridade, através da resolução de um conjunto de tarefas exploratórias, que constituem uma sequência de tarefas. Estas tarefas são parte de uma sequência integrada num estudo mais alargado, que inclui uma experiência de ensino realizada no 4.º ano. O estudo segue uma abordagem qualitativa-interpretativa como investigação baseada em *design*. Os dados foram recolhidos por observação participante e compreenderam gravações vídeo, registos fotográficos, produções dos alunos e notas de campo. A análise de dados baseia-se na análise de conteúdo dos momentos de discussão coletiva. São analisadas as resoluções dos alunos e as ações do professor e da investigadora na condução daquele momento. Os resultados mostram a evolução do conhecimento conceptual e processual dos alunos sobre a grandeza massa e sua medida, bem como a capacidade de resolução de problemas envolvendo este conceito. As ações do professor e da investigadora contribuíram para esta aprendizagem.

Fecha de recepción: 25 de julio de 2024. **Fecha de aceptación:** 10 de junio de 2025.

[1] UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, martateixeira@edu.ulisboa.pt, https://orcid.org/0009-0003-2271-6405.

[2] Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, lurdess@eselx.ipl.pt, https://orcid.org/0000-0003-3781-8108.

[3] UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt, https://orcid.org/0000-0001-6203-7616.

Palavras-chave: grandeza massa, processo de medição, resolução de problemas, tarefas exploratórias, aprendizagem.

Abstract: This article aims to know the learning about mass magnitude undertaken by grade 4 students, through the completion of a series of exploratory tasks that form a sequence of activities. These tasks are part of a sequence integrated into a broader study, which includes a teaching experiment carried out at this grade. The study follows a qualitative-interpretative approach as design-based research. Data was collected through participant observation and comprised video recordings, photographic records, student productions, and field notes. Data analysis is based on content analysis of whole class discussion moments. The students' strategies and the actions of the teacher and the researcher in guiding those moments are analyzed. The results show the evolution of students' conceptual and procedural knowledge about mass and its measurement as well as the problem-solving abilities involving this concept. The actions of the teacher and the researcher contributed to this learning.

Keywords: *mass magnitude, measurement process, problem-solving, exploratory tasks, learning.*

1. INTRODUÇÃO

No início da escolaridade, os alunos têm já algumas noções básicas sobre diferentes temas incluídos no currículo, em particular sobre Medida, adquiridos em contextos informais. A aprendizagem baseada nos conhecimentos intuitivos e nas experiências informais dos alunos com medição, facilita a compreensão dos atributos mensuráveis e o significado de medir (NCTM, 2007). Para MacDonald e Lowrie (2011), estes conhecimentos devem constituir a base da aprendizagem, mas, como são muitas vezes limitados e fragmentados, podem, em algumas situações, conduzir os alunos ao erro. Trata-se de conhecimentos genuínos, para Nunes e Bryant (1996), no sentido em que compreendem algumas relações envolvidas no conceito. Importa referir que, nos anos iniciais, a medição desempenha um papel fundamental em Matemática e em outras áreas curriculares, possibilitando o envolvimento dos alunos em atividades práticas que atribuem significado e aplicação ao trabalho realizado com os números, prosseguindo o desenvolvimento do conceito e da competência no processo de medição nos anos posteriores (Smith III y Barrett, 2017).

O presente estudo foi efetuado com alunos do 4.º ano de escolaridade, cuja turma enfrentou dois confinamentos por causa da Covid-19, motivo pelo qual o trabalho já realizado sobre a grandeza massa tinha sido apenas uma introdução ao conceito e às unidades de medida. O processo de medir foi trabalhado nesta experiência. A compreensão e desenvolvimento deste processo, implica que os alunos manuseiem materiais, façam comparações físicas e utilizem instrumentos de medida adequados. Sem essas experiências práticas é difícil uma compreensão sólida e aprofundada do processo (NCTM, 2007). Assim, este artigo tem por objetivo conhecer a aprendizagem da grandeza massa feita por alunos do 4.º ano, através da resolução de um conjunto de tarefas exploratórias que constituem uma sequência de tarefas.

2. QUADRO TEÓRICO: MASSA E PROCESSO DE MEDIÇÃO

A grandeza massa é frequentemente confundida com a grandeza peso, apesar de serem grandezas diferentes (McDonough *et al.*, 2013). A massa é uma grandeza escalar que representa a quantidade de matéria de um objeto, sendo usualmente medida em quilogramas e unidades derivadas, e mantém-se constante em qualquer local da Terra (Ponte y Serrazina, 2000). O peso é uma grandeza vetorial que representa a força de atração gravítica exercida sobre um objeto, sendo medida usualmente em newtons ou quilogramas-força, e varia de acordo com o lugar em que se encontra (Ponte y Serrazina, 2000). Breda *et al.* (2011) explicam que esta confusão é devida ao uso do termo "peso" para descrever tanto a massa como a força gravitacional, e ao uso de balanças como instrumento de medida de ambas as grandezas. É importante mencionar ainda que este estudo foi realizado com alunos do 4.º ano, onde esta distinção não é clara e, normalmente, os dois termos são usados como sinónimos, mas referindo-se à quantidade de matéria do objeto.

Vários autores referem que o ensino da medida é muitas vezes focado apenas no conhecimento processual (e.g., Smith III y Barrett, 2017). Contudo, a aprendizagem da medida envolve o uso e a compreensão de procedimentos, mas também a compreensão dos conceitos (Mwale y Jakobsen, 2022). Diversos estudos têm sido realizados sobre o desenvolvimento conceptual dos alunos na medição das grandezas comprimento e área, mas poucos têm abordado a grandeza massa, o que torna relevante os resultados de estudos sobre medição em geral (Cheeseman *et al.*, 2014; Mwale y Jakobsen, 2022).

Kamii (1995) considera que a construção da base conceptual ocorre através da exploração de objetos concretos e da realização de estimativas. Bragg e Outhred (2004) e Solomon *et al.* (2015) revelam que um número considerável de alunos, competentes no processo de medir, mostram dificuldades no conhecimento conceptual deste processo. Piaget *et al.* (1960) indicam três fases no processo de desenvolvimento do conceito de medida: 1) comparação percetiva direta entre dois objetos, através do olhar ou de algumas partes do corpo; 2) deslocamento dos objetos, aproximando-os para facilitar a comparação ou recorrendo a partes do corpo; e 3) utilização da propriedade transitiva, que envolve a conservação da grandeza ou da quantidade da grandeza, surgindo assim a noção de unidade. Para Ponte e Serrazina (2000) constituem aspetos básicos da medida: 1) comparação direta; 2) ordenação ou seriação; 3) comparação indireta; 4) transitividade; e 5) conservação. Para estes autores, a comparação direta é uma das primeiras atividades que apoia os alunos na compreensão da medição de atributos específicos de objetos, e pode ser concretizada através dos sentidos ou por deslocação de um dos objetos, levando à ordenação ou seriação de dois ou mais objetos. A comparação indireta envolve a comparação de dois objetos, ou acontecimentos, que não se podem justapor fisicamente e requer o domínio da propriedade transitiva. As atividades de comparação direta e indireta são essenciais, porque permitem que os alunos se concentrem nos atributos mensuráveis dos objetos e nos processos básicos de medição, sem necessidade de trabalhar com números ou unidades (Passelaigue y Munier, 2015; Ponte y Serrazina, 2000). Van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2005) apontam três etapas no desenvolvimento do conceito de medida: 1) comparação e ordenação; 2) utilização de uma unidade de medida, natural ou padronizada; e 3) utilização de um instrumento de medida.

No processo de medição da massa, a comparação indireta é de grande importância. Breda *et al.* (2011) e Cheeseman *et al.* (2011) consideram que, nos primeiros anos, os alunos devem experienciar situações que envolvam comparação e ordenação de objetos quanto à massa, pois proporcionam o desenvolvimento intuitivo da grandeza (Breda *et al.*, 2011). No processo de desenvolvimento do conceito de massa, MacDonald (2010) apresenta quatro ideias construídas pelos alunos, tendo por base os seus conhecimentos prévios e as suas experiências, que é necessário desconstruir: 1) se é possível pegar num objeto é porque ele é leve; 2) quanto maior o objeto, mais pesado é, confundindo massa e volume; 3) se dentro de um objeto couberem outros objetos, é porque esse objeto é pesado, ideia relacionada com a anterior; 4) se um objeto flutua é porque é leve, confundindo densidade com massa.

Para McDonough *et al.* (2013), as ideias fundamentais da medida da massa incluem: 1) comparação, em conjunto com a conservação e o raciocínio transitivo; e 2) unidade, em conjunto com a quantificação e o uso de escalas.

A idade e a ordem pela qual estes conceitos devem ser trabalhados têm vindo a ser discutidas na literatura (Passelaigue y Munier, 2015; Sarama y Clements, 2009). Muitos investigadores concordam que a conservação é essencial para a conceção completa de medição (Stephan y Clements, 2003). Piaget *et al.* (1960) argumentam que a transitividade é impossível se os alunos não desenvolverem previamente a conservação. Outros autores consideram que os alunos devem raciocinar transitivamente para compreenderem a medição (e.g., Kamii y Clark, 1997). Embora os investigadores concordem que a conservação é essencial para um entendimento completo de medição, vários estudos indicam que os alunos não precisam necessariamente de desenvolver a transitividade e a conservação antes de aprenderem algumas ideias sobre medição (Stephan y Clements, 2003). Pelo seu lado, Sarama e Clements (2009), assim como MacDonald (2011) indicam que os aspetos aqui apresentados são a base da compreensão da medição e devem ser considerados na aprendizagem da medida de qualquer grandeza. Assim, os alunos devem desenvolvê-los de modo a obterem uma compreensão sólida sobre o processo de medição, independentemente da ordem pela qual são desenvolvidos, permitindo uma aprendizagem significativa sobre este processo.

Para o NCTM (2007), o processo de medição de qualquer grandeza é semelhante e compreende: 1) selecionar uma unidade de medida (u.m); 2) comparar a u.m. com a grandeza a medir; e 3) determinar o número de u.m. necessárias. Este número pode ser obtido pela iteração da u.m. e a contagem do número de iterações, ou por meio de um instrumento de medida (Smith III y Barrett, 2017). Apesar do processo inicial de medir envolver o uso de unidades discretas e materiais manipuláveis e se considerar que os alunos devem passar progressivamente das u.m. não padronizadas para as u.m. padronizadas e para o uso de instrumentos de medida (NCTM, 2007; Smith III y Barrett, 2017), os estudos de Cheeseman *et al.* (2014) indicam que é possível uma transição mais rápida dos alunos para o uso da u.m. padrão e dos respetivos instrumentos de medida, no que se refere à medição da massa. McDonough *et al.* (2013) referem que a medição da massa pode envolver operações mentais complexas, mas se forem proporcionadas experiências de aprendizagem ricas e adequadas, os alunos são capazes de pensar de forma construtiva sobre essas complexidades.

Segundo Cheeseman *et al.* (2014), é importante proporcionar aos alunos oportunidades de se envolverem em contextos interessantes e estimulantes, resolvendo tarefas relacionadas com as suas vivências e com um potencial matemático rico. Consideram ainda que os alunos devem ter experiências práticas envolvendo situações de medição da massa, opinião também partilhada pelo NCTM (2007), que acrescenta a diversidade de experiências informais antes do uso dos instrumentos de medida. A este respeito, Breda *et al.* (2011) consideram o uso de balanças essencial no desenvolvimento do processo de medição. Numa fase inicial, as balanças de dois pratos permitem a comparação de um objeto com outro de referência (comparação direta) ou com os próprios pesos da balança (correspondendo a massas marcadas) que funcionam como u.m. (comparação indireta). Posteriormente, a utilização de outras balanças, como as de cozinha ou de quarto, pode ser enriquecedor para os alunos, na medida em que permitem trabalhar com diferentes u.m., nomeadamente, gramas e quilogramas. Estes autores acrescentam, ainda, que os alunos devem ter contacto com diferentes escalas, seja através da leitura dos valores indicados pelos ponteiros ou da resolução de problemas com diferentes representações de escalas.

O ensino exploratório na aula de Matemática

No ensino exploratório, os alunos assumem um papel central e ativo na construção do seu próprio conhecimento (Ponte, 2005). Esta construção ocorre a partir do trabalho com tarefas para as quais, à partida, os alunos não dispõem de estratégias de resolução imediata, constituindo assim oportunidades privilegiadas para a compreensão e aprofundamento de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas (Ponte, 2017). Neste contexto, assumem especial relevância tarefas de exploração, investigação, projetos e problemas (Ponte, 2005), por proporcionarem ambientes de aprendizagem ricos e desafiantes que promovem a participação ativa dos alunos e favorecem a construção significativa do conhecimento.

Uma aula de ensino exploratório organiza-se, habitualmente, em três fases: 1) apresentação da tarefa; 2) realização da tarefa; e 3) discussão coletiva dos resultados e síntese final das aprendizagens (Stein *et al.*, 2008). Na primeira fase, o professor apresenta a tarefa à turma, assegurando que todos os alunos compreendem o que lhes é proposto. Define também as formas de trabalho no decorrer da aula. A segunda fase corresponde ao trabalho autónomo. Nesta fase, o professor circula pela sala, apoiando os alunos, esclarecendo questões e promovendo o envolvimento produtivo de todos na realização da tarefa. As suas intervenções devem ser ponderadas, de modo a não reduzir o grau de complexidade da tarefa (Stein *et al.*, 2008), nem uniformizar as estratégias de resolução, assegurando, assim, que a discussão coletiva seja produtiva. É ainda nesta fase que o professor, a partir da observação que faz do trabalho dos alunos, seleciona as estratégias que considera relevantes colocar à discussão e estabelece a sequência adequada para a sua apresentação (Stein *et al.*, 2008). A terceira fase centra-se na discussão coletiva destas estratégias, constituindo um momento privilegiado de reflexão, negociação de significados e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005). Os alunos são convidados a explicar e justificar as suas estratégias, são explorados erros ou dificuldades sentidas e situações de desacordo, transformando-os em oportunidades de aprendizagem. O professor desempenha o papel de moderador da discussão, gerindo a sequência de intervenções e orientando o seu conteúdo (Ponte, 2005), de modo a assegurar a qualidade matemática das intervenções, promover a relação entre as ideias discutidas e incentivar a construção de conexões matemáticas. A aula termina com a síntese final das aprendizagens, realizada com a participação dos alunos, onde são sistematizados os conhecimentos desenvolvidos, ajudando os alunos a compreenderem e registarem as ideias trabalhadas e o modo como se articulam com os conhecimentos anteriores (Ponte *et al.*, 2012).

A preparação de uma aula de natureza exploratória inicia-se com a seleção criteriosa da tarefa a realizar que, tendo em conta o propósito matemático, deve ser rica e suscetível de gerar momentos de reflexão e discussão em grande grupo (Ponte, 2005). Após esta seleção, o professor procede à antecipação de possíveis estratégias de resolução dos alunos, prevendo também dificuldades que possam surgir e formas adequadas de agir. Com este trabalho, prepara-se para responder a perguntas que surjam e para decidir sobre a forma de estruturar as apresentações e gerir as discussões.

Em sala de aula, o professor leciona a aula com base na sua planificação, tendo sempre em conta o grau de complexidade da tarefa e a variedade de estratégias dos alunos. Compete-lhe gerir o tempo, bem como as interações e intervenções dos alunos, promovendo um ambiente de aprendizagem estimulante e desafiante, que favoreça discussões coletivas ricas e orientadas para a construção de conhecimento, contribuindo de forma efetiva para o desenvolvimento da aprendizagem (Canavarro, 2011; Stein *et al.*, 2008). Como referem Stein *et al.* (2008), o ensino exploratório é uma prática complexa e que muitos professores consideram desafiante. Contudo, tem grande potencial para promover uma aprendizagem mais profunda, autónoma e significativa, estimulando o pensamento matemático e o envolvimento dos alunos na aprendizagem.

3. METODOLOGIA

Os episódios apresentados neste artigo decorrem da realização de tarefas exploratórias (Canavarro, 2011) em sala de aula e fazem parte de uma sequência integrada num estudo mais amplo, o qual incluiu uma experiência de ensino, efetuada numa escola pública do distrito de Lisboa, Portugal, numa turma de 4.º ano com 18 alunos (com 9 e 10 anos). O estudo segue uma abordagem qualitativa, com paradigma interpretativo (Bogdan y Biklen, 1994), na modalidade de investigação baseada em *design* (Mendes *et al.*, 2016). A recolha de dados foi realizada através de observação participante e teve por base registos vídeos e fotográficos, produções dos alunos e notas de campo, para posterior análise retrospetiva aprofundada. A análise de dados fundamentou-se na análise de conteúdo das intervenções nos momentos de discussão coletiva. São também analisadas as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, assim como as ações do professor e da investigadora (primeira autora) nos momentos de discussão coletiva, como contributo à construção do conhecimento. A análise destas ações teve por base o modelo de Ponte *et al.* (2013) de análise das ações do professor na condução das discussões coletivas e que inclui: 1) convidar, iniciando a discussão coletiva, na qual o professor incentiva a participação dos alunos na partilha das suas estratégias, envolvendo-os na discussão; 2) apoiar/guiar, conduzindo os alunos na apresentação da informação; 3) informar/sugerir, dando informação ou validando respostas dos alunos; e 4) desafiar, incentivando os alunos a avançarem no conhecimento; e ainda o quadro de indicadores de Araman *et al.* (2019), com pequenas adaptações.

De acordo com a metodologia apresentada, o estudo foi desenvolvido em três fases: 1) preparação da experiência de ensino; 2) realização em sala de aula; e 3) análise retrospetiva. Na fase da preparação, realizada em colaboração com o professor da turma e tendo como foco o tema Medida, foram analisados documentos curriculares portugueses, nomeadamente as *Aprendizagens Essenciais* (Canavarro *et al.*, 2021; ME, 2018), e propostas curriculares internacionais (e.g., NSW, 2017). Procedeu-se ainda à análise do quadro teórico referente a grandezas e medida. Posteriormente, foi formulada uma conjetura, orientadora da experiência de ensino, que considera que os alunos desenvolvem a compreensão de grandeza, assim como do respetivo processo de medição, através de cinco níveis de desenvolvimento: 1) identificação do atributo a medir; 2) medição informal: comparação de dois objetos; 3) medição informal: iteração da u.m.; 4) medição com u.m. padronizadas; e 5) relação entre as u.m. padronizadas. Tendo por base esta conjetura, foi definida uma trajetória hipotética de aprendizagem para a grandeza massa. Todo este trabalho foi realizado pela investigadora, com o suporte dos outros autores. Tendo em conta a trajetória definida, em colaboração com o professor da turma, foi construída e planificada uma sequência de tarefas exploratórias, desafiantes e articuladas entre si, de modo a estabelecerem um percurso de aprendizagem coerente (Ponte, 2005). A construção das tarefas foi realizada pela investigadora, que depois as discutiu com o professor, fazendo-se a sua adequação à turma. Na fase de realização em sala de aula, todas as tarefas propostas foram acompanhadas pela investigadora, como observadora participante, e as aulas foram orientadas pelo professor. As intervenções da investigadora no desenrolar da discussão coletiva foram acordadas com o professor, por este, embora sendo um profissional experiente, não estar confortável com o ensino exploratório. A partir da reflexão conjunta, realizada no final de cada aula, a sequência de tarefas inicialmente definida era revista por ambos, analisando-se a necessidade de reajustamentos.

Dado o professor ter iniciado, anteriormente, o estudo da grandeza massa e trabalhado as u.m. padronizadas fora do âmbito desta experiência, demos continuidade a esse estudo, trabalhando o processo de medição, percorrendo todos os níveis de desenvolvimento previstos na conjetura. Assim, comparámos massas de objetos; medimos massas usando balanças de pratos e balanças digitais; resolvemos problemas envolvendo a comparação de massas com recurso a balanças de pratos; e desenvolvemos dois projetos (apresentamos apenas um, por limitações de espaço). Algumas tarefas e os projetos respeitavam a mais do que um nível de desenvolvimento. Optámos por não propor tarefas específicas para desenvolver o nível 1 (identificação do atributo a medir), dado o trabalho já iniciado pelo professor e por este nível estar presente em todas as tarefas, uma vez que os alunos tinham de identificar o atributo para as poderem resolver. Contudo, acordámos que a tarefa 1 poderia confirmar se os alunos já tinham atingido os objetivos deste nível e, consequentemente, prosseguirem na aprendizagem. As tarefas foram apresentadas aos alunos tendo em conta o seu grau de complexidade, pretendendo-se ainda que percorressem os vários níveis de desenvolvimento.

Foi também nossa intenção envolver os alunos em situações de aprendizagens ricas (Ponte, 2005), que contribuíssem para o desenvolvimento da aprendizagem da grandeza, nomeadamente a compreensão conceptual do processo de medição e a sua aplicação em contextos reais.

4. RESULTADOS

Para todas as tarefas realizadas, a forma de organização da aula foi a mesma. O professor começou por distribuir, a cada grupo, o material necessário à sua realização, nomeadamente o enunciado e o material físico a usar na sua concretização. Deu algum tempo para que os alunos lessem e se apropriassem da tarefa e esclareceu eventuais dúvidas. Estabeleceu ainda um tempo limite para o trabalho autónomo. Terminado este tempo, seguiu-se a discussão coletiva. De seguida, apresentamos as tarefas e alguns episódios de momentos de discussão coletiva. Os nomes apresentados são fictícios de modo a preservar o anonimato.

Tarefa 1: "Comparação de massas / o grama"

Esta tarefa foi concebida para trabalhar alguns objetivos dos níveis 2 (medição informal: comparação de 2 objetos) e 3 (medição informal: iteração da u.m.) da conjetura. Foi possível trabalhar a comparação direta, nomeadamente comparar massas de objetos utilizando uma balança de pratos, identificar objetos com a mesma massa e mostrar que objetos diferentes podem ter a mesma massa, consolidando assim o conceito de massa.

Duarte relatou a descoberta do seu grupo, após o convite do professor, relativamente à comparação da massa de diferentes objetos:

Duarte: Nós [...] usámos o frasco de vidro em comparação à caixa de clipes.

Professor: O que é que concluíram?

Duarte: Que o frasco de vidro é mais pesado.

[...]

Investigadora: Se o frasco é mais pesado... o que é que significa ser mais pesado?

Alunos: Tem mais massa.

Já o relato de Martinho, apresentou objetos diferentes.

> Martinho: A cola [grande] é mais pesada do que o frasco de vidro.
>
> [...]
>
> Professor: O que é que podemos concluir?
>
> Martinho: Que a cola tem mais massa do que o frasco de vidro.

Nestes excertos é percetível que os alunos associam o significado de *ser mais pesado* a *ter maior quantidade de massa*, embora Duarte apresente uma linguagem menos formal na sua justificação. As intervenções da investigadora e do professor apoiam/guiam os alunos na clarificação das suas respostas, de modo a tirarem conclusões.

Relativamente à identificação de objetos com a mesma massa, após o convite do professor, Martinho apresentou a descoberta do seu grupo:

> Martinho: Os clipes e a vela [juntos] têm a mesma massa que o frasco.

A descoberta relatada por Martinho foi obtida pela comparação objetos-objeto. Outros grupos usaram a comparação objeto-objeto. Nestes casos trata-se de comparação direta.

Para responder à questão "Como sabemos que os objetos têm a mesma massa?", o grupo de Martinho faz referência à comparação de objetos (figura 1), mas não aprofunda este significado.

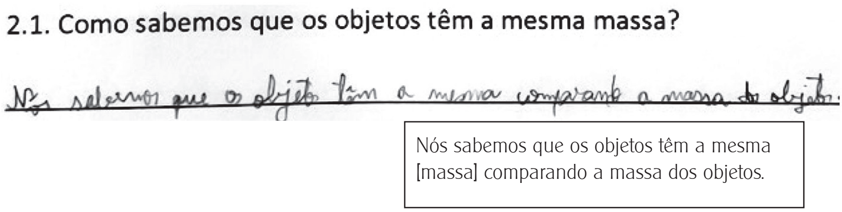
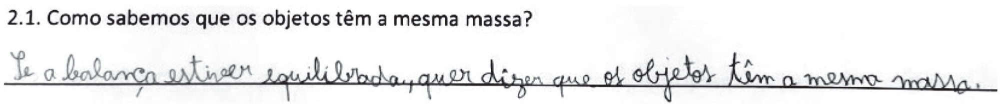


Figura 1. Resposta do grupo de Martinho.

Por sua vez, a resposta do grupo de Carlos (figura 2), evidencia compreensão na leitura e interpretação da balança de pratos.


2.1. Como sabemos que os objetos têm a mesma massa?

Se a balança estiver equilibrada, quer dizer que os objetos têm a mesma massa.

Se a balança estiver equilibrada quer dizer que os objetos têm a mesma massa.

Figura 2. Resposta do grupo de Carlos.

Como a tarefa foi subdivida, foi ainda possível trabalhar objetivos do nível 4 (medição com u.m. padronizadas) da conjetura, especificamente medir massas com menos de um quilograma (1 kg), usando o grama (g) como u.m., trabalhando assim o processo de medição.

Durante o trabalho autónomo pudemos constatar que os vários grupos mediram as massas dos objetos por tentativa e erro, colocando ou tirando pesos do prato da balança até que os pratos ficassem equilibrados, e adicionando a massa de todos os pesos. Na discussão coletiva discutiu-se o facto de objetos iguais apresentarem massas diferentes:

Investigadora: Porque é que esta diferença se verifica? Porque é que uns [frascos] pesaram 65 gramas, outros 64 e outros 63?

Miguel: As balanças são diferentes.

Investigadora: E embora os frascos sejam iguais...

Santiago: Podem ter massas diferentes.

Com as suas questões, a investigadora desafiou os alunos a apresentarem justificações para a diferença de massas entre frascos iguais. A justificação de Miguel evidencia o facto de o instrumento de medida não ser o mesmo nos vários grupos, embora não refira que o instrumento apresenta sempre um valor aproximado. A investigadora conduziu o pensamento dos alunos para uma nova justificação, levando Santiago a compreender e completar a sua afirmação.

Quanto à massa da caixa de clipes, após convite do professor, Duarte divulgou o valor medido pelo seu grupo:

Duarte: 1 vírgula 2 hectogramas.

Professor: Assim? [registando simbolicamente no quadro]

Duarte: Sim.

Professor: Quantos gramas são?

Duarte: Em gramas... fica... 50.

O valor da medição apresentado por Duarte suscitou dúvidas ao professor que, na ação de apoiar/guiar e de modo a clarificar a resposta do aluno, representou-o numericamente e solicitou a equivalência em gramas, para que o aluno relacionasse as duas u.m. padronizadas. Pela resposta de Duarte, o grupo parece ter confundido a representação decimal (1,2) com a representação fracionária ($\frac{1}{2}$), pelo que a investigadora continuou:

Investigadora: Um hectograma quantos gramas são?

Duarte: 100.

Investigadora: Tu escreveste 1 hectograma e 2...?

Duarte: Não! Era meio hectograma! [...] 50 gramas... porque 1 hectograma são 100 gramas! [...] Não era assim [referindo-se ao registo]. Era 1, traço por baixo do 1 e o 2.

Como se percebe, o grupo pretendia representar *metade* na forma de fração. As intervenções da investigadora e do professor foram fundamentais para que Duarte identificasse o erro. O aluno mostrou ainda conhecimento da relação entre hectograma e grama.

Depois da discussão coletiva, seguiu-se a sistematização das aprendizagens deste dia:

Investigadora: Como é que sabemos que os objetos têm a mesma massa?

Duarte: Quando [...] os pratos da balança ficam equilibrados.

[...]

Ricardo: Temos de medir.

A investigadora guiou/apoiou os alunos para a sistematização do trabalho desenvolvido, focalizando o seu pensamento para um facto importante. A resposta de Duarte aponta para a interpretação do comportamento das balanças. Por sua vez, a resposta de Ricardo mostra evolução, pois o aluno já sugere o trabalho com medidas de massa.

Investigadora:	E outra conclusão?
Rui:	Nem todos os objetos [iguais] medem a mesma massa.
Professor:	Ou seja, a massa de um objeto é um valor...?
Rui:	Aproximado [...] porque as balanças são diferentes.

Na ação de apoiar/guiar, a investigadora e o professor conduziram o pensamento dos alunos para as aprendizagens realizadas. Rui referiu o facto de a medida da massa ser um valor aproximado dependente do instrumento de medida, mas nada foi mencionado sobre o olhar interpretativo do medidor, ou seja, sobre a forma como cada pessoa olha para a posição dos pratos da balança, que pode levar a diferentes leituras.

Todos os grupos conseguiram atingir os objetivos propostos em relação aos níveis de desenvolvimento a que a tarefa se dirigia, nomeadamente, conseguiram fazer comparações diretas, começando a usar uma linguagem mais formal, consolidando assim o conceito de massa, o que nos permitiu avançar nos níveis da conjetura.

Tarefa 2: "Qual a massa?"

Esta tarefa pretendeu trabalhar os objetivos do nível 4 (medição com u.m. padronizadas) usando como u.m. quilograma e grama. Os alunos pegaram no peso de 1 kg para avaliarem esta massa e, de seguida, distribuíram os objetos por três grupos: com massa maior do que 1 kg, com massa igual a 1 kg e com massa menor do que 1 kg. A convite do professor, o grupo de Duarte apresentou a sua distribuição (figura 3) e a respetiva justificação:

Figura 3. Distribuição dos objetos do grupo de Duarte.

Duarte:	Com massa menor do que 1 kg, nós pusemos os sumos [...] Nós achámos que eles [os 2 de 1 litro] eram quase da mesma altura do grande [referindo-se ao sumo de 1,5 litros]. Então, nós achámos que eles tinham... quase a mesma massa que o grande.
Professor:	A vossa distribuição [dos pacotes de sumo] teve a ver com...
Duarte:	Com o tamanho do pacote.

A justificação apresentada por Duarte parece basear-se em conhecimentos e experiências prévias: quanto maior o objeto, mais pesado é, confundindo massa e volume. A intervenção do professor pretendeu clarificar a resposta do aluno.

O grupo de Miguel distribuiu os objetos de forma diferente (figura 4):

Figura 4. Distribuição dos objetos do grupo de Miguel.

Miguel:	Nós quando pegámos no peso... no kg, nós... depois... fomos ver os objetos. [...] Quando pegámos [...] nos sumos, nós achámos que eram iguais.
Professor:	Turma?
Margarida:	O sumo de manga é mais pesado do que os outros... porque tem um litro e meio.
Professor:	E o que é que isso quer dizer?
Margarida:	Que tem massa diferente.
Professor:	Onde é que colocarias o pacote de um litro e meio?
Margarida:	Na massa maior do que 1 kg.

O professor desafiou a turma a refletir sobre a distribuição de Miguel. Margarida não concordou, justificando com a capacidade do pacote de sumo de manga. Como os alunos ainda não tinham trabalhado as medidas de capacidade, Margarida recorreu aos seus conhecimentos informais, quer na leitura da capacidade do pacote, quer na relação entre estas medidas e as medidas de massa. As intervenções do professor, numa ação de apoiar/guiar, pretenderam ajudar Margarida a clarificar as suas ideias.

O grupo de Carlos considerou que os sumos tinham massa inferior a 1 kg. Martinho não concordou e argumentou:

Martinho:	[O grupo] Deveria pôr os 2 sumos de 1 litro em [massa] igual e o de 1,5 litros, em mais do que 1 kg, porque [...] tem meio litro a mais do que os outros.
[...]	
Investigadora:	Achas que o Martinho tem razão? [questionando Carlos]
Carlos:	Sim.
Investigadora:	Porquê?
Carlos:	Porque [...] se tem mais meio litro... tem mais massa... pode ter mais do que 1 kg.

Martinho recorreu também aos seus conhecimentos informais. Para o aluno, os pacotes de sumo de 1 litro deveriam ser colocados em massa igual a 1 kg, relacionando assim estas duas u.m. Acrescentou ainda que o pacote de 1,5 litros "tem meio litro a mais do que os outros" e Carlos concluiu que esse meio litro corresponde a mais massa, logo poderia ser incluído no grupo de objetos com massa superior a 1 kg. As intervenções da investigadora desafiaram Carlos a refletir sobre a afirmação de Martinho e a justificá-la.

Relativamente à distribuição das bolas, os grupos de Duarte (figura 3) e de Miguel (figura 4) consideraram que deveriam estar no conjunto dos objetos com massa superior a 1 kg:

> Duarte: Nós, ao pegarmos na pequena, vimos que era mais pesada do que a grande. [...] Então, se a pequena era mais pesada e tinha massa maior do que um quilo, a grande também ia ter.

> Miguel: Colocámos a bola pequena nos objetos com mais do que 1 kg. Depois pegámos na bola grande e vimos que era mais pesada do que a bola pequena, do que 1 kg.

Estes grupos usaram a comparação direta bola-bola e bola-u.m. e tiraram a sua conclusão por comparação indireta usando a propriedade transitiva.

O grupo de Carlos considerou que a bola pequena apresentava massa igual a 1 kg e a maior, massa superior a 1 kg:

> Carlos: Quando pegámos na bola grande sentimos que era... que tinha mais massa do que 1 kg. Depois, pusemos em maiores do que 1 kg. Depois, pegámos na bola pequena e sentimos que não era tão pesada... como a bola grande... e pusemos na "massa igual a 1 kg".

Embora este grupo tenha distribuído as bolas de forma diferente, também usou a comparação direta bola grande-u.m. e bola-bola e a comparação indireta, usando a propriedade transitiva. A posterior medição da massa destes objetos com a balança digital permitiu que os alunos explorassem a relação entre quilograma e grama.

Todos os grupos atingiram os objetivos propostos, relativamente ao nível de desenvolvimento 4, nomeadamente, conseguiram comparar e medir massas superiores, iguais e inferiores a 1 quilograma e em gramas.

Tarefa 3: "Qual será a ficha falsa?"

Depois de trabalharmos com as balanças de pratos e digitais, propusemos uma situação problemática envolvendo a balança de pratos, voltando assim a trabalhar o nível 2 (medição informal: comparação de 2 objetos). Contudo, não se tratou de uma comparação simples, pois a tarefa envolvia um grau de complexidade maior que o das tarefas anteriores. De um conjunto com cinco fichas, sendo uma falsa e mais pesada do que as outras, e usando apenas duas pesagens, os alunos tinham de descobrir a falsa.

Os alunos revelaram dificuldades na compreensão do problema e na forma de representar a estratégia, por se tratar de uma representação estática, sendo os próprios a decidir que representação usar. Durante o trabalho autónomo pudemos perceber que o pedido do número de pesagens estava a ser um forte obstáculo à resolução e, para que os alunos não desistissem, decidimos pedir para que se concentrassem apenas na descoberta da ficha falsa, independentemente do número de pesagens que necessitassem de fazer.

Duarte apresentou a estratégia de resolução do seu grupo (figura 5).

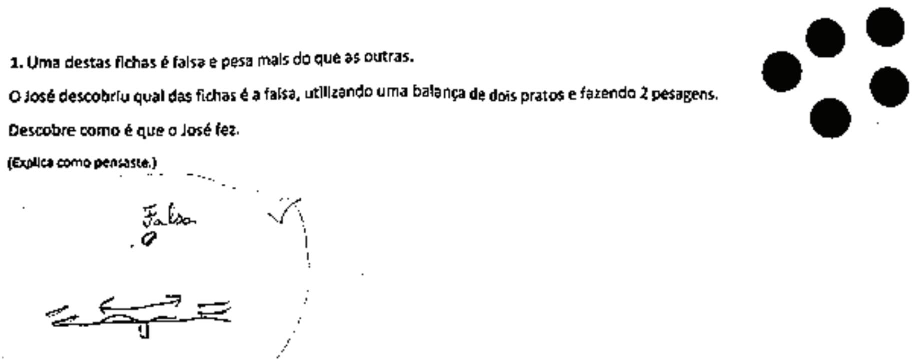


Figura 5. Tarefa 3 – grupo de Duarte.

Duarte: Nós simulámos uma balança com uma borracha e uma caneta [...]. Depois, nós pegámos em 4 fichas e pusemos 2 em cada lado da caneta [apontando]. [...] Nós concluímos que [...] a outra ficha que sobrava era a falsa.

O grupo necessitou de concretizar a situação, como observado no trabalho autónomo. Os alunos usaram quatro fichas, duas em cada “prato da balança”. Esta comparação equilibrou os pratos, pelo que Duarte concluiu que a ficha falsa era a que sobrava. Quando desafiado pelo professor a justificar essa afirmação, Ricardo referiu que, se trocassem essa ficha por outra “esse prato ficava mais pesado”, entendendo-se que desequilibraria a balança, o que mostraria que essa ficha seria a falsa. Com apenas uma pesagem o grupo descobriu a ficha falsa.

A estratégia do grupo de Martinho mostra duas pesagens (figura 6).

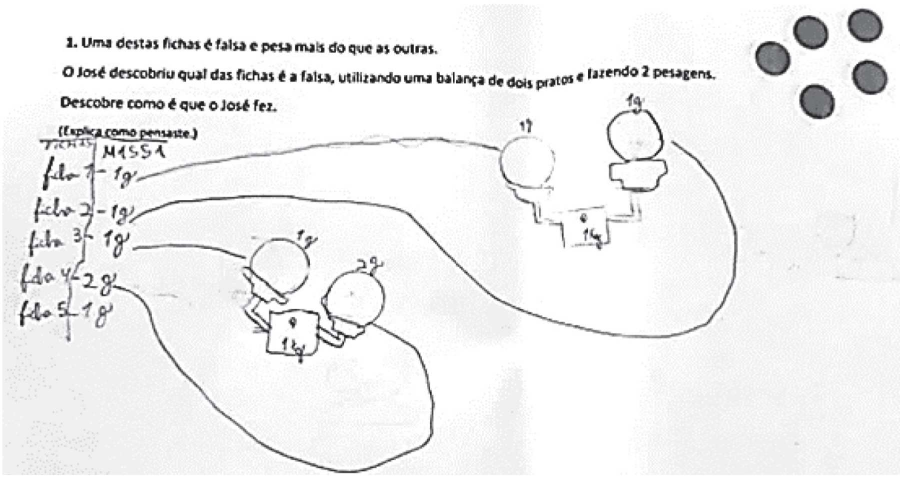


Figura 6. Tarefa 3 – grupo de Martinho.

Martinho: Nós, no início, imaginámos... não sabíamos o peso das fichas... então anotámos aqui [apontando para o registo, na projeção]... e pusemos uma ficha que era mais pesada do que as outras, que era a ficha falsa [ficha 4]. Depois simulámos como é que seria. Aqui [ilustração da direita], nós desenhámos a balança equilibrada com 2 fichas com o mesmo peso [uma em cada prato].

O grupo de Martinho não necessitou de concretizar a situação com material físico, mas precisou de atribuir massa às fichas, talvez como forma de organização. A atribuição de 1 e 2 gramas, demonstra perceção destas massas. A balança a que Martinho se refere como equilibrada, mostra uma ficha em cada prato e por cima de cada uma está registado 1 g, concluindo-se que ambas as fichas apresentam a mesma massa. No entanto, numa situação real, os pratos da balança estariam nivelados, mostrando a situação de equilíbrio, o que não se verifica nesta representação. Martinho continuou:

Martinho: Aqui [apontando para a ilustração da esquerda], a balança não estava equilibrada, porque havia uma ficha mais pesada do que a outra, que era a falsa. Depois as outras fichas eram verdadeiras. Nós não usámos esta ficha [5] [...] porque pensámos... "já encontrámos a falsa, não há mais nenhuma falsa.

Nesta ilustração também está desenhada uma ficha em cada prato da balança, numa está registado 1 g e na outra 2 g. Este registo mostra que se trata de fichas com massas diferentes, o que provoca o desequilíbrio da balança e identifica a ficha falsa, não havendo necessidade de usar a ficha que sobrava (5).

Professor: Grupos?

Rui: Como é que vocês sabiam que a ficha 4 tinha mais massa?

Simão: Nós simulámos como se fosse a ficha mais pesada.

Na sua intervenção, o professor desafiou os grupos a refletirem sobre a estratégia apresentada. A intervenção de Rui sugere que o aluno não compreendeu o propósito da atribuição da massa a cada ficha, o que Simão esclareceu na sua intervenção.

Embora este problema tivesse levantado dificuldades, com a sua simplificação, a maioria dos grupos conseguiu desenvolver um raciocínio mais elaborado, uma vez que tiveram de resolver um problema de nível de complexidade superior ao das tarefas anteriores.

Tarefa 4: Extensão do problema anterior

Esta tarefa também está incluída no nível 2 (medição informal: comparação de 2 objetos). Depois da discussão coletiva do problema anterior, pareceu-nos que as dificuldades relacionadas com a sua compreensão e a representação da estratégia foram ultrapassadas. Decidimos, então, propor uma extensão ao problema aumentando o grau de dificuldade, passando a ser usadas oito fichas, sendo uma falsa, e considerado o número de pesagens.

Como esperado, os grupos não apresentaram dificuldades. Apresentamos de seguida as estratégias usadas com três pesagens.

1) Utilização de quatro fichas na primeira pesagem (figura 7).

Figura 7. Tarefa 4 – 4 fichas e 3 pesagens – grupo de Rui.

Margarida:	Nós pegámos em 4 fichas e pusemos na balança [2 em cada prato].
Rui:	E vimos que a balança ficava equilibrada [apontando para a 1.º balança] [...] E já sabíamos que nenhuma [destas] ficha[s] era a falsa [...] E depois pegámos nas outras 4 fichas [que sobravam] e vimos que estas 2 desceram [apontando para o prato esquerdo da 2.º balança]. Ou seja, já sabíamos que uma destas fichas era a falsa. Depois pegámos nestas 2 e pusemos na balança [3.º balança]. E esta foi para baixo [referindo-se à ficha do prato esquerdo desta balança]. Ou seja, era a falsa.

Como explicado pelos alunos e evidenciado na figura 7, o grupo começou por usar quatro fichas na primeira pesagem, embora não tivesse representado as outras quatro fichas que sobravam. Desta pesagem, concluíram que nenhuma destas fichas seria a falsa, porque os pratos da balança ficaram equilibrados.

Usaram então as outras quatro fichas e com mais duas pesagens conseguiram descobrir a ficha falsa.

2) Utilização de oito fichas na primeira pesagem (figura 8).

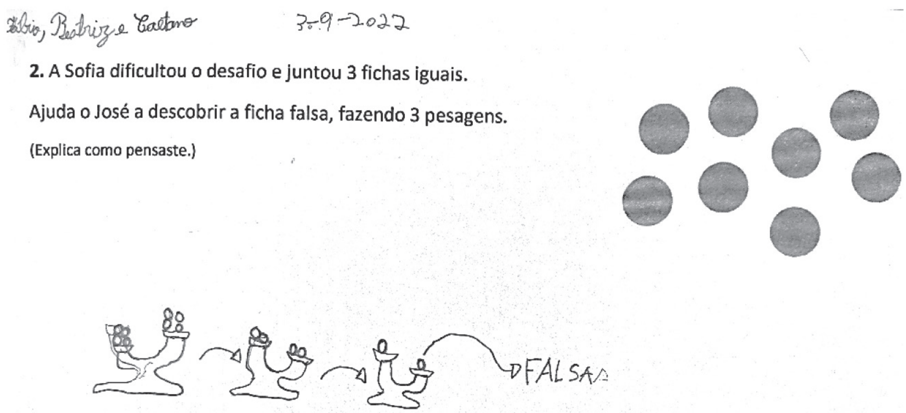


Figura 8. Tarefa 4 – 8 fichas e 3 pesagens – grupo de Carlos

Carlos: Primeiro, pusemos 4 fichas em cada prato. Estas 4 fichas [prato esquerdo da 1.º balança] eram mais pesadas do que estas [prato direito, da mesma balança].

Investigadora: E o que é que isso significa?

Carlos: Que uma destas [apontando para o prato esquerdo] era a ficha falsa.

Ao indicar que o prato mais pesado estava mais para baixo, a investigadora apoiou/guiou Carlos de modo a clarificar o significado da sua afirmação. O aluno justificou pelo facto de conter a ficha falsa, querendo com isso significar que apresentava maior quantidade de massa. Carlos continuou:

Carlos: Depois dividimos estas fichas [prato esquerdo da 1.º balança], pusemos 2 em cada prato [2.º balança]. Depois, estas eram as mais pesadas [prato direito da mesma balança]. Então dividimos estas [referindo-se às mesmas fichas] e pusemos aqui [3.º balança], uma em cada prato. Esta era a mais pesada [prato direito da mesma balança]. Então esta era a falsa.

A partir da segunda balança ilustrada pelo grupo, a estratégia de Carlos foi a usada pelo grupo anterior. O professor desafiou os alunos para a reflexão, comparando as duas estratégias.

Com duas pesagens surgiram três estratégias diferentes.

1) Duas fichas na primeira pesagem (figura 9).

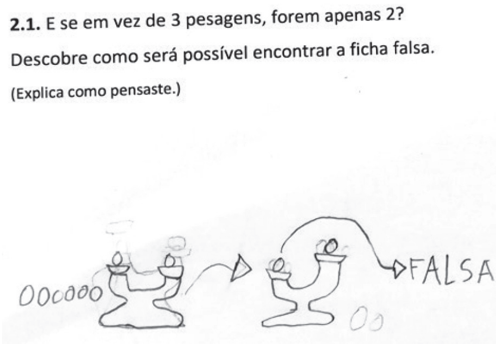


Figura 9. Tarefa 4 – 2 fichas e 2 pesagens – grupo de Carlos

Benedita relatou que o grupo começou por usar duas fichas, uma em cada prato, como podemos verificar na figura 9, na ilustração da esquerda, sobrando seis fichas. Como a balança ficou equilibrada "nenhuma destas fichas era a falsa". De seguida usaram outras duas fichas, das que tinham sobrado, colocando uma em cada prato da balança, como verificamos na ilustração da direita. Benedita referiu que a ficha do prato da esquerda, desta balança, era mais pesada, pelo que o grupo concluiu que se tratava da ficha falsa. Relativamente a esta estratégia, Santiago comentou que o grupo teve sorte ao descobrir a ficha falsa em apenas duas pesagens, porque "só utilizaram quatro fichas e deixaram as outras quatro fichas de fora. E a ficha falsa podia estar nas outras quatro fichas".

2) Quatro fichas na primeira pesagem (figura 10).

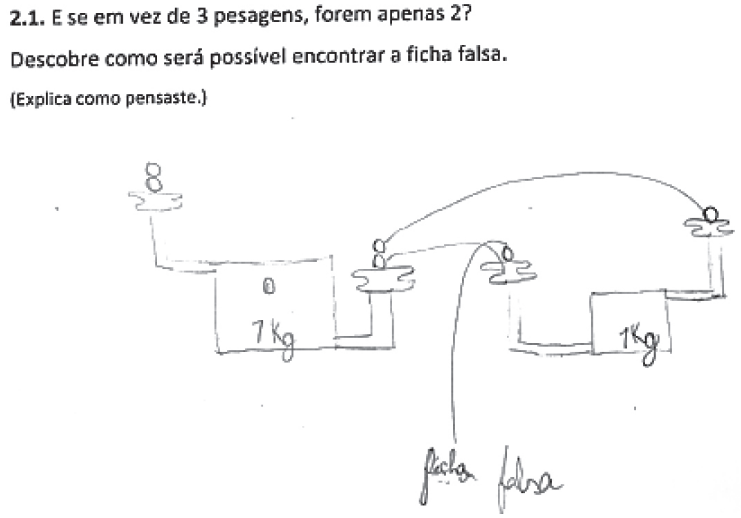


Figura 10. Tarefa 4 – 4 fichas e 2 pesagens – grupo de Martinho

Liliana relatou que o seu grupo começou por colocar duas fichas em cada prato da balança (figura 10, ilustração da esquerda). Ao contrário do grupo anterior, este grupo não registou as fichas que iam sobrando no decorrer das pesagens. A aluna referiu que, como as fichas do prato da direita eram mais pesadas, "pusemos [...] uma ficha em cada prato da balança [ilustração da direita] e vimos que esta [prato da esquerda] era a mais pesada. Então era a falsa." Quando o professor desafiou a turma a refletir sobre esta estratégia, Rui e Miguel apresentaram opiniões diferentes sobre ter sorte na descoberta da ficha falsa. Para Rui ter sorte significaria descobrir a ficha falsa na primeira pesagem. Para Miguel o grupo teve sorte, porque descobriu a ficha falsa com o número de pesagens exigido no enunciado e sem ter de usar as oito fichas "Se a falsa estivesse nas outras 4 [fichas que não usaram], não tinham tido sorte [...] e já não podiam fazer mais pesagens."

3) Seis fichas na primeira pesagem (figura 11).

O grupo de Santiago (figura 11) previu todas as situações que poderiam ocorrer usando inicialmente seis fichas, sendo esta a estratégia mais completa entre as que surgiram.

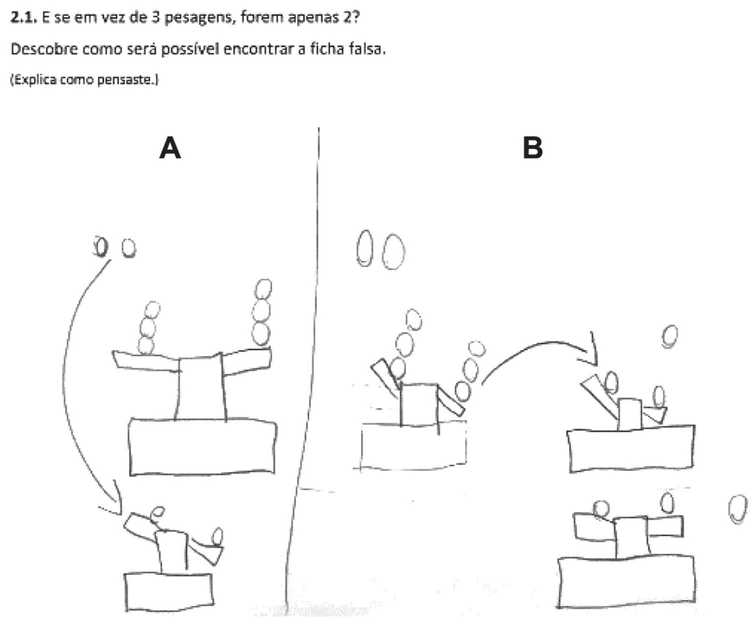


Figura 11. Tarefa 4 – 6 fichas e 2 pesagens – grupo de Santiago.

O grupo apresentou duas possibilidades, A e B, separadas por um traço (figura 11). Após o convite do professor, Santiago apresentou a possibilidade A:

Santiago: Nós, primeiro, começámos por meter 3 fichas de cada lado. E equilibrou a balança. Então, a falsa só podia ser uma destas [as 2 fichas que sobraram, representadas mais acima].

Depois fizemos outra pesagem com estas 2 fichas [colocando uma em cada prato, na 2.ª balança] e já sabíamos que esta era a falsa [apontando para a ficha do prato direito].

Como solicitado, com duas pesagens os alunos descobriram a ficha falsa. No entanto, o grupo pensou mais além. O que aconteceria se na primeira pesagem a balança não tivesse ficado equilibrada? A possibilidade B responde a esta questão.

Santiago: Nós pusemos 3 fichas de um lado e 3 do outro. Depois a balança desequilibrou. Então já sabíamos que nenhuma destas 2 fichas era a falsa [referindo-se às que sobravam]. [...] Então, a ficha falsa era uma destas [apontando, na 1.ª balança, para o prato direito]. Então, nós pegámos em 2 [destas 3 fichas] e metemos uma em cada prato [apontando para a 2.ª balança]. E depois esta ficha [do conjunto das 3 anteriores] ficou aqui de fora [ilustrada mais acima, desta 2.ª balança]. Se a balança desequilibrasse já sabíamos qual era a falsa [como foi o caso, apontando para a ficha do prato direto]. Se a balança equilibrasse, a ficha que estava de fora é que era a falsa [mostrando esta situação na 3.ª balança].

Nesta possibilidade os alunos previram ainda o que aconteceria, na segunda pesagem, caso a balança não tivesse ficado desequilibrada.

Dado que em B (figura 11) estão representadas três balanças, a investigadora resolveu questionar a turma:

Investigadora: Quantas pesagens fizeram?

[...]

Duarte: Estão ali 3 pesagens, mas eram 2 [...] porque eles fizeram como se encontrassem logo a ficha falsa e depois como se a ficha falsa fosse a ficha que não usaram.

Santiago: Estas eram as 2 possibilidades que poderia haver.

A investigadora, com uma ação de apoiar/guiar, questionou os alunos. A explicação de Duarte revela que o aluno compreendeu a situação e Santiago concluiu.

Nesta extensão ao problema anterior, todos os grupos conseguiram resolver o problema, respeitando o número de pesagens referidas no enunciado.

Tarefa 5: Projeto "Qual a massa da turma?"

Este projeto possibilitou trabalhar os níveis 4 (medição com u.m. padronizadas) e 5 (relação entre as u.m. padronizadas). Tratou-se de uma tarefa de aplicação dos conhecimentos adquiridos, num contexto real. A questão inicial "Qual a massa da turma?", lançada pelo professor, surgiu do interesse demonstrado pelos alunos, que em grande grupo discutiram o que seria necessário para poder responder. Rui sugeriu que deviam fazer uma estimativa e Martinho sugeriu que todos os alunos se deviam pesar. Embora a estimativa não respondesse à questão, foi decidido que estas seriam as etapas que iriam percorrer.

O professor desafiou os alunos a estimarem a massa total da turma. As estimativas ficaram longe do valor real, pois os alunos pareciam não ter noção de uma quantidade tão elevada de massa. Posteriormente, e à vez, cada aluno estimou a sua massa antes de fazer a medição.

Catarina: 28... quilogramas [referindo-se à estimativa da sua massa].

Investigadora: Vamos ver...

Catarina: 28 vírgula 6 quilogramas [fazendo a leitura na balança].

Investigadora: O que é que significa "vírgula 6 quilogramas"?

[...]

Santiago: Seiscentos gramas.

Investigadora: Porquê?

Santiago: Porque... 1 hectograma são... 100... gramas. 6 [hg] são 600 [g].

De notar que, para a sua própria massa, as estimativas de cada aluno foram muito próximas do valor real, como no caso de Catarina. A leitura que esta aluna fez da sua massa suscitou dúvidas à investigadora, pelo que na ação de apoiar/guiar solicitou o significado dessa leitura. Santiago respondeu, justificando com a relação entre as u.m..

Os valores obtidos com as pesagens individuais foram registados numa tabela coletiva, trabalhada depois pelos vários grupos. A partir da tabela, cada grupo elaborou um conjunto de questões, posteriormente trocadas entre os grupos e respondidas por cada um. Por exemplo, as questões elaboradas pelo grupo de Carlos relacionavam-se com o mais leve e o mais pesado e foram respondidas pelo grupo de Rui. Este grupo começou por comparar as massas registadas na tabela, ordenando os alunos do mais leve para o mais pesado, identificando assim os alunos da turma com menor e com maior massa.

As questões formuladas pelo grupo de Duarte foram respondidas pelo grupo de Martinho. Para responder à questão "Qual a diferença entre a massa da Margarida e a massa da Inês?", o professor convidou este grupo a apresentar a sua estratégia (figura 12).

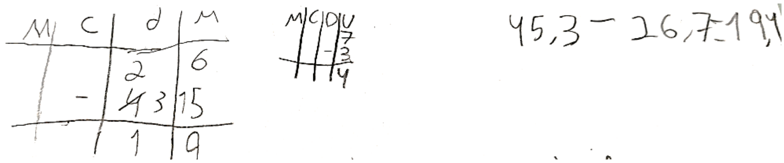


Figura 12. Tarefa 5 – grupo de Martinho

Martinho: Nós fomos à tabela e vimos as massas [...] da Inês e da Margarida. A Inês tem 45 quilos e 300 gramas... e a Margarida tem 26 quilos e 700 gramas. Depois, nós fizemos [...] um algoritmo para os quilos... e deu 19. Depois, fizemos outro para [...] os hectogramas e deu 4. Depois, nós escrevemos que era 19 vírgula 4.

Martinho relatou a realização de dois algoritmos, um respeitante à parte inteira do número, onde foram trabalhados os quilogramas, e outro à parte decimal, onde trabalharam com os hectogramas (figura 12). Esta figura complementa a explicação do aluno, pois identifica a subtração como a operação usada. É também visível na representação da esquerda que o aditivo é menor do que o subtrativo. Percebemos ainda que os alunos realizaram o algoritmo da subtração por decomposição de 45, como se este valor estivesse no aditivo.

A discussão que se seguiu esteve relacionada com os erros cometidos, que foram identificados e corrigidos por todos. Para concluir, a investigadora desafiou o grupo a refletir sobre o significado do resultado do cálculo, 18,6 kg, obtido após a correção coletiva. Martinho, sem hesitar, referiu que "É a diferença de peso entre a Inês e a Margarida", mostrando compreensão do resultado.

Para responder à questão formulada pelo grupo de Mariana, "Quanta massa o Luís tem a mais do que a Benedita?", o grupo de Simão explicou assim:

Simão: Nós fomos à tabela... vimos a massa da Benedita e do Luís. "Benedita 27,5 kg" e "Luís 40,1 kg" [lendo] e vimos quanto é que o Luís tem a mais do que a Benedita. E são 14 quilogramas.

[...]

Martinho: Como é que vocês sabiam quanto é que o Luís tinha a mais do que a Benedita? [Na folha de registo apenas está escrita a resposta.]

Simão: Nós fomos contando do 27 até ao 40.

Simão não foi explícito quanto à forma como o grupo encontrou a diferença de massas e a questão de Martinho permitiu que clarificasse a estratégia. Percebemos que o grupo não usou o algoritmo nem recorreu ao cálculo mental, mas usou contagem envolvendo apenas a parte inteira dos números e o valor apresentado não é correto.

Na discussão que se seguiu, Rui sugeriu que o grupo deveria ter realizado uma adição para responder à questão. Duarte não concordou, uma vez que era pedido a diferença de massas, associando assim a subtração.

Professor:	Vamos lá recordar a pergunta. "Quanta massa o Luís tem a mais do que a Benedita?" [lendo a questão] Temos aqui duas ideias diferentes [...] O Rui diz que é para juntar tudo. O Duarte diz que é para subtrair.
[...]	
Santiago:	Eu também acho que é fazer uma [...] subtração.
Professor:	Porquê?
Santiago:	Porque quando nós queremos ver quanto é que tem a mais, nós temos de fazer uma subtração... para ver qual é o resultado.
[...]	
Investigadora:	E porque é que não pode ser uma adição?
Martinho:	Se juntarmos os 2 [valores] vai dar um resultado maior.
[...]	
Rui:	Tem de ser uma subtração.

Na ação de informar/sugerir, o professor releu a questão e redisse as sugestões de Rui e de Duarte, focalizando a atenção dos alunos, com a ação de apoiar/guiar, para as duas sugestões diferentes. Todo o discurso que se seguiu pretendeu esclarecer o pensamento dos alunos e Rui concluiu que a sua sugestão não estava correta.

Depois de apresentadas e discutidas as respostas às questões elaboradas pelos diferentes grupos, foi discutida em grande grupo uma estratégia para responder à questão inicial deste projeto "Qual a massa da turma?" Liliana sugeriu que cada grupo adicionasse a massa dos seus elementos "e depois somar [...] os resultados, [isto é] o total de cada grupo." Carlos acrescentou que desta forma "vai ser mais rápido do que se somarmos todos juntos", referindo-se à adição das massas dos 18 elementos da turma apenas num cálculo.

Depois da realização da estratégia sugerida por Liliana, os alunos chegaram à resposta:

Santiago:	627 quilogramas e 3 hectogramas.
Investigadora:	É mais ou é menos do que uma tonelada?
Santiago:	É menos.
Professor:	Porquê?
Alunos:	Porque uma tonelada são 1000 quilogramas.
Investigadora:	É mais ou menos do que meia tonelada?
Alunos	É mais.
Professor:	Quanto a mais?
Alunos:	127 quilogramas e 3 hectogramas.

Depois de descobrirem a massa da turma, a investigadora e o professor desafiaram os alunos a irem mais além. Com as questões que colocaram, os alunos puderam relacionar u.m., a tonelada e o quilograma, e calcularam massas.

Apesar das dificuldades, nomeadamente nos cálculos, todos os grupos conseguiram atingir os objetivos propostos em relação aos níveis de desenvolvimento 4 e 5 a que esta tarefa se propunha, nomeadamente, medir e calcular massas e relacionar as u.m..

5. DISCUSSÃO

Como referimos, este artigo tem como objetivo conhecer a aprendizagem da grandeza massa feita por alunos do 4.º ano através da resolução de um conjunto de tarefas exploratórias, que constituem uma sequência de tarefas.

Na tarefa 1 pudemos perceber que os alunos têm consciência do atributo massa, como esperado, validando a nossa decisão de não trabalhar tarefas específicas para o nível 1 de desenvolvimento, e apresentam conhecimentos informais sobre a leitura e interpretação de balanças de pratos, que serviram de base aos novos conhecimentos (MacDonald y Lowrie, 2011), facilitando a compreensão do significado de medir (NCTM, 2007). Relativamente à linguagem usada, alguns alunos apresentam uma linguagem mais formal do que outros, usando a expressão *ter mais massa*, como sinónimo de *ser mais pesado do que*, sendo esta última também referida na literatura (McDonough *et al.*, 2013). Foi usada a comparação direta para comparar massas de diferentes objetos – comparação objeto-objeto e objeto-objetos.

Para responder à questão "Como é que sabemos que os objetos têm a mesma massa?" Ricardo sugeriu a medição da massa dos objetos, ao contrário dos colegas que ainda referiram a comparação.

Relativamente ao processo de medição usando o grama como u.m. e recorrendo a balanças de pratos, os alunos fizeram medições por tentativa e erro, colocando e tirando pesos até que os pratos da balança ficassem equilibrados, e adicionaram as massas dos diferentes pesos, determinando assim, a medida da massa dos objetos. A discussão coletiva permitiu debater o facto de objetos aparentemente iguais poderem apresentar massas diferentes. Foi ainda possível estabelecer relações entre diferentes u.m., nomeadamente entre o hg e o g, o que nos permitiu explorar o erro do grupo de Duarte, na representação de metade na forma de fração. As ações da investigadora e do professor foram fundamentais para que os alunos identificassem e corrigissem o erro.

A tarefa 2 permitiu aos alunos desenvolverem a perceção da massa de 1 kg e usarem a comparação direta e indireta, estando a propriedade transitiva muito associada a esta última (Ponte y Serrazina, 2000), na distribuição dos objetos. Este tipo de comparação revelou-se evidente nas interações dos grupos, que relacionaram a massa de diferentes objetos com a unidade de referência, 1 kg, e entre si, fazendo inferências através da manipulação e observação. As estratégias dos grupos pareceram basear-se nos seus conhecimentos e experiências prévias, refletindo ideias informais sobre a relação entre massa, volume e capacidade. Por exemplo, na estratégia apresentada por Duarte, o grupo confundiu massa e volume, assumindo que objetos maiores têm necessariamente massas maiores, erro já mencionado na literatura (MacDonald, 2010). Por outro lado, a distribuição feita pelos grupos de Miguel e de Carlos indica uma compreensão mais elaborada, ao relacionarem a capacidade dos pacotes de sumo com a respetiva massa, mesmo sem terem abordado formalmente a capacidade. A intervenção de Margarida vai nesse mesmo sentido, ao reconhecer que 1,5 litros é mais do que 1 litro, e conclui que a massa será maior. De modo semelhante, Martinho e Carlos consideram que "meio litro a mais" corresponde a "mais massa", revelando uma compreensão intuitiva da relação entre volume e massa. Estas observações mostram que os alunos mobilizaram conhecimentos relacionados com as suas experiências diárias. A comparação entre as massas das bolas constituiu outro aspeto relevante, em que o uso da propriedade transitiva se destacou como estratégia para justificar a ordenação das massas, quer por comparação com a unidade de referência, quer pela comparação entre os próprios objetos. Por fim, a medição das massas com recurso à balança digital foi um momento essencial da tarefa, permitindo aos alunos validar, ou refutar, as suas previsões e explorar a relação entre diferentes u.m.. As ações do professor e da investigadora, enquadradas pela abordagem exploratória, revelaram-se fundamentais na medida em que eles não forneceram respostas, mas desafiaram os alunos a explicitar, rever ou justificar as suas ideias, reforçando, assim, a importância da discussão coletiva como momento fundamental da aula de Matemática.

A tarefa 3 representou um grande desafio para os alunos, que não dispunham de nenhuma estratégia de resolução (Ponte, 2005), revelando-se cognitivamente muito exigente. As principais dificuldades prenderam-se com a compreensão do problema e a representação da estratégia, o que exigia não só conhecimentos conceptuais e processuais como capacidade de abstração. O facto de a representação não ser dinâmica dificultou ainda mais o trabalho. Face à complexidade da tarefa e às dificuldades manifestadas, foi necessário ajustar o seu nível de dificuldade para que os alunos não se desmotivassem e desistissem da sua resolução (Brodie, 2010). Assim, no decorrer da aula, foi retirada a condição de se realizarem apenas duas pesagens, mantendo-se o foco na identificação da ficha falsa, independentemente do número de pesagens realizadas, o que permitiu manter os alunos envolvidos. A estratégia do grupo de Duarte revelou a necessidade de concretizar a situação, usando materiais disponíveis para simular o funcionamento da balança. Isto mostra que, para estes alunos, o pensamento ainda se apoia fortemente no concreto, sendo fundamental garantir momentos de manipulação que sustentem a transição para formas mais abstratas de pensamento. A estratégia do grupo de Martinho foi mais simbólica e abstrata, ao atribuir massas às fichas e representar o equilíbrio ou desequilíbrio da balança, embora a representação não tenha sido totalmente precisa. Esta estratégia evidencia uma maior capacidade de abstração e organização do pensamento, ao antecipar possibilidades e explorar diferentes formas de pesagem. Destaca-se a importância da discussão coletiva, que permitiu uma melhor compreensão e clarificação do problema, assim como a partilha das estratégias.

A tarefa 4 foi uma extensão do problema anterior, que permitiu aumentar o seu grau de dificuldade, ao introduzir mais fichas e ao considerar o número de pesagens realizadas. Apesar da complexidade acrescida, os resultados mostram que os alunos não revelaram grandes dificuldades, conseguindo apresentar estratégias de resolução que respeitaram todas as condições do enunciado. Este sucesso parece estar relacionado com o trabalho realizado na tarefa anterior, em especial com a discussão coletiva. Como refere (Brodie, 2010), quando os alunos têm oportunidade de discutir ideias e estratégias em grupo, tornam-se mais aptos a enfrentar tarefas desafiantes. Algumas estratégias foram mais completas e estruturadas do que outras, nomeadamente a do grupo de Santiago, que não só identificou a ficha falsa com o número de pesagens permitido, como antecipou, de forma sistemática, todas as possibilidades que poderiam ocorrer, revelando um nível elevado de organização do pensamento e uma capacidade de antecipar e estruturar que vai além da tentativa e erro. A discussão coletiva permitiu a partilha de estratégias, possibilitando aos alunos desenvolver a capacidade de resolver problemas diferentes dos habituais, envolvendo uma maior complexidade.

A tarefa 5, o projeto "Qual a massa da turma?", possibilitou a aplicação do conceito de massa numa situação real, relacionada com as vivências dos alunos (Cheeseman *et al.*, 2014; NCTM, 2007). O projeto permitiu a participação ativa e o envolvimento dos alunos em todas as fases do seu desenvolvimento (Ponte, 2005). As estimativas que os alunos fizeram sobre a massa da turma ficaram longe do valor real, mostrando que não tinham noção de uma quantidade tão elevada de massa. Verificou-se o contrário nas estimativas das massas de cada um, por exemplo a de Catarina ficou apenas a seiscentos gramas do valor da sua massa real. Estas estimativas foram importantes para o desenvolvimento do conhecimento conceptual da grandeza (Kamii, 1995).

Além de trabalhar a grandeza massa, o projeto permitiu estabelecer conexões com outros temas da Matemática, nomeadamente com Números. O grupo de Mariana formulou questões relacionadas com os sentidos da subtração e o grupo de Simão, ao responder, mostrou dificuldades em trabalhar com números decimais e com o algoritmo da subtração. Mesmo trabalhando com números inteiros, os alunos apresentaram dificuldades na realização do algoritmo, parecendo ainda não compreender que o aditivo tem de ser maior do que o subtrativo. Foi também possível discutir o significado de *juntar* e da *diferença*, assim como o significado do resultado da subtração. Os alunos tiveram ainda oportunidade de relembrar o algoritmo da subtração, que surgiu contextualizado em situações reais. Em relação ao processo de medição, este projeto permitiu aos alunos aprender a medir massas, em contextos reais, com recurso a balanças digitais, possibilitando a aplicação dos conhecimentos adquiridos e a relacionar as u.m. padronizadas, desenvolvendo assim o conhecimento processual da grandeza.

Nas intervenções do professor e da investigadora nos momentos de discussão coletiva, estiveram presentes as ações propostas por Ponte *et al.* (2013), que se mostraram de grande importância na aprendizagem da grandeza massa e na sua aplicação a tarefas em contexto real.

6. CONCLUSÃO

As tarefas apresentadas são parte de uma sequência que criámos para construir um percurso significativo (Ponte, 2005) para a aprendizagem da grandeza massa. As tarefas exploratórias propostas permitiram a participação e o envolvimento ativo dos alunos, tornando-os agentes principais no desenvolvimento da sua aprendizagem, e proporcionaram experiências práticas sem as quais é difícil uma compreensão sólida e aprofundada do processo de medir (NCTM, 2007).

Embora os alunos já tivessem iniciado o estudo do conceito de massa, ainda não tinham tido oportunidade de o fazer de modo sistemático, nem trabalhar o respetivo processo de medição. Foram proporcionadas situações de comparação direta e indireta de objetos, estando a propriedade transitiva muito associada a esta última comparação (Ponte y Serrazina, 2000). Podemos concluir que os alunos desenvolveram o conhecimento processual, assim como o conhecimento conceptual sobre a grandeza massa e a sua medida, como sugerido na literatura (Mwale y Jakobsen, 2022), assim como a capacidade de resolução de problemas envolvendo o conceito. A aplicação prática deste conhecimento foi feita com a realização do projeto que, partindo de uma situação relacionada com as vivências dos alunos, permitiu estabelecer conexões dentro da Matemática. Dado que os objetivos propostos para os vários níveis de desenvolvimento foram atingidos por todos os grupos, podemos concluir que a generalidade dos alunos atingiu o nível 5 de desenvolvimento.

Este conjunto de tarefas permitiu ainda a discussão e o confronto de ideias, a construção de conceitos, a compreensão de procedimentos, a progressão no domínio da linguagem matemática, estabelecendo conexões entre diferentes processos de resolução, de representações e ainda entre temas matemáticos (Canavarro, 2011; Stein *et al.*, 2008).

Os momentos de discussão coletiva constituíram momentos de reflexão, discussão e análise, assumindo um papel crucial no desenvolvimento da aprendizagem. Como refere Ponte (2005) a aprendizagem resulta "da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou" (p. 5). A discussão coletiva e as ações do professor e da investigadora, revestiram-se de grande importância para a construção coletiva do novo conhecimento. A abordagem exploratória proporcionou aos alunos oportunidades de aprendizagem onde os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgiram com significado, favorecendo o desenvolvimento das capacidades transversais de resolução de problemas e comunicação matemática (Canavarro, 2011).

Como limitação deste estudo, reconhecemos que se trata de um percurso que não inicia o estudo da grandeza massa, mas que lhe dá continuidade, trabalhando o processo de medição. Sugerimos a realização de mais investigações sobre a grandeza massa, dada a escassez de estudos e a importância que esta grandeza tem nos currículos escolares.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projeto 2021.04798.BD, com o identificador DOI https://doi.org/10.54499/2021.04798.BD, e no âmbito da UIDEF – Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação, UIDB/04107/2020, https://doi.org/10.54499 /UIDB/04107/2020

REFERÊNCIAS

Araman, E. M. O., Serrazina, L., y Ponte, J. P. (2019). "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(2), 466–490. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v21i2p466-490

Bogdan, R., y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Boulton-Lewis, G. (1987). Recent cognitive theories applied to sequential length measuring knowledge in young children. *British Journal of Educational Psychology*, *57*, 330–342. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.1987.tb00861.x

Bragg, P., y Outhred, L. (2004). A measure of rulers: The importance of units in a measure. En M.J. Hoines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 159–165). Bergen University College.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., y Oliveira, P. (2011). Geometria e medida no ensino básico. En *Lisboa. Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular*. ME, DGIDC.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., y Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE.

Cheeseman, J., McDonough, A., y Clarke, D. (2011). Investigating children's understanding of the measurement of mass. En J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, y S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia]* (pp. 174–182). AAMT y MERGA.

Cheeseman, J., McDonough, A., y Ferguson, S. (2014). Investigating young children's learning of mass measurement. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 131–150. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0082-7

Kamii, C. (1995). Why is the use of a ruler so hard? *Paper Presented at the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Kamii, C., y Clark, F. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, *97*, 116–121.

MacDonald, A. (2010). Heavy thinking: Young children's theorising about mass. *APMC*, *15*(4), 4–8.

MacDonald, A. (2011). Young children's representations of their developing measurement understandings. *Proceedings of the 34th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 482–490).

MacDonald, A., y Lowrie, T. (2011). Developing measurement concepts within context: Children's representations of length. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(1), 27–42. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s13394-011-0002-7

McDonough, A., Cheeseman, J., y Ferguson, S. (2013). *Young children's emerging understandings of the measurement of mass*. https://doi.org/10.1177/183693911303800403

ME (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática*. ME, DGE.

Mendes, F., Brocardo, J., y Oliveria, H. (2016). Especificidades e desafios da design research : o exemplo de uma experiência de ensino no 1 . o ciclo. *Quadrante, 25*(2), 51–75. https://doi.org/10.48489/quadrante.22938

Mwale, L., y Jakobsen, A. (2022). An investigation of teacher 's practices when teaching mass measurement in grade 4 in Malawi. *Twelfth Congress of the European Soiety for Research in Mathematics Education (CERME 12).*

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. APM.

NSW (2017). *Teaching Measurement Stage 2-Stage 3*. Department of Education Learning and Teaching Directorate.

Nunes, T., y Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Blackwell Publishers.

Passelaigue, D., y Munier, V. (2015). Schoolteacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 307–336. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9610-6

Piaget, J., Inhelder, B., y Szeminska, A. (1960). *The Child's Conception of Geometry*. Routledge.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *O Professor e o Desenvolvimento Curricular*, *1*, 11–34.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. *A prática dos professores: Planificação e discussão na sala de aula.*, 33–56.

Ponte, J P., Mata-Pereira, J., y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22 (2)*, 55–81. https://doi.org/10.48489/quadrante.22894

Ponte, J. P., Nunes, C. C., y Quaresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. En A. C. Silva, M. Carvalho, y R. G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes,* (pp. 49–74). Cuiabá: UFMT.

Ponte, J. P., y Serrazina, M. L. (2000). *Didática da matemática do 1.o ciclo*. Universidade Aberta.

Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). Geometric measurement, Part 2. En J. Sarama y D. H. Clements (Eds.), *Early childhood mathematics education research* (pp. 293–316). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785-11

Smith III, J. P., y Barrett, J. (2017). The learning and teaching of measurement: Coordinating quantity and number. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 355–385). NCTM.

Solomon, T. L., Vasilyeva, M., Huttenlocher, J., y Levine, S. C. (2015). Minding the gap: Children's difficulty conceptualizing spatial intervals as linear measurement units. *Developmental Psychology*, *51*(11), 1564–1573. https://doi.org/10.1037/a0039707

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stephan, M., y Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. En D. H. Clements (Ed.), *Learning and Teaching Measurement* (pp. 3–16). NCTM.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school (TAL Project)*. Utrecht University, Freudenthal Institute. https://doi.org/10.1163/9789087903985

Autor de correspondencia

MARTA TEIXEIRA

Dirección: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,
Alameda da Universidade
1649-013 Lisboa, Portugal
martateixeira@edu.ulisboa.pt

https://doi.org/10.24844/EM3703.04

A fase de planeamento num estudo de aula: a tarefa e o plano de aula

The planning stage in a lesson study: the task and lesson plan

Marta Cristina Cezar Pozzobon[1], Filipa Alexandra Baptista Faria[2], João Pedro Mendes da Ponte[3], Margarida Maria Amaro Teixeira Rodrigues[4]

Resumo: Este artigo tem por objetivo compreender como se desenvolve a fase de planeamento da aula de investigação num estudo de aula em Matemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, com recurso à análise de conteúdo, na qual se identificam os aspetos considerados pelas professoras quando selecionaram e adaptaram duas tarefas para a aula de investigação, uma das quais com recurso tecnológico, e ainda os aspetos discutidos na elaboração do plano da aula. Neste estudo participaram duas professoras do 5.º ano de escolaridade. Os resultados evidenciam que, para a seleção e adaptação da tarefa, as professoras consideraram o objetivo de aprendizagem, os interesses dos alunos, o nível de desafio da tarefa, as possíveis representações e resoluções e os conhecimentos prévios necessários aos alunos. No que envolve o plano

Fecha de recepción: 28 de abril de 2025. **Fecha de aceptación:** 18 de junio de 2025.

[1] UFPel, Universidade Federal de Pelotas, Brasil. martacezarpozzobon@gmail.com. https://orcid.org/0000-0003-3069-5627.

[2] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. filipa.faria@edu.ulisboa.pt. https://orcid.org/0000-0001-6770-3366.

[3] UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. jpponte@ie.ulisboa.pt. https://orcid.org/0000-0001-6203-7616.

[4] Ci&DEI, Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal. margaridar@eselx.ipl.pt. https://orcid.org/0000-0003-4658-6281.

de aula, decorreram discussões relativas à definição do objetivo de aprendizagem, seleção de recursos, gestão do tempo, antecipação da atividade matemática dos alunos e papel do professor. Destaca-se, ainda, como resultado, o reconhecimento da importância de mudança da prática pelas professoras, ilustrado pelas suas reflexões sobre a sua prática.

Palavras-chave: Estudo *de aula; Planeamento; Tarefas; Plano de aula; Educação matemática.*

Abstract: This article aims to understand how the phase of planning a research lesson in the lesson study is developed in mathematics. This is a qualitative research, using content analysis, in which the aspects considered by the teachers when they selected and adapted two tasks for the research lesson are identified, one of them with a technological resource, as well as the aspects discussed in the preparation of the lesson plan. The participants in this study are two grade 5 teachers. The results show that, for the selection and adaptation of the task, the teachers considered the learning aim, the students' interest, the level of challenge of the task, the possible representations and solutions and the necessary pupils' previous knowledge. With regard to the lesson plan, there were discussions regarding the definition of the targeted learning aim, resources, time management, anticipation of the students' activity and the teacher role. It is also noteworthy, as a result, the teachers' recognition of the importance of changing practice, illustrated by their reflections on their practice.

Keywords: *Lesson study; Planning; Tasks; Lesson plan; Mathematics education.*

INTRODUÇÃO

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional, assente na colaboração e reflexão, desenvolvido por um grupo de professores (Stigler y Hiebert, 1999; Perry y Lewis, 2008). É um processo inserido na cultura profissional dos professores japoneses há mais de um século, com o objetivo de promover a aprendizagem dos alunos, tendo por base a preparação detalhada e posterior reflexão de aulas por parte dos professores (Stigler y Hiebert, 1999; Fujii, 2018).

Fujii (2019) salienta que o trabalho realizado pelos professores participantes inclui discussões acerca dos conteúdos matemáticos, das tarefas e do plano de aula, nas quais se antecipa a atividade matemática dos alunos, identificando possíveis estratégias e dificuldades. Estes aspetos são tidos em conta na condução de estudos de aula no contexto português, sendo que o trabalho colaborativo e reflexivo realizado pelos professores participantes durante as sessões é habitualmente assente na abordagem exploratória do ensino e aprendizagem da Matemática (Ponte, 2005; Ponte *et al*., 2016). À semelhança da resolução de problemas adotada no ensino de Matemática japonês (Fujii, 2016, 2018), na abordagem exploratória a natureza das tarefas e a estrutura da aula são consideradas dimensões que potenciam o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos.

Para que a aula planeada se insira numa abordagem exploratória, a tarefa selecionada pelos professores participantes num estudo de aula deve atender a certos princípios (Fujii, 2015) e o plano de aula deve ser detalhado e ser estruturado de acordo com os momentos da aula (Ponte *et al*., 2015). As características da tarefa e do plano de aula são fulcrais para a qualidade do ensino e da aprendizagem, visto que compõem parte da prática letiva dos professores prévia à lecionação da aula.

Em Portugal, a abordagem exploratória está presente também em documentos oficiais que norteiam a prática letiva dos professores, tais como o documento Aprendizagens Essenciais (Canavarro *et al*., 2021). Este documento elenca ideias-chave para que o professor promova a aprendizagem, tais como reconhecer o papel do aluno, promovendo uma abordagem dialógica para a construção do seu conhecimento, proporcionar oportunidades para que os alunos se envolvam nas discussões matemáticas, contribuindo para uma dinâmica de aula socioconstruiva e, ainda, proporcionar que a experiência matemática dos alunos se desenrole a partir de tarefas poderosas, desafiantes e que os cativem, nomeadamente com recurso à tecnologia. Pelo seu lado, os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Agenda 2030 das Nações Unidas (OCDE, 2018), indicam ser necessário contribuir para o desenvolvimento de um ensino de qualidade através da promoção da formação profissional de professores em serviço. Deste modo, o investimento em processos de desenvolvimento profissional como o estudo de aula procura promover a qualificação de professores de Matemática, bem como o conhecimento básico dos alunos . As orientações da OCDE para 2030 reforçam ainda que os professores devem valorizar a linguagem comum e a agência dos alunos, aspetos necessários a uma aprendizagem matemática com compreensão por parte dos alunos.

Assim, este artigo tem por objetivo compreender como se desenvolve a fase de planeamento da aula de investigação num estudo de aula. Especificamente, colocamos duas questões: (i) Em que aspetos incidem as discussões das professoras quando selecionam e adaptam a tarefa para a aula de investigação? e (ii) Em que aspetos incidem as discussões das professoras em relação à elaboração do plano de aula?

PREPARAR A AULA DE INVESTIGAÇÃO NUM ESTUDO DE AULA

A fase de planeamento

Um estudo de aula é um processo de formação de professores, cujo objetivo é a qualidade da aprendizagem dos alunos, e que é composto por diferentes fases. Estas podem ser caraterizadas do seguinte modo (Fujii, 2018): a definição de um objetivo de aprendizagem específico, considerando as dificuldades de aprendizagem dos alunos; o planeamento de uma aula de investigação considerando esse objetivo; a condução e observação da aula de investigação; a discussão pós-aula, na qual se partilham e analisam os sucessos e desafios em relação à aprendizagem dos alunos; e, por fim, a reflexão retrospetiva, que pode envolver a documentação do que foi realizado e as perspetivas futuras (figura 1). Nos países ocidentais, os estudos de aula são habitualmente conduzidos por um facilitador que, além de ser um membro do grupo que participa nas interações, é quem organiza previamente e conduz as sessões de trabalho (Clivaz y Clerc-Georgy, 2020).

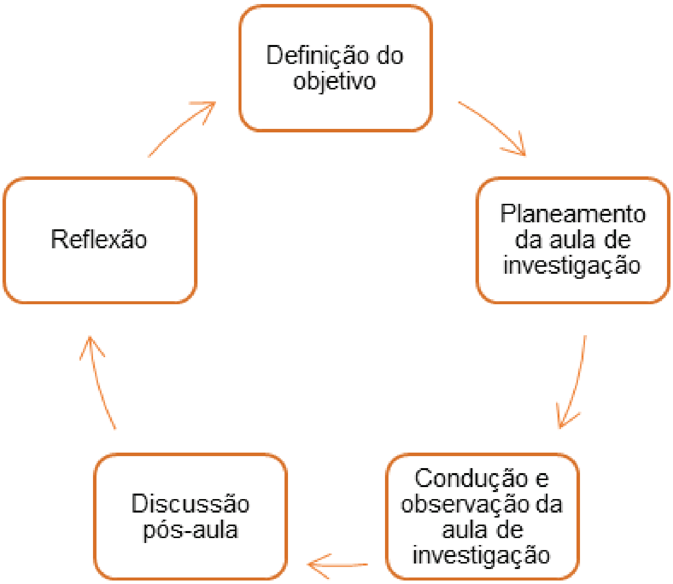


Figura 1: As cinco fases do estudo de aula de acordo com Fujii (2018).
Fonte: Elaboração própria.

Na fase de planeamento da aula de investigação, a segunda fase e habitualmente a mais longa do ciclo de um estudo de aula, o grupo de professores participantes trabalha colaborativamente na seleção e possível adaptação de uma tarefa, na antecipação da atividade matemática dos alunos e das ações do professor e, ainda, na elaboração do plano de aula de acordo com a tarefa selecionada (Fujii, 2019).

Porém, é preciso salientar que antes da elaboração do plano de aula, prioriza-se a escolha do objetivo de aprendizagem da aula, de forma que esta vá ao encontro das dificuldades dos alunos em conteúdos considerados pelos professores como mais desafiantes (Fujii, 2014). Diante disso, o grupo de professores investiga e estuda diversos materiais e começa a organizar um plano de aula detalhado, que indique o porquê da escolha de determinados problemas, materiais e questões a colocar aos alunos (Fernandez *et al.*, 2003; Takahashi y Yoshida, 2004).

Nesta perspetiva, o estudo de aula tem em si a especificidade de incentivar, pela sua estrutura e atividades, que os professores sejam participantes ativos, e que esta participação seja a partir de e para a sua experiência de prática letiva

(Fujii, 2016; Quaresma y Ponte, 2021; Ponte *et al.*, 2016). De acordo com Benedict *et al.* (2023), a fase de planeamento num estudo de aula influencia significativamente a prática dos professores participantes devido, por exemplo, à intensidade colaborativa deste momento, podendo fazer emergir aspetos do ensino-aprendizagem da Matemática que estes ainda não tivessem reconhecido. Outro fator que pode provocar mudanças nas práticas dos professores durante esta fase é a possibilidade de utilizarem um plano de aula estruturado para planificarem todos os momentos da aula (Benedict *et al.*, 2023).

Tais discussões levam a considerar que o planeamento das tarefas e organização do plano de aula estão relacionadas com a gestão curricular, que é traduzida pelo modo como o professor entende e interpreta o currículo e a gestão da aula, que se refere ao "modo como o professor concretiza a estratégia definida, tanto para a unidade como para a aula" (Ponte, 2005, p. 22). No estudo de aula, a fase de planeamento da aula assume assim um papel fundamental, já que possibilita aos professores discutirem a seleção e adequação da tarefa, anteciparem diferentes estratégias dos alunos e prepararem-se para conduzir a aula na perspetiva de alcançar o objetivo de aprendizagem proposto (Fujii, 2016).

Elaboração de tarefas

As tarefas precisam ser selecionadas e conduzidas pelo professor, considerando as dificuldades, os interesses e as características da turma e dos alunos individualmente, assim como a gestão do tempo e de outros recursos (Ponte *et al.*, 2015). Neste sentido, entendemos a tarefa como algo que o professor propõe aos alunos e a atividade matemática, por sua vez, como o envolvimento dos alunos na realização da tarefa pedida (Swan, 2017).

De acordo com Doig *et al.* (2011) existem quatro tipos de tarefas que são usadas no contexto de um estudo de aula japonês: a) as que abordam diretamente um conceito; b) as que envolvem processos matemáticos; c) as escolhidas a partir do seu alcance e sequência; e d) as que partem de equívocos comuns. Para Fujii (2019), as tarefas devem ser compreensíveis e precisam ser resolvidas pelos alunos, com a intervenção mínima do professor. Assim, Fujii (2015, 2018) destaca alguns princípios a considerar para a escolha das tarefas: a adequação matemática em relação aos objetivos da aula; o interesse dos alunos; a adequação ao nível de compreensão e dificuldades dos alunos; a possibilidade de resolução de várias formas; a aplicação a outros problemas matemáticos ou da vida real e as potencialidades para a obtenção de conhecimentos básicos.

Diante disso, a seleção e a adaptação de tarefas envolvem a consideração das dificuldades dos alunos, o próprio currículo e a transversalidade dos conteúdos, e ainda a adequação aos objetivos de aprendizagem especificamente definidos para a aula de investigação (Fujii, 2016).

Desta forma, a seleção e a adaptação da tarefa são processos influenciados pela definição do objetivo de aprendizagem e que se desenvolve até a condução da aula. É uma dimensão da prática letiva fundamental no estudo de aula, pois exige a exploração de diversos materiais, tais como manuais escolares, tarefas e artigos de investigação. Exige, ainda, a antecipação das possíveis estratégias e dificuldades dos alunos na realização da tarefa e a antecipação de formas do professor apoiar a sua atividade durante o trabalho autónomo.

Elaboração do plano de aula

Antes de conduzir uma aula, a elaboração do respetivo plano deverá ser detalhada, o que requer tempo e envolvimento por parte do professor (Superfine, 2008). Nessa linha, Serrazina (2017) refere que este momento faz parte da prática do professor e que pode "ser considerad[o] como uma forma detalhada de desenhar o ensino" (p. 13), na perspetiva de "antecipar os acontecimentos da aula, as formas como os alunos responderão às tarefas propostas e como essas respostas podem ser usadas para promover os objetivos de aprendizagem" (p. 15).

Como salienta Fujii (2019), na etapa do planeamento, os professores precisam de projetar a aula, elaborando um documento que descreve o tema da aula, os objetivos de aprendizagem relativos ao conteúdo, as conexões entre os conteúdos atendendo à sua transversalidade curricular, a justificação para a abordagem proposta para a aula, além das possibilidades de pensamento do aluno acerca da tarefa.

Assim, o plano de aula é um recurso importante no estudo de aula, contemplando as seguintes funções: a) apresentar as ideias de ensino dos professores para um objetivo comum; b) extrair o essencial dos materiais de ensino; e c) manter o foco no ensino (Fujii, 2014). Neste sentido, no Japão as aulas de Matemática seguem habitualmente uma sequência de quatro fases: a) apresentação do problema; b) resolução do problema pelo aluno; c) discussão da solução do problema; e d) síntese da aula (Fujii, 2018, 2019). Tais fases se aproximam do que é frequentemente proposto em Portugal, numa perspetiva exploratória, em que o professor estrutura a aula, promovendo a ação do aluno, ou seja, "deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005, p. 13).

Para Ponte *et al.* (2015), a elaboração de um plano de aula estruturado é necessária para garantir a organização e fluidez dos diferentes momentos da aula, bem como para a concretização de uma gestão do tempo mais eficaz. Para estes autores, é essencial que o plano de aula contemple: tarefas e atividades de aprendizagem, a duração esperada de cada momento, a antecipação de possíveis respostas dos alunos, a antecipação de possíveis respostas do professor e, ainda, os objetivos de cada momento e a respetiva forma de avaliação.

METODOLOGIA

A pesquisa realizada é de abordagem qualitativa (Bogdan y Biklen, 1994), com análise descritiva e interpretativa. Os dados foram recolhidos a partir de um estudo de aula, realizado em uma escola de 2.º e 3.º Ciclo do Ensino Básico, em Portugal. A estrutura do estudo de aula seguiu o ciclo de cinco fases de Fujii (2018), tal como indicado na figura 1. As sessões tiveram início em dezembro de 2022 e conclusão em fevereiro de 2023 (tabela 1). Além das nove sessões presenciais, com duração de cerca de três horas, as professoras trabalharam em torno das tarefas e do planeamento a partir de documentos partilhados online, realizando alterações aos documentos digitais, de acordo com as decisões colaborativamente tomadas durante as sessões.

Tabela 1. Fases e sessões do estudo de aula

Fases do estudo de aula	**Sessões**
Definição do objetivo	Sessões 1 e 2
Planeamento da aula de investigação	Sessões 3, 4, 5 (Entre estas sessões, as professoras trabalharam nas tarefas e no plano de aula a partir de documentos online)
Condução e observação da 1.ª aula	Sessão 6 (Condução da aula por Marta)
Discussão pós-aula	Sessão 7
Condução e observação da 2.ª aula	Sessão 8 (Condução da aula por Diana)
Discussão pós-aula e reflexão	Sessão 9

Fonte: Elaboração própria.

O grupo envolveu duas professoras do 5.º ano (ensinando alunos com idade entre 9 e 11 anos), identificadas como Marta e Diana, nomes fictícios. Marta profissionalizou-se no Ensino de Matemática e Ciências para o 2.º ciclo e leciona há cerca de 27 anos, enquanto Diana formou-se em Biologia e leciona há cerca de 30 anos. Ambas trabalhavam na mesma escola e já partilhavam alguns momentos de coadjuvação quando participaram em um primeiro estudo de aula em 2021. As duas professoras mostraram interesse em dar continuidade ao estudo de aula na escola onde lecionavam, no ano letivo de 2022-2023, e participaram do segundo estudo de aula juntamente com Petra, professora de Matemática do 3.º ciclo. Por motivos pessoais, Petra decidiu não participar no terceiro estudo de aula, que decorreu entre dezembro de 2022 e fevereiro de 2023. Apesar da redução do grupo, Marta e Diana mostraram vontade de participar num novo estudo de aula por considerarem que o trabalho que fizeram neste processo de desenvolvimento profissional foi diferente da sua prática usual e, ainda, devido aos desafios colocados pelas mudanças nos documentos orientadores do currículo. Este terceiro estudo de aula teve como facilitadora a segunda autora e a primeira autora como observadora em todas as sessões. É de notar que, apesar de reduzido, o número de professoras participantes representa a maioria dos professores de Matemática do 2.º ciclo da sua escola.

Os dados foram produzidos a partir da observação participante, realizada pelas duas primeiras autoras (Marconi y Lakatos, 2003). Todas as sessões foram gravadas em áudio e transcritas. As investigadoras organizaram igualmente um diário de bordo, após cada sessão de estudo de aula realizada com as professoras.

Esses dados foram analisados com recurso à análise de conteúdo (Bardin, 2021), no sentido de entender e interpretar os modos de selecionar e adaptar a tarefa e as discussões sobre o plano de aula, produzidas pelas professoras. Para isso, realizámos: a) pré-análise: leitura de todos os materiais, selecionando as sessões envolvendo o planeamento (sessões 3, 4 e 5 e os documentos digitais produzidos pelas professoras entre estas sessões) e o plano de aula; b) análise do material: leitura e codificação dos materiais (identificação de temas); e c) tratamento dos dados: organização dos temas e categorias.

A tabela 2 apresenta a organização dos temas e categorias. Os temas de análise surgem da atividade realizada pelas professoras na fase de planeamento do ciclo do estudo de aula (Fujii, 2018): seleção e adaptação da tarefa e elaboração do plano de aula. Embora estes temas se relacionem, procuramos analisar cada um separadamente, considerando as diferentes categorias. As categorias consideradas são informadas pela teoria e pelos próprios dados. Para o tema seleção e adaptação da tarefa, consideramos os princípios de Fujii (2015, 2018) para a elaboração de tarefas, listados de A a E. Para o tema plano de aula, consideramos aspetos sugeridos em Ponte *et al.* (2015), listados de G a J. Em ambos os temas identificámos a subcategoria promoção de mudanças na prática das professoras (F), inspirada pelos resultados de Benedict *et al.* (2023). Neste sentido, os excertos identificados com F) são aqueles cuja seleção e adaptação da tarefa ou a elaboração do plano de aula evidenciaram existirem mudanças na prática das professoras.

Tabela 2. Temas, categorias e subcategorias

Temas de análise	**Categorias e subcategorias**
Seleção e adaptação da tarefa	Princípios para as tarefas: A) Adequação ao objetivo da aula; B) Interessante para os alunos; C) Adequação em termos de desafio; D) Permite diferentes resoluções; E) Promove conhecimentos básicos. F) Promove mudanças na prática das professoras.
Plano de aula	Aspetos para o planeamento: G) Definição do objetivo, H) Gestão do tempo; I) Definição dos recursos; J) Antecipação da atividade dos alunos e do papel do professor. F) Promove mudanças na prática das professoras.

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados apresentados na próxima seção seguem a seguinte codificação, de acordo com os exemplos: S4T1 – Sessão 4, Tarefa, excerto 1; S5P11 – Sessão 5, Plano de aula, excerto 11. Na realização deste estudo seguimos as normas éticas próprias da investigação em educação (AERA, 2011).

RESULTADOS

Nesta seção, consideramos os resultados organizados em dois pontos, orientados pelas questões de investigação: a) seleção e adaptação da tarefa e b) elaboração do plano de aula.

Seleção e adaptação da tarefa

Na primeira sessão do estudo de aula, as professoras decidiram trabalhar com o subtópico *Frações, decimais e percentagens*, incluído no tópico *Números racionais*, contemplado no tema *Números*, justificando que, por experiência prévia, os alunos têm muita dificuldade em relacionar as diferentes representações. Na segunda sessão, as professoras partilharam experiências como trabalham habitualmente o tópico escolhido e analisaram os documentos curriculares, procurando identificar possíveis conhecimentos prévios dos alunos (do 4.º ano), e os objetivos pretendidos para o 5.º e 6.º ano, o que levou a uma reflexão acerca da transversalidade do subtópico selecionado. Na terceira sessão, o grupo estudou materiais sobre números racionais e a relação entre as representações (Graça *et al.*, 2018), analisando tarefas próximas do objetivo da aula. Na quarta sessão, o grupo discutiu a tarefa de diagnóstico e a exploração das tarefas e, na quinta sessão, discutiu possíveis modificações das tarefas e do plano de aula. As professoras acabaram por propor que as tarefas fossem planeadas a partir de algumas adaptações da coletânea de tarefas de apoio às novas *Aprendizagens Essenciais* (Canavarro *et al.*, 2021) e da elaboração de uma tarefa com exploração de uma *applet* (figura 2). Nas figuras 2 e 3 encontram-se as versões finais das tarefas propostas aos alunos.

Tarefa 1: Dobrando folhas
Para esta tarefa não será entregue qualquer enunciado aos alunos. O material a disponibilizar deverá ser um quadrado de papel e solicitar aos alunos que tenham material de escrita.
Antes de dar qualquer instrução, o professor dobra o seu quadrado de papel ao meio, pinta uma das partes e representa a parte pintada com a participação dos alunos.
Em seguida, o professor solicita que cada aluno dobre o seu quadrado de papel num qualquer número de partes iguais e que pinte de sua vontade as partes que quiser. Os alunos devem representar de diferentes formas as partes por si pintadas.

Figura 2. Tarefa 1[5]. Fonte: Elaboração própria.

Utilizando as três cores pintem as 100 quadrículas ao vosso gosto. Registem, na seguinte tabela, as diferentes formas de representar as quantidades pintadas.

Cor	Fração	Numeral decimal	Percentagem
Azul			
Laranja			
Branco			

Figura 3: Tarefa 2[6]. Fonte: Elaboração própria.

Apesar de as professoras terem decidido na primeira sessão trabalhar o subtópico frações, decimais e percentagens, foi apenas na segunda sessão que definiram como objetivo *estabelecer relações entre frações, decimais e percentagens*, no sentido de promover a fluência de transição entre estas representações. Na sessão 4, Diana e Marta dialogaram sobre a definição deste objetivo:

Diana: Porque lá está, porque que nós fizemos isto? Porque estivemos a falar e percebemos que uma grande dificuldade dos alunos era a fluência de umas [representações] para as outras e optámos por fazer isto. Então, a [facilitadora] nos trouxe tanta coisa, a gente podia ter feito tanta coisa. Mas lá está, escolhemos fazer isto porque...

Marta: Não quer dizer que a gente não vá fazer outras [tarefas] depois para as equivalências. (S4T1)

[5] Tarefa adaptada da tarefa n.º 23 da coletânea de tarefas de apoio às novas *Aprendizagens Essenciais* do 5.º ano (http://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/resources/coletanea_5ano.pdf).

[6] Tarefa elaborada para ser realizada pelos alunos na *applet* VISNOS (https://www.visnos.com/demos/percentage-fraction-decimals-grid).

Neste excerto, as professoras justificam a intenção de terem escolhido este objetivo específico, considerando as dificuldades dos alunos, que foram antecipadas a partir da sua experiência. tendo por base a exploração que as professoras fizeram de várias tarefas para trabalhar o subtópico em questão, Diana reflete sobre a seleção da tarefa, apontando as dificuldades dos alunos na mudança entre representações. Marta salientou ainda que, para outros objetivos específicos, tal como trabalhar as equivalências entre frações, podiam selecionar outras tarefas.

Ainda na sessão 4, as professoras evidenciaram que a utilização da *applet* lhes parecia adequada ao objetivo definido para a aula, e, além disso, provocaria interesse nos alunos:

Marta: Em vez de nós darmos a percentagem, cada par cria um desenho e isso já vai ficar tudo desencontrado em percentagens.

Diana: Podia ser mesmo livre. Só que eu acho que vai ser outra aula, vai aparecer uma panóplia [de números]...

Marta: Tu dás só o número de cores. E vai aparecer percentagens de cores, por exemplo, vai haver uns com laranja puseram 50 sobre 100, há outros 25 sobre 100. E aí já temos os exemplos diferentes. E eles gerem as cores como quiserem...

Diana: Isso demora...

Marta: Demora mais para discutir. Era só para eles experimentarem o gosto deles...

Marta: E como eles estão a desenhar e gostam de vir ao computador, aquilo vai ser espetacular.

Diana: E gostam de vir ao quadro! (S4T2)

Desta forma, ao dialogarem sobre a tarefa 2, as professoras decidiram que esta deveria possibilitar uma exploração mais livre da *applet*, para que os alunos pudessem criar diferentes desenhos, registando as quantidades associadas a cada uma das três cores e as respetivas quantidades em representação em fração, decimal e percentagem. Valorizaram, ainda, a utilização do computador e do quadro da sala por parte dos alunos.

Além de se mostrarem atentas à relação da tarefa com o objetivo da aula e da necessidade de que este fosse interessante para os alunos, Marta e Diana dialogaram sobre a utilização de estratégias erradas por parte dos alunos:

Diana: Se calhar, como eles não sabem fazer, arranjam uma regra que é tapar a vírgula, porque alguém se calhar também os ensinou a tapar, para depois compararem só da vírgula para lá. Porque também já os ensinaram a fazer isso. Quando temos alguns números com o mesmo número de casas decimais, tapamos o primeiro [algarismo das unidades], para comparar... [a parte depois da vírgula].

Marta: Que engraçado! Explico sempre ao contrário. Eu digo que primeiro têm que ler a parte inteira antes da vírgula. (S3T3)

Identificada esta dificuldade dos alunos para lerem e ordenarem numerais decimais, as professoras continuaram o diálogo, refletindo sobre a exploração da *applet* e de que forma a tarefa que a mobilizava podia promover as aprendizagens dos alunos:

Diana: E depois era, de alguma forma, lhes dar um desafio porque a *applet* eu acho que é bastante fácil, mas que os levasse a mexer na parte que eles têm dificuldade, que é as percentagens e os decimais. Eu acho que nas frações eles até percebem que a parte que está pintada está em cima, a parte que está dividida está em baixo, e aquilo até vai andando. O relacionar isto é que... Agora, o que lhes havia de ser pedido não sei.

Marta: Tem que ser pedido, mas temos que pensar melhor [como pedir]. (S3T4)

Relativamente ao desenho da tarefa com a *applet*, Diana aprofundou a reflexão acerca das dificuldades dos alunos na compreensão dos numerais decimais. A professora continuou assumindo que explorar a *applet* teria um nível de desafio adequado a todos os alunos, nomeadamente no significado da fração nesse contexto. Sugeriu que essa tarefa deveria ser desafiante e estar relacionada com a dificuldade associada aos numerais decimais e às percentagens, ideia apoiada por Marta.

Na sessão 5, a última antes da aula de investigação a ser conduzida por Marta, Diana valorizou o potencial da tarefa 1 no que diz respeito à diversidade de dobragens (S5T5):

Diana: Eu acho que a folha A4 e as diferentes dobragens tornam também uma tarefa muito rica, porque aí aparecem muitos [números] e aparece a possibilidade de ordenar na reta.

No entanto, apesar de ambas as professoras concordarem acerca dessa potencialidade, Marta levantou a questão da promoção do aparecimento de diferentes representações. As professoras concluíram que a pergunta a colocar aos alunos deveria enunciar já essa possibilidade:

Diana: É claro que vai aparecer as diferentes formas...

Marta: Ou não. Aí é que o professor podia, se não houvesse nenhuma representação além da fração, o professor podia dizer: Então, mas não se pode escrever de outra forma?...

Diana: Se a gente quiser diferentes formas de representar a parte pintada...

Marta: Pois, diferentes formas, estamos a dizer que não é só uma, há mais. (S5T6)

Ao longo das sessões, o trabalho em torno das tarefas suscitou reflexões, por parte das professoras, acerca da sua prática. Marta, ainda na sessão 3, destacou a diversidade de estratégias que podem surgir na realização de uma tarefa, afirmando que, apesar de a repetição de procedimentos conduzir a resoluções válidas, não é o que se pretende na aprendizagem:

Marta: Eu acho que fazer sempre da mesma maneira, os tais procedimentos que a gente falava outro dia, se calhar resultam. Porquê? Porque eles acabam por decorar os procedimentos. Mas isso não é o que se pretende na aprendizagem... E eu achava que os procedimentos e a repetição, fazer com que eles tivessem de fazer assim desta forma, ajudava-os a saber melhor as coisas e, portanto, mesmo que eles tivessem as várias ideias deles e as várias representações, eu levava-os a fazer assim, daquela maneira. (S3T7)

Na mesma sessão, Marta associou o sucesso dos alunos à forma como os professores entendem e mobilizam as tarefas. No entanto, salientou a ausência de tempo para preparar essas tarefas, utilizando o manual como recurso principal. Relacionou, também, as dificuldades que identificava nos alunos, ao longo dos anos, à natureza das tarefas:

Marta: Mas, no fundo, o que nos interessa a nós? O que é que nós queremos? Queremos que saibam para ter sucesso, quer dizer na nossa concepção das tarefas... Mas nós não temos tanto tempo para as preparar assim, portanto, o nosso suporte é muito o manual. E a gente, às vezes, de facto, estamos a pensar nas coisas, sobretudo em grupo e depois, ano após ano, acontece isto, eles continuam, ano após ano, a ter as mesmas dificuldades. (S3T8)

Neste excerto, Marta atribuiu à reflexão em grupo a potencialidade de discutir sobre as tarefas de forma ancorada às dificuldades dos alunos. Já na sessão 4, foi Diana quem refletiu acerca do tipo de tarefa utilizado previamente na sua prática para trabalhar este subtópico e a potencialidade da diversificação das tarefas:

Diana: Nós habitualmente representamos isto assim e porque de alguma forma havia o hábito de os treinar muito a eles identificarem na figura e depois transformarem em fração. É verdade, porque havia o treino de identificar quantos é que estão pintados e em quantos é que está dividida [a figura]. Que é para eles saberem o que é que fica em numerador e em denominador...

Facilitadora: Mas também incluir essa variedade de tarefas.

Diana: Pois, aqui o problema é a gente focar em fazer uma coisa quando a gente pode fazer tudo! (S4T9)

Estes excertos ilustram que a colaboração entre as professoras, por vezes apoiada pela facilitadora, sustentou as tomadas de decisão acerca das tarefas, no sentido dos princípios definidos por Fujii (2015). Ancoradas nas diretrizes curriculares, as professoras, após definirem o objetivo específico da aula, procuraram que a tarefa correspondesse a este objetivo, em vez de atender a vários objetivos de aprendizagem dentro do mesmo tema matemático. Com isso, a tarefa foi selecionada e adaptada pelas professoras, sem a preocupação de abranger muitas questões ou de permitir trabalhar vários conteúdos (como as operações com frações). A intenção foi desenvolver conhecimentos como a relação entre a representação em fração, decimal e percentagem. A decisão de articular as tarefas 1 e 2, que envolveu a utilização de um *applet*, foi justificada pelas professoras, não apenas pelas potencialidades para alcançar o objetivo da aula, mas para cativar o interesse dos alunos, dando-lhes instrumentos digitais, além do lápis e papel. Outro aspeto que a discussão acerca das tarefas fez emergir foram relatos das professoras que evidenciaram mudanças ou a intenção de mudanças na sua prática em relação à seleção das tarefas.

ELABORAÇÃO DO PLANO DE AULA

A elaboração de um plano de aula pode contribuir para o sucesso da aula, mesmo que outros fatores interfiram nos resultados relativos à aprendizagem dos alunos. Para a definição do objetivo da aula, já desde a primeira sessão, as professoras selecionaram o subtópico *Frações, decimais e percentagens*. A escolha do subtópico levou em consideração as dificuldades dos alunos.

Na sessão 3, ao dialogarem acerca das dificuldades dos alunos na transição entre diferentes representações, Marta apontou que "é na parte decimal, porque depois a parte decimal condiciona a percentagem" (S3P10). Nesta sessão, Marta e Diana exploraram registos de alunos provenientes do estudo de Graça *et al.* (2018), sendo que Marta referiu que um erro comum dos alunos é substituírem o traço de fração por uma vírgula, na passagem da representação em fração para decimal. Já na passagem da representação decimal para percentagem, os alunos, de acordo com Marta, tendem a excluir a vírgula, assumindo que este novo número é a representação do anterior (por exemplo, a fração $\frac{1}{4}$ seria representada como 1,4 em decimal e como 14% em percentagem).

Enquanto as professoras trabalhavam em torno da tarefa para a aula, a facilitadora questionou-as acerca do objetivo da aula. Esta questão pretendia redirecionar a atenção das professoras para um objetivo de aprendizagem por elas previamente definido. Na sequência, Marta respondeu: "Eu acho que o nosso objetivo é uma coisa mais pequena que os faça chegar às representações diferentes com frações, decimais e percentagem. Que eles percebam que é a mesma coisa" (S3P11).

Na sessão 4, as professoras exploraram diferentes tarefas com atenção ao objetivo da aula, deixando explícito que não pretendiam desenvolver nessa aula a equivalência de frações, mas sim a transição entre diferentes representações:

Diana: Só que eu quando pensei, ou quando pensamos no utilizar e depois fiz aquela coisinha da *applet*, foi no sentido de usar dois instrumentos, um assim...

Marta: Não era para desenvolver muito esta parte [equivalência de frações], não é?

Diana: É que nós podemos depois fazer posteriormente com o trabalho deles, podemos continuar a fazer.

Marta: Não é na mesma aula continuar com as frações equivalentes, nem nada disso. (S4P12)

As professoras planearam a aula para um período de 90 minutos. Estes momentos e tempos são provenientes do plano de aula escrito pelas professoras, inspirado em Ponte *et al.* (2015), descritos na tabela 3.

Tabela 3. Estrutura da aula (momentos e tempos, de acordo com o plano de aula escrito)

Momentos	**Tempo**
Introdução da tarefa 1	1 a 5 minutos
Trabalho autônomo (resolução da tarefa 1, individualmente)	5 a 7 minutos
Discussão coletiva	20 a 30 minutos
Introdução da tarefa 2 (*Applet*)	5 minutos
Trabalho autônomo (resolução da tarefa 2, em dupla)	15 minutos
Discussão coletiva	25 minutos

Fonte: Elaboração própria.

Nesta organização, as professoras demonstraram preocupação durante as sessões de planeamento com a escolha das tarefas e com o tempo destinado para cada ação:

Marta: Eu estou um bocadinho [preocupada] com a gestão do tempo. Porque eu sei que quando a gente elabora a tarefa nunca temos tempo para fazer. É sempre muito mais do que...

Diana: Demora sempre mais tempo que a gente planifica.

Marta: E depois na discussão ou na exploração, aquela primeira [tarefa] vai dar...

Diana: Também acho. (S3P13)

As professoras destacaram a preocupação com o tempo de exploração da tarefa 1 pelos alunos e do tempo da discussão coletiva, que podia ser ampliado além do previsto no planeamento. A facilitadora retomou o planeamento do tempo:

Facilitadora: Então, aqui, para o trabalho autônomo, fazemos... 10 minutos? Ou ainda vos parece pouco?

Marta: Parece pouco, mas vai ser 10 a 15, porque há...

Facilitadora: Vamos começar nos 50 minutos da [primeira parte da] aula. Se tivermos 15 minutos [para trabalho autônomo], depois como é que fazemos a ...

Marta: E é sempre para mais, não para menos... Depois a tendência é sempre para gastar mais do que estamos a prever. (S5P14)

Diante dessas preocupações, as professoras tomaram algumas decisões para otimizar o tempo, como a organização do material anteriormente à aula, a escolha de dobragens do papel apenas de alguns alunos, o uso do computador da sala de aula para projeção da *applet* e da tabela de registo. Essas e outras estratégias foram pensadas e analisadas pelas professoras, considerando o tempo necessário para cada etapa da aula.

Para a aula, as professoras planearam primeiramente o uso de papéis no formato retangular para os alunos realizarem as dobragens necessárias na tarefa 1. No entanto, na sessão 5, Diana refletiu sobre as potencialidades do papel no formato quadrangular, considerando o objetivo da aula:

Diana: A vantagem é vir na diagonal, vir ao meio e depois dobrar.

Marta: Mas este tamanho favorece poucas dobragens.

Diana: Favorece poucas dobragens, mas favorece o objetivo, que é os 50, os 25 e os 75. Aliás, os 50 e os 25. Os 75 são capazes de só surgir após a discussão. (S5P15)

Na sequência, a facilitadora questionou se a substituição do formato retangular pelo quadrangular traria alterações ao enunciado da tarefa 1:

Facilitadora:	Ao fazer com o quadrado, as indicações seriam para fazer exatamente as dobragens ao meio e em quatro, é dar essas indicações?
Diana:	Era tentando não existir o dividir em três, por exemplo.
Facilitadora:	Então é uma adaptação da [tarefa da] coletânea.
Diana:	Pois é. (S5P16)

No seguimento, Diana explicou que retomou a análise da tarefa presente na coletânea em que se tinham baseado e percebeu que: "Tudo o que lá aparece são múltiplos de dois. É o dois, é o quatro, é o oito, o dezasseis e o trinta e dois" (S5P17). Deste modo, a escolha pelo papel em formato quadrangular possibilitaria, no seu entendimento, a articulação com "a sequência que nós queremos dar para a *applet*" (S5P18). Ao longo do diálogo, as professoras justificaram o porquê da escolha da folha no formato quadrangular, considerando o proposto na *applet:*

Marta:	Na *applet* aparece mais do que essas [frações].
Diana:	Sim, porque na *applet* a gente vai trabalhar as cem [quadrículas], que é dez por dez. Portanto, acaba por ser útil o quadrado. (S5P19)

E para justificar a escolha da *applet* como um recurso a usar na aula, Diana disse:

> Eu, quando [a facilitadora] nos mostrou, percebi que, mesmo na *applet*, uma das coisas que eu achei boa foi eles poderem relacionar [as representações]. Porque era o nosso objetivo com a aula relacionar as frações, os decimais e as percentagens. (S4P20)

A professora evidencia a preocupação de contemplar o objetivo de aprendizagem da aula, usando dois recursos, ressaltando a relação com os materiais (papel em formato quadrangular e applet). No seguimento, as professoras anteciparam a atividade dos alunos e suas ações, esclarecendo como pensavam conduzir a aula:

Marta: Eu acho que eles vão perguntar, para além da nossa explicação, vão perguntar quantas partes é que vão pintar. Eu acho que isso vai surgir. Quantas partes? O que nós dizemos, para pintar o que eles quiserem, mas vai aparecer se calhar "Ó professora, mas agora vamos pintar quantas?" Pronto, portanto, também temos que indicar, esclarecer, que podem pintar as partes, a parte, ou as partes, que quiserem. Que quiserem do quadrado.

Diana: E que a representação deve estar de acordo com a parte pintada. (S5P21)

Este e os outros excertos evidenciam que as professoras consideraram a importância da previsão dos acontecimentos da aula, antecipando as questões a colocar e as dúvidas dos alunos. Desta forma, o plano de aula contemplou a antecipação da atividade matemática dos alunos e, ainda, possíveis ações das professoras, nomeadamente de como formular questões para colocar aos alunos. A gestão do tempo da aula, de acordo com os momentos estruturados pelas professoras, foi também bastante discutida. Nesta dimensão, as professoras evidenciam uma consciencialização acerca dos tempos que cada momento precisa para que a sua realização e qualidade não fiquem comprometidas, pois como disse Diana "a tendência é gastar mais tempo" do que aquele que habitualmente se antecipa. A definição do objetivo de aprendizagem foi crucial para o plano da aula. Ainda que a tarefa estivesse pensada para o objetivo específico definido, as professoras identificaram que a discussão da tarefa poderia permitir, por exemplo, explorar a equivalência de frações. Portanto, ao longo da elaboração deste plano, as professoras decidiram que esse seria um objetivo de aprendizagem para uma aula posterior, definindo com maior clareza o que pretendiam que fosse o foco da discussão da aula.

DISCUSSÃO

Os resultados sugerem diversos aspetos para discussão em relação à fase de planeamento na qual Marta e Diana participaram, nomeadamente no que se refere aos princípios para as tarefas a propor e aos aspetos a considerar no plano de aula (tabela 4).

Tabela 4. Síntese das subcategorias identificadas dedutivamente

Categorias	Subcategorias	Excertos ilustrativos
Seleção e adaptação da tarefa (Fujii, 2015, 2018)	A. É apropriada ao objetivo da aula.	S4T1
	B. É interessante para os alunos.	S4T2
	C. Tem um nível de desafio adequado.	S3T3
	D. Permite diferentes resoluções e/ou representações.	S5T5 S5T6
	E. Permite desenvolver conhecimentos basilares.	S3T3
Plano de aula (Ponte *et al.*, 2015)	G. Definição do objetivo.	S3P11
	H. Gestão do tempo.	S3P13 e S5P14
	I. Definição dos recursos.	S5P15 e S5P16
	J. Antecipação da atividade do aluno e do papel do professor.	S5P21
	F. Fomenta mudanças na prática das professoras.	S3T7, S3T8, S4T9, S4P12, S4P20

Fonte: Elaboração própria.

Em relação aos princípios para as tarefas, considerando o objetivo da aula, as professoras mostraram ponderação nas suas escolhas, ancorando-se, principalmente nas dificuldades dos alunos no que se refere aos numerais decimais e na fluência entre as representações decimal, percentagem e fração (S4T1). Com a definição do objetivo, as tarefas foram selecionadas na perspetiva da aprendizagem do aluno, pois como alerta Fujii (2018), é preciso ter um cuidado especial na escolha das tarefas para que possibilitem a exploração das ideias matemáticas. A preparação do plano de aula foi de importância fundamental, pois envolveu a definição do objetivo, a seleção e adaptação da tarefa, a escolha dos materiais e recursos e a gestão do tempo (Doig *et al.*, 2011; Ponte *et al.*, 2015).

Marta e Diana acreditaram que os alunos podiam explorar de modo mais livre e com mais interesse a tarefa, resultando na compreensão das diferentes representações dos números racionais (S4T2). Tais ideias estão de acordo com o proposto por Fujii (2015, 2018) ao destacar que, se a tarefa é do interesse dos alunos, estes começam a resolvê-la sem a ajuda do professor. As professoras refletiram ainda sobre a adequação das tarefas, considerando os desafios e a promoção de aprendizagem dos conhecimentos base dos alunos (S3T3). E, também, ao realizarem a seleção e adequação das tarefas, valorizaram a importância de diferentes representações serem promovidas ao estabelecer a relação entre as dobragens do papel e a *applet* (S3T4). Desta forma, as decisões tomadas acerca das tarefas vão ao encontro das sugestões de Fujii (2015, 2018) verificando-se que as tarefas precisam ter um nível adequado aos alunos, ou seja, precisam considerar as suas dificuldades, conhecimentos e interesses, favorecendo diferentes formas de resolução e potenciando diferentes aprendizagens. As decisões tomadas acerca das tarefas vão também ao encontro das sugestões presentes no documento das *Aprendizagens Essenciais* (Canavarro *et al.*, 2021), nomeadamente por promoverem o papel ativo dos alunos na sua resolução e discussão, bem como por promoverem a articulação com recursos tecnológicos.

Em relação aos aspetos relativos à elaboração do plano de aula, na definição do objetivo da aula de investigação as professoras demonstraram preocupação com as dificuldades dos alunos, com a explicitação do foco da aula (S3P11), mas, também, com a distribuição e organização do tempo, estruturando a aula em diferentes momentos (tabela 3). As escolhas e o planeamento das tarefas 1 e 2 seguiram um roteiro, considerando a gestão do tempo para cada momento da aula (S3P13, S5P14). Percebemos que as preocupações das professoras se aproximam do proposto por Ponte *et al.* (2015) ao assumirem a necessidade de definição do objetivo de aprendizagem para a aula, sugerindo rever as orientações curriculares, principalmente as relativas ao tópico a ensinar, considerando os "conceitos, procedimentos, representações e simbolismos, conexões importantes com outros tópicos matemáticos e com temas extra matemáticos" (p. 27). Identifica-se ainda que as professoras tiveram a preocupação de definir um objetivo para a aula que promovesse a aquisição dos conhecimentos básicos pelos alunos, adequados aos seus conhecimentos prévios e interesses (Fujii, 2015).

Nesta perspetiva, na elaboração do plano de aula, as professoras definiram os recursos, considerando o objetivo, a adequabilidade dos materiais, as aprendizagens dos alunos e as relações entre a folha de papel e a *applet* (S5P19). Para isso, consideraram as potencialidades dos recursos (S5P15) e a adequação do enunciado da tarefa (S5P16). Assim, o envolvimento das professoras vai ao encontro ao que referem Gueudet e Trouche (2009) sobre as vertentes que envolvem os recursos – material, matemático e didático. Na vertente material, destaca-se a folha de papel e a *applet*; na Matemática, o número racional, nas representações em fração, decimal e percentagem, com a seleção e adaptação das tarefas; e na didática, todos os elementos organizacionais para o plano de aula.

Para além de identificarem as dificuldades dos alunos, de anteciparem as questões e os entendimentos em relação as tarefas, salienta-se outra preocupação das professoras – a consideração dos possíveis trajetos da aula e a sua condução por parte das professoras (S5P21). Como indicam Ponte *et al.* (2015), ao preparar a aula, os professores precisam planear a "atividade dos alunos e suas possíveis dificuldades", antecipando o que os alunos terão facilidade de fazer, e as suas dificuldades, dúvidas e estratégias para a resolução das tarefas. Perry e Lewis (2008) discutem que a antecipação da atividade matemática dos alunos, embora sendo um desafio para o professor, é um processo importante na fase de planeamento do estudo de aula. Assim, num estudo de aula, tendo como alicerce a atividade matemática dos alunos são simultaneamente promovidas as suas aprendizagens e o desenvolvimento profissional dos professores. A antecipação da atividade matemática dos alunos e das suas possíveis estratégias de resolução possibilita ao professor planear discussões envolvendo toda a turma (Perry y Lewis, 2008), promovendo a sua confiança na aplicação e discussão de tarefas. Este aspeto contribui para reforçar que é importante contribuir para o desenvolvimento de um ensino de qualidade através da promoção da formação profissional de professores em serviço (OCDE, 2018).

Em relação à promoção de mudanças na prática das professoras, salientamos que a discussão e o planeamento em torno das tarefas possibilitaram que as professoras refletissem sobre a sua prática. Tais reflexões produziram mudanças nos modos de condução das aulas, pois, como apontou Marta, as tarefas desencadeiam uma diversidade de estratégias de resolução, que são diferentes da repetição de procedimentos (S3T7). Nessa mesma linha, as professoras evidenciaram uma compreensão e condução diferente das tarefas (S3T8), promovida pelas reflexões que ocorrem ao longo das sessões. Diana, por exemplo, reconheceu que, ao longo da sua prática letiva, costuma selecionar tarefas fechadas, próximas de exercícios, para que os alunos pudessem desenvolver destreza procedimental (S4T9). Demonstrou agora disponibilidade para desenvolver gradualmente esta nova prática, indo ao encontro da abordagem exploratória com recuso a tarefas mais desafiantes.

As professoras consideraram continuamente o objetivo da aula nas decisões que tomaram em relação à tarefa à elaboração do plano de aula (S4P12). Isso também pode ser percebido na escolha do uso da *applet*, no modo como Diana apontou o objetivo da aula e a sua perceção das potencialidades para relacionar as diferentes representações (S4P20). Tais resultados aproximam-se das pesquisas realizadas por Ponte *et al.* (2016) e Quaresma e Ponte (2021), em que destacam que os estudos de aula criaram oportunidades para que os professores se envolvessem em reflexões sobre a prática, evidenciando uma valorização de práticas colaborativas entre os professores como indutoras de mudanças na prática letiva.

De forma geral, as discussões das professoras quando selecionaram e adaptaram a tarefa para a aula de investigação incidiram os aspetos elencados por Fujii (2015, 2018). Por sua vez, as suas discussões em relação à elaboração do plano de aula foram também ao encontro dos aspetos definidos em Ponte *et al.* (2015). Salienta-se, ainda, que as discussões das professoras em relação a estas duas dimensões, tarefas e plano de aula, trouxeram reflexões simultâneas sobre contrastes na sua prática prévia de planeamento de uma aula, em comparação com o planeamento durante o estudo de aula. A experiência de Marta e de Diana documentada neste estudo contribui para reforçar o valor do estudo de aula para o desenvolvimento da prática letiva, bem como valorizar a importância de se tomar decisões refletidas acerca da tarefa e do plano de aula, tendo por base o conhecimento dos alunos e o conteúdo matemático.

CONCLUSÃO

Este artigo analisa a fase de planeamento de um estudo de aula, destacando como as professoras selecionaram e adaptaram a tarefa e elaboraram o plano de aula. As professoras selecionaram as tarefas ancorando-se nas dificuldades dos alunos, principalmente pela sua experiência profissional e, ainda, nos documentos curriculares. Essa decisão contribuiu para que delineassem o objetivo de aprendizagem, tendo cuidado com a adaptação das tarefas, a escolha de recursos, a antecipação das dificuldades e estratégias dos alunos, e as ações no encaminhamento e previsão das tarefas e da aula de investigação (Ponte *et al.*, 2015).

No que diz respeito ao plano de aula, salienta-se a preocupação com a delimitação do objetivo da aula e com a sequência das aulas posteriores. Para isso, as professoras discutiram e decidiram o objetivo da aula, a estrutura a condução de cada momento da aula e a seleção e adequação dos recursos. As suas decisões, apoiadas em reflexão, evidenciam as potencialidades do estudo de aula para a transformação da prática letiva e para a melhoria das aprendizagens dos alunos. Durante a fase de planeamento, as professoras adotaram a lente do aluno (Fernandez *et al.*, 2003), procurando entender o seu pensamento e comportamento, tendo em vista promover a compreensão dos conhecimentos matemáticos.

Como resultado deste estudo de aula, é importante salientar a promoção da mudança da prática letiva das professoras participantes, que foi desencadeada pela fase do planeamento da aula de investigação, com alicerce refletido na sua própria prática. Considera-se ainda que a tabela que sintetiza as categorias e subcategorias identificadas por Fujii (2015, 2018) e por Ponte *et al.* (2015) quanto às tarefas e aos planos de aula pode ser um instrumento de apoio para os professores durante a fase de planeamento da aula de investigação, fomentando a sua reflexão e colaboração.

A participação de apenas um reduzido grupo de professoras num só estudo de aula é uma limitação desta investigação, não se verificando o aparecimento ou omissão de novos aspetos aos já contemplados na literatura sobre tarefas (Fujii, 2015, 2018) ou sobre o plano de aula (Ponte *et al.*, 2015). Para investigações futuras, consideramos pertinente investigar outros grupos de professores, nomeadamente que participem de forma contínua em estudos de aula, no sentido de analisar o desenvolvimento da sua prática de planeamento de uma aula, de forma a compreender se as tarefas e os planos de aula atendem aos mesmos aspetos, e como isso se reflete na sua prática letiva. Neste artigo centrámo-nos na fase de planeamento, podendo ser também interessante estudar o contributo das outras fases do estudo de aula para o desenvolvimento do conhecimento das professoras sobre as tarefas e o planeamento.

REFERÊNCIAS

AERA (2011). Code of ethics, *Educational Researcher*, 40(3), 145-156, doi: 10.3102/0013189X11410403

Bardin, L. (2021). *Análise de conteúdo* (5.º ed.). Edições 70.

Benedict, A. E., Williams, J., Brownell, M. T., Chapman, L., Sweers, A., y Sohn, H. (2023). Using lesson study to change teacher knowledge and practice: The role of knowledge sources in teacher change. *Teaching and Teacher Education*, 122. https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103951

Bogdan, R. C., y Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., y Espadeiro, G. (2021), Aprendizagens essenciais de matemática no ensino básico, ME-DGE: https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagensessenciais-de-matematica

Clivaz, S., y Clerc-Georgy, A. (2020). Facilitators' roles in lesson study: from leading the group to doing with the group. En A. Murata y C. K. E. Lee (Eds.). *Stepping up lesson study: An educator's guide to deeper learning* (pp. 86-93). Routledge,

Doig, B., Groves, S., y Fujii, T. (2011). Lesson study as a framework for preservice teachers' early field-based experiences. En L. Hart, A. Alston, y A. Murata (Eds.). *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 181-200). Springer.

Fernandez, C., Cannon, J., y Chokshi, S. (2003). A US–Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and teacher education*, *19*(2), 171-185. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00102-6.

Fujii, T. (2014). Implementing Japanese lesson study in foreign countries: Misconceptions revealed. *Mathematics Teacher Education and Development. 16*(1), 65-83.

Fujii, T. (2015). The critical role of task design in lesson study. In A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 273-286). Springer.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of lesson study. *ZDM Mathematics Education*, *48*(4), 411-423. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3.

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahashi. *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1-21). Springer.

Fujii, T. (2019). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process lesson study. In R. Huang, A. Takahashi y J. P Ponte (Eds.). *Theory and practice of lesson study in mathematics: An international perspective* (pp. 681-704). Springer.

Gueudet, G., y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 199-218. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8.

Graça, S., Ponte, J. P., y Guerreiro, A. (2018). As representações dos números racionais na perspetiva de alunos do 5º ano de escolaridade. *Atas do ProfMat*, 172.

Marconi, M. D. A., y Lakatos, E. M. (2003). *Fundamentos de metodologia científica*. Atlas.

OECD (2018). *The future of education and skills: Education 2030: Position paper*. OECD. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/about/projects/edu/education-2040/position-paper/PositionPaper.pdf

Perry, R., y Lewis, C. (2008). What is successful adaptation of lesson study in the U.S.? *Journal of Educational Change*, 10(4), 365-391. https://doi.org/10.1007/s10833-008-9069-7.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P., Quaresma, M., y Mata-Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática*, *133*, 26-35.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., y Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática*, *30*(56), 868-89. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01.

Quaresma, M., y Ponte, J. P. (2021). Developing collaborative relationships in lesson study. *PNA*, *15*(2), 93-107. https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.16487.

Swan, M. (2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, 144 e 145, 67-72.

Serrazina, L. (2017). Planificação do ensino e aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.). *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula*, (pp. 9-32), APM.

Stigler, J., y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. The Free Press.

Superfine, A. M. C. (2008). Planning for mathematics instruction: A model of experienced teachers' planning processes in the context of reform mathematics curriculum. *The Mathematics Educator*, *18*(2), 11-22.

Takahashi, A., y Yoshida, M. (2004). Ideas for establishing lesson-study communities. *Teaching children mathematics*, *10*(9), 436-443.

Autora de correspondencia
Marta Cristina Cezar Pozzobon
Dirección: Instituto de Física e Matemática
Rua dos Ipês, Capão do Leão, RS, 96050-500
martacezarpozzobon@gmail.com

 https://doi.org/10.24844/EM3703.05

Causas del desempeño académico en matemáticas desde la perspectiva de estudiantes de secundaria

Factors affecting academic performance in mathematics from the perspective of middle school students

Katia Larissa Jáuregui Hernández,[1] Juan Carlos Rodríguez Macías[2]

Resumen: El bajo desempeño en matemáticas en el nivel de secundaria representa un reto importante del sistema educativo mexicano. Sin embargo, la evidencia disponible sobre los factores que lo explican desde la perspectiva de los propios estudiantes es limitada. El objetivo de esta investigación fue describir las experiencias relacionadas con la enseñanza y las actitudes hacia las matemáticas, a fin de identificar las causas del desempeño académico desde la voz estudiantil. Se empleó una metodología cualitativa con diseño de casos múltiples y entrevistas semiestructuradas aplicadas a 13 estudiantes de secundaria. El análisis, con enfoque interpretativo, se centró en comprender cómo experimentan y significan su aprendizaje en matemáticas, considerando tres ejes principales: prácticas de enseñanza, actitudes y factores asociados al desempeño académico. Los resultados señalan que los estudiantes atribuyen su bajo desempeño a una enseñanza mecánica, exceso de contenidos, bases débiles en álgebra, distracciones en el aula, presión social y familiar, y baja autoeficacia. A partir de ello, se podrían implementar estrategias de enseñanza activas que fortalezcan la autoeficacia, promuevan un clima emocionalmente

Fecha de recepción: 23 de abril de 2024. **Fecha de aceptación:** 8 de octubre de 2025.

[1] Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo (IIDE), de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), México, katia.jauregui@uabc.edu.mx, https://orcid.org/0009-0008-0527-7283.

[2] Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo (IIDE), de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), México, juancr_mx@uabc.edu.mx, https://orcid.org/0000-0002-1115-9848.

seguro y atiendan tanto los factores personales como las condiciones del entorno escolar.

Palabras clave: *enseñanza de las matemáticas, actitudes estudiantiles, desempeño académico, estudiante de secundaria.*

Abstract: Poor performance in mathematics at the middle school level represents a significant challenge for the Mexican education system. However, the available evidence on the factors that explain this from the students' own perspective is limited. The objective of this research was to describe experiences related to teaching and attitudes toward mathematics in order to identify the causes that determine academic performance from the students' perspective. A qualitative methodology was used with a multiple case design and semi-structured interviews conducted on thirteen middle school students. The analysis, with an interpretive approach, focused on understanding how they experience and interpret their learning in mathematics, considering three main areas: teaching practices, attitudes, and factors associated with academic performance. The results indicate that students attribute their low performance to mechanical teaching, excessive content, weak foundations in algebra, distractions in the classroom, social and family pressure, and low self-efficacy. Based on this, active teaching strategies could be implemented to strengthen self-efficacy, promote an emotionally safe environment, and address both, personal factors and school environment conditions.

Keywords: *mathematics teaching, student attitudes, academic performance, middle school student.*

1. INTRODUCCIÓN

Comprender lo que piensan, sienten y experimentan los estudiantes en sus clases de matemáticas es fundamental para identificar las verdaderas causas del bajo desempeño académico en esta asignatura. Escuchar sus voces permite ir más allá de los indicadores numéricos y reconocer los factores que, desde su propia vivencia, dificultan o favorecen su aprendizaje (Guzmán y Saucedo, 2015; Mateos, 2008).

En México, los bajos niveles de logro en matemáticas en educación secundaria representan un problema persistente que ha sido documentado en evaluaciones nacionales e internacionales. Datos recientes de la Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (MEJOREDU, 2023) revelan una disminución progresiva en los aciertos obtenidos conforme se avanza en los grados escolares. Esta tendencia se confirma en los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), donde el 66% de los estudiantes mexicanos de 15 años se ubicaron en el nivel 1 de desempeño, muy por debajo del promedio de los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (por sus siglas en inglés, OECD, 2023).

Este panorama ha sido asociado con diversos factores que afectan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Entre ellos, la persistencia de métodos de enseñanza centrados en la repetición mecánica de ejercicios y la falta de contextualización de las actividades, lo cual reduce el sentido formativo de la asignatura (Orrantia, 2006; Ricoy y Couto, 2018). Para Corredor-García y Bailey-Moreno (2020), el ambiente del aula también influye: cuando la interacción es limitada o el clima emocional no es favorable, disminuye la disposición del estudiante para involucrarse en su proceso formativo. Asimismo, autores como Carbonero y Collantes (2006), Kontaş (2016) y Mato y de la Torre (2009) han identificado barreras actitudinales derivadas de experiencias previas poco significativas y de prácticas de enseñanza que no favorecen la participación activa.

Si bien estas evidencias han permitido avanzar en la comprensión del fenómeno, aún persiste una limitación importante: la falta de investigaciones que incorporen directamente la perspectiva del estudiante. La revisión de la literatura permitió identificar que hay pocos estudios que partan de las experiencias estudiantiles para explicar las dificultades en el aprendizaje de matemáticas. Para Mateos (2008), recuperar estas voces permite interpretar cómo viven la escuela, qué sentido otorgan a las actividades que realizan y cómo experimentan el proceso educativo.

Esta perspectiva no refuerza una mirada centrada en el déficit, busca comprender el aprendizaje desde quienes lo experimentan cotidianamente.

Escuchar estas experiencias abre una vía de análisis más cercana, que permite situar el desempeño académico en relación con las condiciones, prácticas y significados que se configuran en las clases de matemáticas. Además, se espera que favorezca el diseño de estrategias pedagógicas contextualizadas, pertinentes y ajustadas a las necesidades reales de los estudiantes. En este marco, el objetivo de esta investigación fue describir las experiencias relacionadas con la enseñanza y las actitudes hacia las matemáticas, a fin de identificar las causas del desempeño académico desde la perspectiva del estudiante.

2. PERCEPCIONES, PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA Y ACTITUDES EN TORNO AL DESEMPEÑO ACADÉMICO EN MATEMÁTICAS

Este apartado presenta aportes conceptuales y empíricos que permiten comprender el desempeño académico en relación con las prácticas de enseñanza y las actitudes hacia las matemáticas.

2.1. Desempeño académico

Se entiende como el grado en que el estudiante alcanza los aprendizajes esperados para su nivel educativo, lo cual puede evaluarse mediante indicadores cuantitativos –como calificaciones y puntajes– y cualitativos, relacionados con la comprensión y aplicación del conocimiento (Erazo, 2013; Quintero y Orozco, 2013). Edel (2003) agrega que el desempeño académico considera la relación entre los conocimientos demostrados por el estudiante y los estándares correspondientes a su edad y grado escolar.

El análisis del desempeño académico contempla los logros evidentes junto con las percepciones que los estudiantes tienen sobre su propia trayectoria escolar. La percepción, entendida como un proceso cognitivo de interpretación y asignación de sentido a los estímulos del entorno, juega un papel central en la manera en que se vive y se comprende el aprendizaje (Vargas, 1994). Este proceso involucra una organización activa de la información, en la que intervienen experiencias previas, expectativas y emociones (Arias, 2006). En el caso de las matemáticas, las percepciones pueden generar barreras afectivas que influyen de forma negativa en la disposición para aprender, especialmente cuando existen antecedentes escolares negativos. Como señalan Guzmán y Saucedo (2015), las vivencias subjetivas están cargadas de conexiones personales, sociales y emocionales que inciden en la forma en que se enfrenta el proceso educativo.

Desde esta perspectiva, comprender el desempeño en matemáticas exige atender no solo los resultados obtenidos, también los contextos en los que se desarrolla el aprendizaje. Las prácticas de enseñanza y las actitudes hacia la asignatura forman parte de estos contextos, ya que pueden influir en la manera en que los estudiantes participan en clase, enfrentan los contenidos o interpretan sus experiencias escolares.

2.2. Prácticas de enseñanza de las matemáticas

Las prácticas de enseñanza son un componente clave del desempeño académico, ya que determinan las condiciones en las que ocurre el aprendizaje. Comprender cómo se diseñan, implementan y viven estas prácticas es útil para identificar dinámicas que pueden facilitar u obstaculizar la apropiación de los contenidos matemáticos.

Según Díaz-Barriga y Hernández (2010), las prácticas de enseñanza en matemáticas se componen de decisiones, acciones y recursos que el docente emplea para guiar, facilitar y evaluar el aprendizaje. Estas se manifiestan en diversas estrategias, tales como: la explicación directa en el pizarrón, la resolución guiada de ejercicios, el planteamiento de problemas abiertos, el trabajo colaborativo y el uso de juegos, materiales manipulativos o recursos digitales. También incluyen actividades como la aplicación de evaluaciones formativas, la exploración de contextos reales o simulados y la promoción de discusiones orales o escritas. En conjunto, estas acciones configuran el ambiente de aprendizaje, influyendo directamente en la forma en que los estudiantes comprenden y se relacionan con las matemáticas.

En México, la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2022) propone enfoques didácticos activos, sensoriales y significativos para favorecer el aprendizaje y la disposición hacia la asignatura de Matemáticas. Por ello, resulta pertinente analizar si estas prácticas se han implementado en las aulas y cómo son percibidas por quienes las experimentan. Más allá del diseño ideal, nuestro interés se centró en comprender las experiencias que dichas prácticas generan en estudiantes reales, con trayectorias escolares diversas.

Ahora bien, el currículo nacional de matemáticas contempla contenidos como fracciones, números negativos, álgebra elemental, geometría, funciones, estadística y probabilidad. Esta secuencia responde a una lógica progresiva que busca desarrollar habilidades de representación, interpretación y resolución de problemas en distintos contextos. El enfoque propuesto enfatiza el uso de situaciones reales como punto de partida para el aprendizaje de las matemáticas, buscando una comprensión significativa y la aplicación práctica del conocimiento. Además, el plan reconoce la importancia de contextualizar los aprendizajes de acuerdo con las características de cada entorno escolar, lo que implica abrir espacios para el codiseño y la participación activa de docentes y estudiantes en la construcción del conocimiento (SEP, 2022).

En muchos contextos educativos, la enseñanza de las matemáticas continúa centrada en la explicación del docente y la repetición de procedimientos. Schoenfeld (2016) advierte que este enfoque limita el desarrollo del pensamiento crítico y reduce la posibilidad de aplicar el conocimiento en otros contextos. En línea con esto, Ricoy y Couto (2018) señalan que el aprendizaje puede ser más significativo cuando se abordan situaciones vinculadas al contexto del estudiante y se fomenta la resolución de problemas reales en colaboración. Por su parte, Kontaş (2016) encontró que el uso de materiales manipulativos en estudiantes de secundaria tuvo un impacto significativo tanto en su desempeño académico como en sus actitudes hacia las matemáticas.

2.3. Actitudes hacia las matemáticas

Las prácticas docentes dejan huella en la forma en que los estudiantes perciben las matemáticas; por ello, se exploraron las actitudes que los estudiantes desarrollan a lo largo de esta experiencia y cómo estas inciden en su aprendizaje. De acuerdo con las aportaciones de Katsantonis y Katsantonis (2024) y Wolf *et al.* (2020), en este estudio se definen las actitudes como evaluaciones globales que las personas realizan sobre objetos, ideas o disciplinas, dichas evaluaciones integran tres dimensiones interrelacionadas: cognitiva (creencias o pensamientos sobre el objeto), afectiva (emociones y sentimientos que genera) y conductual (tendencias a actuar en función de esas creencias y emociones). Esta estructura tripartita ha sido utilizada para comprender cómo los individuos se posicionan frente a distintos fenómenos, incluyendo asignaturas escolares como las matemáticas.

Este estudio retoma dicho enfoque para analizar de forma diferenciada la asociación de cada una de estas dimensiones con el desempeño académico en matemáticas. Con base en las aportaciones de Katsantonis y Katsantonis (2024) y Olayinka y Olayinka (2023), se describen a continuación las dimensiones (cognitiva, afectiva y conductual) que integran esta estructura.

Dimensión cognitiva

Hace referencia a los procesos mentales asociados con las creencias, concepciones y valoraciones que el estudiante tiene respecto a las matemáticas. Incluye ideas relacionadas con su utilidad, dificultad, relevancia social o relación con la vida cotidiana. Estas cogniciones funcionan como evaluaciones relativamente estables que orientan el comportamiento del individuo. En el caso de las matemáticas, las creencias pueden expresar confianza o inseguridad, utilidad o irrelevancia, y están estrechamente vinculadas con la forma en que el estudiante comprende el papel de esta asignatura en su trayectoria académica y personal.

Dentro de esta dimensión, la autoeficacia emerge como un componente clave. Usher y Pajares (2008) la definen como las creencias que los estudiantes tienen sobre su capacidad para organizar y ejecutar acciones orientadas al logro de metas y señalan que estas creencias se construyen a partir de cuatro fuentes principales: logros previos, observación de modelos, mensajes de aliento y estados emocionales. Así, la forma en que un estudiante interpreta sus experiencias académicas, especialmente en matemáticas, contribuye a formar una creencia de capacidad propia que puede fortalecer o limitar su disposición para aprender.

Dimensión afectiva

Se refiere a las emociones y sentimientos que los estudiantes experimentan al relacionarse con las matemáticas. Esta dimensión comprende una gama de respuestas internas que van desde emociones momentáneas hasta estados de ánimo más persistentes. Todo aquello que el estudiante siente frente a una situación académica forma parte de la manera en que valora e interpreta su experiencia escolar. En este estudio, se consideraron como expresiones afectivas aquellas manifestaciones verbales que evidenciaron una experiencia emocional frente al aprendizaje de las matemáticas.

Para entender la forma de interpretar las emociones, nos basamos en las aportaciones de Pekrun (2006), quien las define como respuestas afectivas que experimentan los estudiantes frente a distintas situaciones escolares. Estas respuestas combinan lo que sienten internamente, los cambios físicos que pueden acompañarlas (como tensión o relajación) y la forma en que lo expresan verbalmente o mediante su actitud.

Asimismo, la organización de las expresiones afectivas observadas –como *"me sentí abrumado"*, *"me sentí cómodo"* o *"me sentí motivado"*– se realizó tomando en cuenta dos dimensiones: la valencia (agradable o desagradable) y el nivel de activación (alto o bajo). La valencia se refiere a si la emoción genera una sensación positiva o negativa. Por su parte, la activación alude a cuánta energía moviliza la emoción. Las emociones activantes generan tensión, alerta o impulso para actuar (como la ansiedad o el entusiasmo). Por su parte, las emociones desactivantes reducen el nivel de energía o conexión con la tarea (como la relajación o el aburrimiento). Esta clasificación de Pekrun (2006) permite identificar con mayor precisión el tipo de experiencia emocional y facilita su análisis en el marco de las actitudes hacia las matemáticas.

Martínez-Sierra y García-González (2017) exponen que las emociones de los estudiantes están estrechamente vinculadas con sus metas educativas; por ejemplo, la satisfacción se produce cuando logran resolver un problema, mientras que la decepción surge cuando no lo consiguen. Asimismo, en un estudio realizado con estudiantes de nivel medio superior, Romero-Bojórquez *et al.* (2014) identificaron que emociones como el miedo, la ansiedad, la frustración o el agrado impactan directamente en la disposición del estudiante hacia esta asignatura, afectando su percepción de competencia y su participación en el aula. Estos hallazgos subrayan la relevancia del componente afectivo dentro del constructo actitudinal.

Dimensión conductual

Se refiere a las acciones, hábitos e intenciones observables que reflejan la manera en que los estudiantes se relacionan con las matemáticas. Incluye manifestaciones como la participación activa en clase, la disposición a resolver ejercicios, el cumplimiento de tareas, la búsqueda de apoyo adicional o, en sentido contrario, la evasión de actividades relacionadas con la asignatura. Esta dimensión también puede expresarse en decisiones a largo plazo, como la elección de asignaturas optativas, áreas de estudio o trayectorias profesionales vinculadas o desvinculadas del campo matemático. Las conductas observadas no son independientes, ya que suelen estar influenciadas por las creencias previas *(dimensión cognitiva)* y las emociones asociadas *(dimensión afectiva)*. Por tanto, el análisis de las actitudes conductuales permite identificar patrones de compromiso o rechazo que inciden directamente en el aprovechamiento académico y en la continuidad del aprendizaje.

Al respecto, Guzmán y Saucedo (2015) señalaron que actitudes positivas se asocian con una mayor disposición al esfuerzo, persistencia y deseo de comprender, mientras que actitudes negativas tienden a manifestarse en forma de apatía, evasión y escasa autorregulación. Los autores también enfatizan que esta disposición está condicionada por aspiraciones vocacionales, experiencias académicas previas y el entorno escolar inmediato.

3. METODOLOGÍA

3.1. Tipo de estudio

La investigación se realizó a través de una metodología cualitativa con perspectiva interpretativa y alcance descriptivo, pues de acuerdo con Creswell (2013) es importante dar la voz a los participantes. Merriam y Tisdell (2015) señalan que es un enfoque de investigación que se utiliza para comprender y describir la complejidad de las experiencias humanas mediante la exploración de las percepciones, valores y comportamientos de los participantes. La perspectiva interpretativa es entendida por Tójar (2006) como una aproximación enfocada en la comprensión detallada de los significados, experiencias y perspectivas de los participantes en un fenómeno social, y que analiza cómo las personas asumen sus propias vivencias.

Con el alcance descriptivo, se buscó profundizar en los fenómenos estudiados, pero no es posible generalizar, al tratarse de casos concretos. Ramos-Galarza (2020) expone que en la investigación descriptiva se conocen previamente las características de un fenómeno y se espera examinar su presencia e interpretaciones subjetivas en un grupo, con el fin de generar conocimiento a partir de las particularidades y singularidades de cada uno de ellos. El diseño de investigación aplicado en este trabajo refiere a casos múltiples; para López (2013), el uso de esta técnica busca identificar patrones en los fenómenos estudiados y determinar si son específicos de un caso particular o si se extienden a otros casos.

3.2. Contexto y participantes

La investigación se llevó a cabo en dos escuelas secundarias de la ciudad de Ensenada, Baja California: una pública y una privada. La elección de las instituciones educativas se realizó aplicando criterios de accesibilidad y disposición de los directivos escolares para colaborar. No fueron seleccionadas con fines comparativos, ya que el propósito fue incluir las voces estudiantiles provenientes de contextos escolares distintos para enriquecer la comprensión del fenómeno a partir de experiencias diversas.

La selección de los participantes se realizó de forma aleatoria dentro de un grupo de referencia compuesto por estudiantes con bajo desempeño o que presentaban dificultades de aprendizaje de las matemáticas, desde la perspectiva de sus docentes. Dicho grupo fue identificado a través de la lista proporcionada por docentes y directivos de ambas instituciones. A partir de esta lista, se eligieron aleatoriamente dos estudiantes por grado escolar en cada institución. Adicionalmente, se incorporó un estudiante de la escuela pública que, aunque no había sido sorteado inicialmente, manifestó su interés en participar y estaba incluido en la lista de referencia como caso representativo de bajo desempeño.

En total participaron 13 estudiantes: siete mujeres y seis hombres. Las edades oscilaron entre los 12 y 15 años. Cuatro estudiantes cursaban el primer grado de secundaria, cinco se encontraban en segundo grado y cuatro en tercero. Todos eran estudiantes regulares al momento de la entrevista; es decir, se encontraban inscritos y asistiendo de manera continua a sus clases. Sus calificaciones acumuladas en matemáticas en el grado en curso se ubicaban en un rango de desempeño bajo, con promedios que no superaban el valor de 7. Los estudiantes con calificación de 5 se encontraban en proceso de recuperación de algún parcial.

Para identificar los fragmentos narrativos durante el análisis, se asignaron códigos alfanuméricos, tomando en cuenta el orden de la entrevista y el tipo de institución a la que pertenecía. En la tabla 1 se presentan dichos códigos y la caracterización general de los estudiantes.

Tabla 1. Caracterización general de los estudiantes participantes según género, grado escolar y promedio en matemáticas

Participante	Género	Grado	Promedio acumulado en matemáticas del grado en curso
E1_PRI	Mujer	Segundo	5
E2_PRI	Mujer	Primero	7
E3_PRI	Mujer	Segundo	6
E4_PRI	Hombre	Primero	7
E5_PRI	Mujer	Tercero	6
E6_PRI	Mujer	Tercero	7
E7_PÚB	Mujer	Primero	7
E8_PÚB	Mujer	Segundo	7
E9_PÚB	Hombre	Segundo	6
E10_PÚB	Hombre	Segundo	6
E11_PÚB	Hombre	Tercero	5
E12_PÚB	Hombre	Tercero	6
E13_PÚB	Mujer	Primero	7
	54% Mujeres (n=7) **46% Hombres (n=6)**		**Promedio: 6.3**

Nota. Elaboración propia con base en la información proporcionada por las instituciones educativas.

3.3. Técnica de recolección de datos

Para obtener la información, se empleó la técnica de entrevista semiestructurada con base en un guion previamente diseñado, compuesto por 26 preguntas abiertas. Las preguntas se organizaron en tres categorías de análisis que guiaron tanto la recolección de datos como el análisis posterior. La tabla 2 presenta la estructura general que dio pauta a las preguntas del guion de la entrevista.

Tabla 2. Categorías, subcategorías e indicadores que dieron pauta al guion de entrevista

Categoría	Subcategoría	Indicador
Prácticas de enseñanza	Descripción de las clases de matemáticas	1. Descripción general de las clases de matemáticas en secundaria.
		2. Descripción general de las clases de matemáticas en primaria.
		3. Percepción y comparación de las clases entre niveles educativos (primaria y secundaria).
	Estrategias didácticas	4. Identificación de recursos, dinámicas y actividades utilizadas por los docentes de matemáticas.
		5. Identificación de actividades que el estudiante considera fueron efectivas.
		6. Identificación de actividades que el estudiante considera no fueron efectivas.
		7. Propuestas de mejora hacia la enseñanza de las matemáticas.
Actitudes	Cognitivo	8. Nivel de comprensión percibida sobre los contenidos matemáticos.
		9. Identificación de fortalezas y debilidades en temas específicos de matemáticas.
		10. Concepción personal sobre la naturaleza y utilidad de las matemáticas.
		11. Percepción de cómo las matemáticas sirven en la vida cotidiana.
		12. Nivel de confianza del estudiante en su capacidad de aprender y mejorar en matemáticas.
		13. Razones personales para aprender matemáticas.
		14. Autoevaluación de su desempeño en matemáticas.
		15. Creencia de capacidad propia para aprender matemáticas.
	Afectivo	16. Valoración general hacia las matemáticas.
		17. Emociones experimentadas durante el aprendizaje de matemáticas y sus desencadenantes.
		18. Factores emocionales que intervienen en el aprendizaje.
	Conductual	19. Acciones fuera del horario escolar para reforzar contenidos matemáticos.
		20. Participación activa y compromiso en clase de matemáticas.
		21. Estrategias utilizadas ante dificultades en el aprendizaje.
		22. Persistencia ante los retos.

Desempeño académico	Resultado académico	23. Promedio general de calificación en matemáticas y su evolución a lo largo del tiempo.
	Aplicación del conocimiento	24. Descripción de cómo utiliza las matemáticas en su vida cotidiana.
	Factores subyacentes	25. Causas percibidas del propio desempeño académico.

Nota. Elaboración propia con base en la estructura analítica definida para el estudio.

3.4. Procedimiento

Las entrevistas se llevaron a cabo durante el mes de marzo de 2023. Antes de iniciar, se explicó a los estudiantes el propósito del estudio, garantizando la confidencialidad, el anonimato y el uso exclusivo de la información con fines de investigación. Cada sesión se realizó en espacios cómodos y privados dentro de las instituciones que favorecieron el diálogo. Se solicitó autorización para grabar el audio y se aclaró que podían abstenerse de responder a cualquier pregunta si así lo deseaban. Aunque se utilizó un guion base, las preguntas fueron adaptadas conforme al desarrollo de cada conversación y a los intereses expresados por los estudiantes. La duración de las entrevistas osciló entre 15 y 25 minutos.

3.5. Análisis de datos

Se llevó a cabo siguiendo las fases metodológicas propuestas por Tójar (2006): reducción, organización, transformación de la información y verificación de conclusiones. Para este proceso se utilizó un software que facilitó la organización, categorización y codificación del contenido expresado por los estudiantes. En una primera etapa, para organizar la información, se utilizaron tres categorías: (1) prácticas de enseñanza, (2) actitudes hacia las matemáticas y (3) desempeño académico. Posteriormente, se identificaron subcategorías y códigos derivados directamente de las entrevistas que orientaron la interpretación de las respuestas.

La clasificación de los fragmentos se realizó atendiendo al contenido semántico de las respuestas, el lenguaje utilizado por los estudiantes y su correspondencia con las categorías de análisis. Los testimonios relacionados con dinámicas de clase, recursos, actividades o interacción docente-estudiante fueron agrupados bajo la categoría de *prácticas de enseñanza*. Aquellos fragmentos que expresaron creencias, pensamientos, emociones, sentimientos, acciones e intenciones en torno a las matemáticas se organizaron en la *dimensión actitudinal*. Finalmente, los comentarios vinculados con las calificaciones, el uso general del conocimiento matemático y factores directos que consideran influyen en su aprendizaje fueron integrados en la categoría de *desempeño académico*.

Por ejemplo, ante la pregunta: "¿Cómo son las clases de matemáticas en secundaria?", el estudiante E9_PÚB comentó: *"El maestro solo pone ejercicios en el pizarrón y los tenemos que copiar y resolver"*. De acuerdo con el contenido semántico, este fragmento fue clasificado dentro de la categoría *prácticas de enseñanza*, ya que describe una dinámica instruccional centrada en la repetición de procedimientos. A partir de su contenido, con base en la evidencia, se generó el código *resolución de ejercicios escritos en el cuaderno*, que permitió afinar la organización interna de los datos.

3.6. Consideraciones éticas

La investigación se llevó a cabo siguiendo un protocolo ético de consentimiento informado y resguardo de datos. En primer lugar, se obtuvo la autorización institucional mediante un oficio formal debidamente firmado por la dirección escolar, en el que se especificaba el alcance de la investigación y el compromiso de respeto a los derechos de la comunidad educativa. Posteriormente, se entregó a madres, padres o tutores una carta de consentimiento informado que describía los objetivos del estudio, los procedimientos de recolección de datos, así como la garantía de confidencialidad; esta carta fue devuelta debidamente firmada. Además, se recabó el asentimiento verbal de los participantes, asegurando que comprendieran su derecho a participar de manera voluntaria y a retirarse en cualquier momento sin repercusiones.

Para salvaguardar la privacidad, se mantuvo el anonimato de la institución y de los participantes. La información personal fue sustituida por códigos alfanuméricos en los registros y análisis, evitando cualquier identificación directa. Los audios y transcripciones se almacenaron en un repositorio digital seguro, con acceso restringido únicamente al equipo de investigación.

4. RESULTADOS

La presentación de los hallazgos se estructura en torno a las tres categorías de análisis previamente definidas, e incluye interpretaciones acompañadas de fragmentos representativos.

4.1. Prácticas de enseñanza de las matemáticas

Los estudiantes describieron sus clases de matemáticas en secundaria como espacios centrados en la explicación oral del docente, apoyada principalmente en el uso del pizarrón. Después de mostrar uno o dos ejemplos, se les asignan ejercicios similares para resolver en el cuaderno, en algunos casos de forma individual y en otros por equipos. A lo largo de la clase, se abordan dudas y, en caso de no concluir la actividad asignada, se retoma en la siguiente sesión: "...la profe pone en el pizarrón los problemas y ya nosotros los copiamos y los resolvemos y los entregamos y listo... " (E7_PÚB), "... nos ponen ejercicios, nos explican con un ejemplo o dos y nos juntamos en equipos para resolverlos... " (E2_PRI), "... hacemos muchas actividades y nos da un tiempo para hacerlas y si no lo logramos nos pone un pendiente para la siguiente clase... " (E10_PÚB). Algunos estudiantes expresaron sentirse abrumados debido a la cantidad de información y la rapidez del proceso: "... pues mucha explicación, demasiado escribir y ver, y hay mucha información este, y pues no sé, muy como rápido todo... " (E6_PRI).

En cuanto a la descripción de las clases de matemáticas en primaria, mencionaron que se utilizaban más los libros de texto y guías de ejercicios. Además, percibían mayor profundización de temas, repetición constante de contenidos y prevalencia de la resolución de problemas mediante operaciones aritméticas. La mayoría señaló que los docentes de primaria mostraban un interés genuino en responder preguntas y ofrecían explicaciones personalizadas: "... en nuestra primaria nos daban guía y también nos daban un libro de la SEP con problemas matemáticos..." (E1_PRI), "... eran muchos temas repetidos que ya habíamos visto..." (E6_PRI), "... más que nada nos enseñaban multiplicación, suma y resta..." (E9_PÚB), "... si no entendíamos podíamos ir a sentarnos al lado del profesor y nos explicaba..." (E8_PÚB).

Al comparar ambos niveles, los estudiantes percibieron que en secundaria hay más dificultad, mayor carga de trabajo y menos atención personalizada. Asimismo, algunos valoraron los aprendizajes que ofrece: "...el tipo de ejercicios de secundaria son más difíciles..." (E8_PÚB), "...la diferencia es que aquí te ponen mucho más trabajo y allá te dan más oportunidad...” (E10_PÚB), “...en la primaria te ponen más atención y te explican más cosas...” (E7_PÚB), “...me gusta la secundaria porque aprendes más...” (E3_PRI).

A partir de las entrevistas, se identificaron diversas actividades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mencionadas por los propios estudiantes. Estas actividades fueron organizadas en códigos construidos a partir de la interpretación del contenido. La tabla 3 presenta un resumen de dichas actividades.

Tabla 3. Actividades de enseñanza y aprendizaje de matemáticas mencionadas por los estudiantes

Código	Actividades asociadas	Número de menciones
Resolución de ejercicios escritos en el cuaderno	Resolución de actividades en el cuaderno	16
Uso de materiales instruccionales	Apoyo en libro de texto, guías y explicaciones estructuradas basadas en recursos impresos	7
Actividades expositivas	Pasar al pizarrón y presentaciones de los estudiantes ante el grupo	4
Estrategias lúdicas o manipulativas	Juegos matemáticos, proyectos, materiales manipulativos o dinámicas activas	5

Nota. Elaboración propia con base en los resultados del análisis cualitativo.

Al respecto, destaca la resolución mecánica de problemas matemáticos en el cuaderno, libro de texto o en una guía de ejercicios, lo cual indica que este tipo de actividades ocupa un lugar central en el proceso de enseñanza de matemáticas: “... en mi caso, la única técnica que yo he sabido que hacen es solo poner ejercicios en el pizarrón y en el cuaderno...” (E12_PÚB). Los recursos o materiales lúdicos también fueron mencionados, pero en menor medida: “...una vez la profe nos puso a resolver problemas con unos juguetes que ella había traído ...” (E10_PÚB).

Durante las entrevistas, los estudiantes expresaron su preferencia por aquellas actividades que resultaban lúdicas y dinámicas, en particular los juegos matemáticos y el uso de materiales manipulativos. Además, consideran que estas estrategias favorecen su concentración y generan una experiencia más agradable: “...por ejemplo, los libros en la parte de atrás tenían recortes, eran como juegos para multiplicar, me gustaban los juegos porque era más divertido y no me costaba trabajo concentrarme...” (E7_PÚB), “... me gusta cuando hacen un jueguito que tiene que ver con matemáticas...” (E5_PRI). En contraste, mostraron rechazo hacia actividades que implican participación pública o tareas que perciben como difíciles: “...no me gusta pasar al frente y resolver cosas...” (E2_PRI).

Por otro lado, los estudiantes reconocieron la importancia de la camaradería y el ambiente escolar, al respecto el estudiante E10_PÚB comentó: “...no me gusta cuando ponen actividades en las que no puedes platicar nada...”, lo que sugiere una preferencia por entornos colaborativos que permitan dialogar con los compañeros.

4.2. Actitudes hacia las matemáticas

Los resultados en torno a la categoría de actitudes hacia las matemáticas se presentan organizados en sus dimensiones teóricas, tal como se muestran en la tabla 4.

Tabla 4. Resultados sobre las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de secundaria

Dimensión	Actitudes positivas	Actitudes negativas
Cognitiva (Creencias y pensamientos)	– Consideran las matemáticas útiles y lógicas. – Perciben facilidad en operaciones básicas.	– Consideran difícil comprender contenidos algebraicos. – Tienen una concepción reduccionista de las matemáticas (solo números o problemas).
Afectiva (emociones y sentimientos)	– Sienten orgullo y/o alegría al entender o dominar un tema y resolver problemas sin ayuda. – Sienten curiosidad por aprender.	– Sienten estrés, ansiedad, frustración, vergüenza y/o miedo durante las clases de matemáticas. – Sienten presión social y familiar por la obtención de buenas calificaciones.
Conductual (acciones e intenciones)	– Participan ante el grupo cuando se sienten seguros. – Buscan ayuda entre pares. – Se esfuerzan por mejorar sus calificaciones.	– Evitan participar en clase. – No solicitan apoyo del docente para resolver sus dudas. – Dedican poco tiempo extra al estudio autónomo y a la resolución de sus tareas.

Nota. Elaboración propia con base en los resultados del análisis cualitativo.

Dimensión cognitiva

Como ya se explicó, esta dimensión comprende las percepciones que los estudiantes tienen sobre su comprensión de los contenidos matemáticos, el reconocimiento de sus fortalezas y debilidades, así como sus concepciones sobre la utilidad y naturaleza de esta disciplina. Los resultados revelaron que los temas relacionados con operaciones básicas suelen considerarse comprensibles, mientras que los contenidos algebraicos, en especial aquellos que implican el uso de variables, son señalados como difíciles de entender por todos los estudiantes entrevistados: "...me puedes poner números, sumas, restas, multiplicaciones y todo bien, esos temas están fáciles..." (E1_PRI), "... no entiendo los temas que tienen que ver con "x"..." (E6_PRI), "... lo más difícil son las ecuaciones, bueno, no sé cómo se llaman, pero son como que tal persona tenía tal cantidad y se pierde esa cantidad y recibe una mayor, tienes que plantear una ecuación o algo para responder con letras..." (E9_PÚB).

Al indagar sobre la conceptualización que tienen sobre las matemáticas, se encontró que la reducen a problemas y números: "... solo son problemas..." (E7_PÚB); "... son números ..."(E8_PÚB); y respecto a su uso las consideran como: "... útiles y muy lógicas..." (E5_PRI). Mientras que otro mencionó: "... son necesarias para las cosas... para la escuela..." (E2_PRI).

Las valoraciones personales que los estudiantes hacen sobre su aprendizaje en matemáticas reflejan una creencia limitada sobre su capacidad para aprender esta asignatura, ya que 10 de 13 estudiantes se consideraron malos para las matemáticas: "...me siento mala porque casi no le entiendo..." (E7_PÚB), "...yo sentía que las matemáticas no eran lo mío y de ahí no me gustaban y lo veía como mi peor pesadilla..." (E4_PRI).

Dimensión afectiva

Durante las entrevistas, los estudiantes describieron diferentes reacciones emocionales ante los retos y actividades que enfrentan en clases de matemáticas. Para su clasificación se utilizó la propuesta de Pekrun (2006), la cual organiza las emociones según su valencia (positiva o negativa) y su nivel de activación (activante o desactivante). La tabla 5 resume estas emociones junto con su frecuencia de aparición y los desencadenantes identificados.

Tabla 5. Resultados de las emociones presentes en las clases de matemáticas

Valencia	Nivel de activación	Emociones identificadas	Principales desencadenantes identificados en el análisis	Número de menciones
Positivas	Activantes	Alegría	Comprender un tema o resolver una actividad correctamente.	6
		Curiosidad	Deseo de conocer o comprender algo nuevo.	1
		Orgullo	Resolver actividades por cuenta propia y/o aprobar un examen o la asignatura.	4
	Desactivantes	Alivio	Entender completamente una actividad o tema después de una dificultad y/o aprobar un examen o la asignatura.	2
Negativas	Activantes	Ansiedad	Anticipar el fracaso académico al percibir que el resto del grupo avanza más rápido, mientras el tiempo disponible se reduce y la tarea aún no se ha resuelto.	2
		Estrés	No entender los temas, sentir presión por el tiempo, cambio constante de temas y actividades, compararse con otros.	10
		Nervios	Tener que participar ante el grupo cuando no se sienten listos para hacerlo y/o resolver un examen.	2
		Frustración	No comprender las actividades y/o no lograr los objetivos esperados.	6
		Enojo	Equivocarse en actividades y/o exámenes.	3
		Miedo	Tener que participar ante el grupo cuando no se sienten listos.	3
		Vergüenza	Participar ante el grupo y/o preguntar dudas al docente.	5
		Confusión	Enfrentar una actividad sin comprender claramente las instrucciones o el procedimiento, lo que dificulta saber por dónde empezar y genera inseguridad para avanzar.	5
	Desactivantes	Tristeza	Recibir malas calificaciones.	4
		Decepción	No lograr resolver las actividades y obtener resultados académicos desfavorables.	4
Total				**57**

Nota. Elaboración propia con base en la propuesta de Pekrun (2006) y los resultados del análisis de las entrevistas.

Las principales emociones negativas se relacionan con situaciones de incomprensión de contenidos, presión del tiempo y comparación con otros compañeros. Emociones como el estrés, la ansiedad, la confusión y la frustración fueron comunes cuando los estudiantes se sentían rezagados respecto al grupo o no comprenden el procedimiento matemático. Por ejemplo, un estudiante relató: "... primer paso: estrés y veo un chorro de veces el problema intentando entender. Segundo paso: intentar resolver y estar ahí borrando y borrando. Tercer paso: me comienzo a estresar porque todos ya están terminando y yo no llevo nada..." (E1_PRI). Otro añadió: "... siento estrés cuando nos están apurando..." (E11_PÚB).

En algunos casos, la incomprensión se acompaña de bloqueo, dando lugar a experiencias de frustración, enojo, decepción o tristeza. Por ejemplo, un estudiante comentó: "... me frustraba mucho porque no entendía y al no entender, me frustraba y ya no quería hacer nada..." (E2_PRI). Otra añadió: "... a veces cuando no sé responder comienzo a menospreciarme y decirme cosas feas..." (E1_PRI). Asimismo, el miedo y los nervios aparecieron ante la posibilidad de participar en clase sin sentirse preparados y la vergüenza fue una constante al momento de preguntar dudas, lo que llevó a la mayoría de los estudiantes a no hacerlo: "... me da pena que me digan algo porque no lo entiendo y así se me van acumulando dudas..." (E12_PÚB), "... estaba nerviosa de poner algo mal y que se rían de mí..." (E1_PRI).

En contraste con las emociones negativas, también se identificaron experiencias positivas asociadas con la comprensión y la autonomía en el trabajo matemático, lo que generó emociones como alegría y orgullo. Estas emociones surgieron cuando los estudiantes lograban entender los procedimientos y resolver ejercicios por cuenta propia, fortaleciendo así su creencia de capacidad. Un estudiante expresó: "... siento felicidad cuando le entiendo y quiero seguir haciendo los ejercicios..." (E8_PÚB), mientras que otro señaló: "... me siento feliz cuando no me ayudan y hago las cosas por mí mismo..." (E11_PÚB).

Dimensión conductual

Esta dimensión reúne las acciones que los estudiantes realizan dentro y fuera del aula para afrontar el aprendizaje de las matemáticas, así como las intenciones expresadas que guían dichas conductas. Entre las acciones extracurriculares, se identificó que la mayoría de los estudiantes no realiza o pocas veces realiza actividades fuera del horario escolar para reforzar los contenidos: "...no siempre, muy pocas veces..." (E4_PRI). Algunos mencionaron tener apoyo de sus familiares "...si tengo dudas o alguna tarea mi mamá me puede ayudar…" (E3_PRI), "…pues por ejemplo, si no entiendo un tema, normalmente le pregunto a mi papá que es el que más sabe matemáticas y pues si no se puede, lo dejo así…" (E5_PRI).

En el contexto del aula, la conducta predominante es la evitación de la participación activa. A la mayoría de los estudiantes no les gusta participar en clase, especialmente al momento de pasar al pizarrón o responder en público. No obstante, reconocen que han participado en diversas ocasiones, ya sea por iniciativa propia cuando se sienten preparados, o por solicitud del docente. Por ejemplo, uno de ellos señaló: "…cuando me sé una respuesta ahí sí me emociono y quiero pasar…" (E4_PRI), lo que evidencia una intención de participar solo en condiciones de certeza.

Al ser cuestionados sobre sus acciones ante dificultades de comprensión, la mayoría expresó que no recurren al docente para aclarar dudas. En su lugar, prefieren solicitar apoyo a sus compañeros o dejar el contenido sin resolver. Esta decisión se traduce en conductas como ignorar el contenido, cambiar de actividad o mantenerse en silencio durante la clase. Un estudiante lo expresó de la siguiente manera: "…intento entenderlo y si no lo entiendo, pues ya así lo dejo…" (E12_PÚB). Otros mencionaron que, ante la duda, piden ayuda a estudiantes que perciben como competentes: "…siempre pregunto a mis amigos, a los que están atentos y me explican más o menos…" (E10_PÚB).

En suma, las acciones observadas reflejan un patrón de baja implicación activa durante las clases, escasa búsqueda de apoyo docente y ausencia de estrategias sistemáticas para el estudio autónomo. Las intenciones expresadas por los estudiantes giran en torno a participar solo cuando se sienten seguros, evitar exponerse a errores frente al grupo y resolver dudas preferentemente a través del trabajo entre pares.

También, se analizaron los factores que influyen en la motivación para aprender matemáticas en el estudiante, como lo son la presión familiar, el deseo de mejorar calificaciones y la búsqueda de mayor seguridad. De esto, se mencionó: "… quiero que mis papás se sientan orgullosos…" (E1_PRI) y "… mi papá exige siete para arriba, por eso quiero ser mejor en matemáticas…" (E4_PRI). Además, algunos estudiantes evidenciaron el deseo de aumentar su confianza en la capacidad para enfrentar desafíos académicos "… me gustaría aprender para ser más segura …" (E6_PRI).

4.3. Desempeño académico

Se indagó sobre el desempeño académico en matemáticas y sobre los factores que, desde la perspectiva de los estudiantes, explican dicho desempeño. La dirección de las escuelas compartió las calificaciones en la asignatura correspondientes al ciclo escolar en curso, las cuales fluctuaban entre 5 y 7 en una escala del 0 al 10. Cabe señalar que en el nivel de secundaria en México, el 5 representa una calificación reprobatoria y es la más baja registrada oficialmente. El promedio de los participantes fue de 6.3, lo cual se considera bajo.

Se les preguntó directamente a los estudiantes sobre sus calificaciones y confirmaron lo reportado por la dirección. También, se les cuestionó sobre la aplicación de lo aprendido a contextos cotidianos, como un indicador complementario del desempeño. Sus respuestas se centraron en el uso de las matemáticas en situaciones de la vida diaria relacionadas con el manejo del dinero y otros estudiantes consideran que no las utilizan: "... no las utilizo, solo en la escuela..." (E2_PRI), "... para comprar cosas..." (E3_PRI), "... a veces cuando voy al mercado..." (E8_PÚB), "...con el dinero..." (E11_PÚB).

Posteriormente, se les preguntó directamente por las causas que, desde su perspectiva, explican su desempeño académico, aclarando previamente a qué se refiere dicho término. La tabla 6 presenta este análisis organizado en cuatro subcategorías, acompañadas con fragmentos representativos.

Tabla 6. Causas del desempeño académico en matemáticas desde la perspectiva estudiantil

Subcategoría	Código	Fragmentos representativos
Factores personales y emocionales	Falta de concentración	"... no entiendo las cosas porque o me distraigo o me pongo a hacer otra cosa que no tiene nada que ver con esa clase..." (E1_PRI).
	Falta de interés	"...a veces no hago nada..." (E8_PÚB). "...porque no me da por hacerlos o simplemente me da hueva..." (E9_PÚB). "...no le echo ganas y luego ya se me pasa el tiempo..." (E6_PRI).
	Baja autoeficacia	"... me siento mal porque casi no le entiendo..." (E7_PÚB). "... yo sentía que las matemáticas no eran lo mío y de ahí no me gustaban y lo veía como mi peor pesadilla..." (E4_PRI).
	Dificultad para comprender los contenidos	"... las matemáticas son lo único que no entiendo muy bien, o sea, cuando son muchos números y letras como que no entiendo bien..." (E12_PÚB).
	Miedo y vergüenza que inhiben el aprendizaje activo	"...me da pena preguntar para que no me digan de cosas, que ya te expliqué y no sé qué tantas cosas y así... prefiero quedarme con la duda..." (E1_PRI). "... me daba mucha pena preguntar y me quedaba con la duda, pero ahora me he atrevido más a preguntar y me ha ayudado porque últimamente logro hacer mis trabajos bien..." (E6_PRI).
Condiciones en el entorno escolar	Presión social	"... la verdad porque muchos en mi primaria me decían que no sabes matemáticas, no sabes la tabla del siete o del ocho... cuando sí me las sabía, pero se me complicaba..." (E4_PRI).
	Ambiente escolar que genera distracciones	"...está la profe explicando un trabajo o algo y mis compañeros me están distrayendo..." (E10_PÚB).
	Dificultad de adaptación	"...fue difícil adaptarme al cambio de primaria a secundaria..." (E2_PRI).
Experiencias con el profesorado	Influencia de docentes anteriores	"...desde que iba como en primero de primaria no me tocó una profesora muy buena y eso también me ha afectado..." (E12_PÚB). "...con esta profe no me acoplo muy bien..." (E7_PÚB).

Nota. Elaboración propia con base en los resultados del análisis cualitativo.

Estos hallazgos muestran que los estudiantes no conciben su desempeño académico únicamente como resultado de sus capacidades cognitivas. Su experiencia está influida por factores emocionales, sociales y escolares que afectan directamente su relación con las matemáticas. Predomina una percepción individual de responsabilidad, en la que se atribuyen las dificultades a la distracción, la falta de esfuerzo, el miedo a participar o la ansiedad. Aunque las estrategias docentes no fueron señaladas explícitamente como causa principal, algunos fragmentos reflejan limitaciones en el clima de aula y en las formas de enseñanza.

5. DISCUSIÓN

El objetivo de esta investigación es describir las experiencias relacionadas con la enseñanza y las actitudes hacia las matemáticas, a fin de identificar las causas del desempeño académico desde la voz estudiantil. Los hallazgos obtenidos permiten discutir cómo estas experiencias dan sentido al bajo logro en la asignatura y revelan elementos críticos en la dinámica escolar actual. Desde los hallazgos, la discusión gira en torno a: (1) describir las percepciones asociadas a las prácticas de enseñanza, (2) describir las experiencias asociadas a las actitudes y, (3) enunciar las causas que los estudiantes atribuyen directamente a su bajo desempeño.

5.1. Percepciones asociadas con las prácticas de enseñanza de las matemáticas

Se encontró que se sigue adoptando una dinámica tradicional, con explicaciones expositivas, resolución de ejercicios en el pizarrón y asignación de actividades enfocadas en la solución de problemas descontextualizados de la realidad cotidiana. Según la percepción de los estudiantes, la estrategia de enseñanza más utilizada es la resolución de ejercicios de manera mecánica, similares a los previamente explicados por el docente. Para Rivas (2005), las prácticas pedagógicas repetitivas y monótonas generan aversión hacia la asignatura de Matemáticas desde los primeros niveles educativos y, a su vez, el desarrollo de debilidades formativas y deserción escolar. Por su parte, Ricoy y Couto (2018) explican que la desmotivación hacia el aprendizaje matemático está vinculada al uso de metodologías tradicionales y a planes educativos extensos.

En contraste con dichas prácticas, los estudiantes expresaron su preferencia por actividades interactivas y creativas, tales como el juego, el uso de juguetes o material interactivo, el desarrollo de proyectos y la proyección o elaboración de videos. Al respecto, Kontaş (2016) evidenció que el uso de materiales manipulativos incrementa significativamente el desempeño académico en matemáticas, en comparación con métodos tradicionales; además de mejoras en el aprendizaje, el uso de recursos didácticos contribuyó a que la participación fuera activa y voluntaria.

Por su parte, se identificó la falta de tiempo para la asimilación de contenidos. Los estudiantes perciben que el cambio entre los temas es muy rápido y no tienen el suficiente tiempo para practicar, reforzar e interiorizar el contenido, por lo que se abruman con la cantidad de información, no logran aprender y se les dificulta la comprensión de temas posteriores. Esta sensación puede ser resultado de un enfoque educativo que prioriza la cobertura de los contenidos, en lugar de la comprensión de estos; además, contribuye a la desconexión del estudiante con los temas y en el aumento de la dificultad de aprender nuevo conocimiento. Ricoy y Couto (2018) explican que la elevada exigencia de los programas escolares obliga a avanzar rápidamente en los contenidos, sin permitir el tiempo necesario para que los estudiantes consoliden sus aprendizajes, lo que impacta negativamente en su comprensión y actitud hacia la asignatura.

5.2. Percepciones asociadas con las actitudes hacia las matemáticas

La transición de la escuela primaria a la secundaria representa un período crítico en el desarrollo de habilidades matemáticas. De acuerdo con la SEP (2022), en este nivel educativo se introduce el álgebra en el currículo mexicano, lo que requiere la comprensión de ideas abstractas y simbólicas. Los estudiantes mencionan que la resolución de operaciones aritméticas les resulta comprensible y sencilla, lo cual atribuyen a la forma de enseñanza recibida en la primaria, donde los docentes solían dedicar más tiempo a la práctica de los procedimientos. Sin embargo, al ingresar a la secundaria, han enfrentado mayores dificultades, especialmente en la comprensión del lenguaje algebraico. Al respecto, Serres (2011) argumenta que el cambio de lo numérico a lo simbólico implica un salto cognitivo importante y que, si no se desarrolla de forma gradual, puede generar resultados de aprendizaje negativos. Esta dificultad marca una ruptura en la continuidad del aprendizaje matemático y evidencia la necesidad de una transición más gradual y acompañada en el paso hacia el pensamiento algebraico.

Por su parte, se encontró que las concepciones que los estudiantes tienen sobre las matemáticas se centran en la complejidad de sus contenidos y en la exigencia lógica que requiere su comprensión. Este hallazgo coincide con lo planteado por García-González *et al.* (2023), quienes identificaron que estudiantes de secundaria tienden a concebir las matemáticas como un conjunto de operaciones y fórmulas, vinculadas al álgebra y a la aritmética, y argumentan que esto genera en el estudiante desafíos emocionales y cambios en su conducta al enfrentarse a la asignatura. A partir de lo anterior, resulta necesario replantear las estrategias de enseñanza, con el fin de que las matemáticas dejen de percibirse como una barrera y se conviertan en una herramienta que los estudiantes puedan comprender, utilizar y valorar.

Asociado a lo afectivo, se identificó que las principales emociones que surgen en clases de matemáticas se asocian con la dificultad para entender algunos temas, la presión de sus docentes, compañeros y familiares, así como la falta de confianza que los estudiantes experimentan al no estar al mismo nivel que sus pares. Lo anterior se refuerza con lo planteado por García-González *et al.* (2021), quienes argumentan que ante situaciones de dificultad, confusión o fracaso, aparecen emociones negativas como el miedo, la congoja, el autorreproche y el desagrado, que debilitan la confianza, generan malestar emocional y pueden generar el rechazo hacia la asignatura.

Por el contrario, los estudiantes manifestaron que cuando logran concretar sus actividades académicas de manera adecuada, sienten orgullo, alivio y felicidad. Este hallazgo, de igual forma coincide con García-González *et al.* (2021), ya que encontraron que cuando los estudiantes comprenden los contenidos, resuelven problemas o se sienten competentes, emergen emociones positivas como la esperanza, la alegría, el orgullo y el agrado. Esta percepción de logro se convierte en una experiencia de dominio, la cual, de acuerdo con Usher y Pajares (2008), constituye la fuente más influyente en la construcción de la autoeficacia académica, al permitir que el estudiante genere expectativas positivas sobre su desempeño.

Otro punto de análisis relacionado a la actitud hacia las matemáticas es que los estudiantes reconocen la utilidad de la asignatura, pero la mayoría evalúa negativamente su capacidad para resolver problemas. Rosario *et al.* (2012) posicionan a la autoeficacia como un componente esencial para el aprendizaje, dado que los estudiantes que confían en su habilidad para tener éxito en la materia y perciben su relevancia en situaciones cotidianas obtienen mejores resultados académicos.

En el mismo sentido, Castro-Velásquez y Rivadeneira-Loor (2022) agregan que la falta de confianza se traduce en esfuerzos mínimos y resultados deficientes.

Por último, los estudiantes expresan su aversión a participar en la resolución de ejercicios en el pizarrón, y lo fundamentan al narrar su sentir de exposición a las miradas y juicios de sus compañeros. El temor a cometer errores y quedar en evidencia frente al grupo crea una resistencia hacia la exposición pública de sus habilidades matemáticas, sin importar el nivel de dominio que tengan. Lo anterior se explica con lo mencionado por García-González *et al.* (2021), ya que analizaron que emociones como el miedo, la congoja o el autorreproche reducen la autoestima y generan conductas de evitación, incluso en estudiantes con dominio del contenido.

En suma, los hallazgos sugieren que las prácticas docentes pueden incidir directamente en las tres dimensiones actitudinales analizadas. En lo cognitivo, se requieren andamiajes conceptuales que faciliten la comprensión progresiva de contenidos y reduzcan la percepción de dificultad. En lo afectivo, es fundamental generar un clima emocionalmente seguro donde el error o las equivocaciones se valoren como parte del aprendizaje, y que se brinde retroalimentación oportuna, donde el estudiante se sienta valorado, respetado y motivado. En lo conductual, resulta necesario diseñar estructuras de participación gradual que favorezcan la intervención de todos los estudiantes y fortalezcan su confianza.

5.3. Desempeño académico

Además de las causas identificadas implícitamente en los discursos de los estudiantes, también se les preguntó directamente sobre las que consideran inciden en su desempeño académico en matemáticas. Entre las más mencionadas estuvieron: dificultad para concentrarse y comprender los temas, apatía hacia el trabajo en clase, explicaciones confusas de los profesores, presencia de emociones negativas durante las clases y, dificultad para adaptarse a los nuevos desafíos.

Se observó que, en su mayoría, los estudiantes tienden a atribuir estas dificultades a sus propias acciones y actitudes. Al respecto, Guzmán y Saucedo (2015) señalan que la apatía y la desmotivación suelen manifestarse en actitudes de autorresponsabilidad frente a las dificultades escolares. Desde una perspectiva crítica, esta tendencia podría indicar una internalización de responsabilidad por parte de los estudiantes, quienes, al atribuir las dificultades principalmente a factores personales como la falta de esfuerzo o la dificultad para concentrarse, podrían pasar por alto posibles deficiencias en el entorno educativo.

6. CONCLUSIONES

Entre las causas del bajo desempeño en matemáticas identificadas a través de la voz de estudiantes, tanto de forma implícita como explícita, destaca el uso predominante de una enseñanza centrada en la repetición mecánica de ejercicios, con escasa participación activa y pocas oportunidades para desarrollar pensamiento matemático. Este enfoque, basado en la explicación del docente y la copia de procedimientos, limita la comprensión profunda de los contenidos y reduce el sentido formativo de la asignatura. También se identificó que el ritmo acelerado con el que se abordan los temas, impide una asimilación pausada y provoca confusión. Esta dificultad se acentúa con el paso de primaria a secundaria, donde los estudiantes experimentan una disminución en la atención personalizada, un aumento en la dificultad de los contenidos y un entorno más exigente, lo cual debilita su seguridad para enfrentarse a nuevos desafíos académicos.

En el plano emocional, se identificaron experiencias recurrentes de ansiedad, miedo, frustración y vergüenza, especialmente frente a la incomprensión de los temas o la posibilidad de equivocarse en público. Estas emociones afectan la disposición a participar y obstaculizan el aprendizaje, generando una relación tensa con la asignatura. Otra causa del bajo desempeño académico es la insuficiente percepción de autoeficacia. Muchos estudiantes tienen la creencia de que no son capaces de aprender matemáticas y atribuyen sus dificultades a una supuesta falta de habilidad personal. Esta creencia limita el esfuerzo y refuerza actitudes de rechazo. Incluso algunos estudiantes que conocen las respuestas prefieren callar por temor al juicio de los demás, lo cual impide practicar, recibir retroalimentación y fortalecer la confianza.

La escasa interacción con los docentes también contribuye al problema. Ante una duda, muchos prefieren no preguntar por vergüenza o por la percepción de que no obtendrán apoyo. Esta falta de acompañamiento refuerza los vacíos de aprendizaje y debilita el vínculo pedagógico. Finalmente, las presiones externas, como las expectativas familiares o la opinión de los compañeros, generan tensión en lugar de motivación. Estas exigencias aumentan la ansiedad y afectan tanto la actitud como el desempeño escolar.

Sobre las implicaciones de este estudio, destaca la necesidad de diseñar propuestas pedagógicas integrales que articulen apoyos cognitivos, un entorno emocionalmente seguro y estrategias de participación gradual. Para ello se sugiere incorporar metodologías activas como juegos, proyectos y materiales manipulativos; fomentar el uso de recursos tecnológicos; aceptar el error como parte del proceso de aprendizaje; brindar tiempos adecuados para la comprensión y práctica de los contenidos; fortalecer la confianza de los estudiantes mediante retroalimentación positiva y reconocimiento explícito del esfuerzo; promover la perseverancia y la resiliencia frente a problemas desafiantes; así como estimular la autonomía y la autorregulación en el aprendizaje. Escuchar la voz de los estudiantes permite visibilizar los desafíos que enfrentan y abre la posibilidad de construir una enseñanza más significativa.

7. LIMITACIONES Y TRANSFERIBILIDAD

Este estudio se circunscribe al contexto de dos secundarias de Ensenada, Baja California, y a un grupo reducido de estudiantes con bajo desempeño en matemáticas; en consecuencia, sus resultados son descriptivos y se comprenden como percepciones situadas en un momento y entorno específicos. En este marco, la transferibilidad dependerá de la similitud con otros escenarios educativos. Se sugiere que futuras investigaciones amplíen el tamaño y diversidad de la muestra, incorporen las perspectivas de docentes y familias, integren enfoques etnográficos, realicen comparaciones entre diferentes grados escolares e instituciones educativas y profundicen en el análisis de la relevancia de las actitudes en el aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de los estudiantes.

REFERENCIAS

Arias, C. A. (2006). Enfoques teóricos sobre la percepción que tienen las personas. *Horizontes Pedagógicos, 8*(1). https://horizontespedagogicos.ibero.edu.co/article/view/08101

Carbonero, M. A. y Collantes, C. (2006). Actitudes hacia las matemáticas en alumnos de la ESO. *International Journal of Developmental and Educational Psychology, 1*(1), 401-413. https://www.redalyc.org/pdf/3498/349832311037.pdf

Castro-Velásquez, M. J. y Rivadeneira-Loor, F. Y. (2022). Posibles causas del bajo rendimiento en las matemáticas: una revisión de la literatura. *Polo del Conocimiento, 7*(2), 1089-1098. https://polodelconocimiento.com/ojs/index.php/es/article/view/3635

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación. MEJOREDU. (2023). *Evaluación diagnóstica del aprendizaje de las y los alumnos de educación básica 2022-2023. Informe de resultados.* MEJOREDU.

Corredor-García, M. y Bailey-Moreno, J. (2020). Motivación y concepciones a las que alumnos de educación básica atribuyen su rendimiento académico en matemáticas. *Revista Fuentes, 22*(1), 127-141. https://doi.org/10.12795/revistafuentes.2020.v22.i1.10

Creswell, J. W. (2013). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* Sage Publications.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista* (4ª ed.). McGraw-Hill.

Edel, R. (2003). El rendimiento académico: concepto, investigación y desarrollo. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 1*(2), 1-14. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=55110208

Erazo, O. A. (2013). Caracterización psicológica del estudiante y su rendimiento académico. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales, 4*(1), 23–41. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5123816

García-González, M. del S., Martínez-Merino, C. I., Juárez-López, J. A. y Hernández-Rebollar, L. A. (2023). Mexican secondary students' image of mathematics. *Quadrante, 32*(2), 153–174. https://doi.org/10.48489/quadrante.31946

García-González, M. del S., Ramírez-Gómez, B. y Navarro-Sandoval, C. (2021). Situaciones que originan emociones en estudiantes de matemáticas. *Bolema, 35*(69), 39-62. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a03

Guzmán, C. y Saucedo, C. L. (2015). Experiencias, vivencias y sentidos en torno a la escuela y a los estudios. Abordajes desde las perspectivas de alumnos y estudiantes. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 20*(67), 1019-1054. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14042022002

Katsantonis, A. y Katsantonis, I. G. (2024). Exploratory study of the cognitive, emotional, and behavioural dimensions of AI attitudes. *Education Sciences, 14*(9), 988. https://doi.org/10.3390/educsci14090988

Kontaş, H. (2016). The effect of manipulatives on mathematics achievement and attitudes of secondary school students. *European Journal of Educational Research, 5*(4), 185–192. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1097429.pdf

López, W. O. (2013). El estudio de casos: una vertiente para la investigación educativa. *Educere, 17*(56), 139-144. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35630150004

Martínez-Sierra, G. y García-González, M. del S. (2017). Students' emotions in the high school mathematics classroom: appraisals in terms of a structure of goals. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(2), 349-369. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9698-2

Mateos, T. (2008). La percepción del contexto escolar. Una imagen construida a partir de las experiencias de los alumnos. *Cuestiones Pedagógicas, 19,* 285-300. https://institucional.us.es/revistas/cuestiones/19/16Mateos.pdf

Mato, M. D. y de la Torre, E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *Investigación en Educación Matemática XIII,* 285-300. http://funes.uniandes.edu.co/1654/1/307_Mato2009Evaluacion_SEIEM13.pdf

Merriam, S. B. y Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative Research: A guide to design and implementation.* Jossey-Bass.

Organisation for Economic Co-operation and Development. OECD. (2023). *PISA 2022 results (Volume I): The state of learning and equity in education*. OECD Publishing.

Olayinka, A. A. y Olayinka, J. O. (2023). Factors influencing the attitudes of secondary school students towards the study of mathematics. *Authorea.* https://doi.org/10.22541/au.168897269.95770924/v1

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía, 23*(71), 158-180. http://pepsic.bvsalud.org/pdf/psicoped/v23n71/v23n71a10.pdf

Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice. *Educational Psychology Review, 18*, 315-341. https://doi.org/10.1007/s10648-006-9029-9

Quintero, M. T. y Orozco, G. M. (2013). El desempeño académico: una opción para la cualificación de las instituciones educativas. *Plumilla Educativa, 10*(2), 93-115. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4756664

Ramos-Galarza, C. A. (2020). Los alcances de una investigación. *CienciAmérica,* 9(3). https://doi.org/10.33210/ca.v9i3.336

Ricoy, M-C. y Couto, M. J. (2018). Desmotivación del alumnado de secundaria en la materia de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 20*(3), 69-79. https://doi.org/10.24320/redie.2018.20.3.1650

Rivas, P. (2005). La educación matemática como factor de deserción escolar y exclusión social. *Educere, 9*(29), 165-170. https://www.redalyc.org/pdf/356/35602904.pdf

Romero-Bojórquez, L., Utrilla-Quiroz, A. y Utrilla-Quiroz, V. M. (2014). Las actitudes positivas y negativas de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, su impacto en la reprobación y la eficiencia terminal. *Ra Ximhai, 10*(5), 291-319. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46132134020

Rosario, P., Loureno, A., Paiva, O., Rodrigues, A., Valle, A. y Tuero, E. (2012). Predicción del rendimiento en matemáticas: efectos de variables personales, socioeducativas y del contexto escolar. *Psico*thema, *24*(2), 289-295. https://www.psicothema.com/pdf/4013.pdf

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Journal of Education, 196*(2), 1-38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Secretaría de Educación Pública. SEP. (2022). *Programas de estudio para la educación preescolar, primaria y secundaria: programas sintéticos de las fases 2 a 6.* SEP.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Revista Universitaria de Investigación, 12*(1), 122-142. https://www.redalyc.org/pdf/410/41030367007.pdf

Tójar, J. C. (2006). *Investigación cualitativa. Comprender y actuar.* La muralla.

Usher, E. L. y Pajares, F. (2008). Self-efficacy in school: critical review of the literature and future directions. *Review of Educational Research, 78*(4), 751-796. https://doi.org/10.3102/0034654308321456

Vargas, M. (1994). Sobre el concepto de percepción. *Alteridades, 4*(8), 47-53. https://www.redalyc.org/pdf/747/74711353004.pdf

Wolf, L. J., Haddock, G. y Maio, G. R. (2020). *Attitudes.* Oxford Research Encyclopedia of Psychology. https://doi.org/10.1093/acrefore/9780190236557.013.247

Autor de correspondencia

KATIA LARISSA JÁUREGUI-HERNÁNDEZ

Dirección: Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo (IIDE),
de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), México
katia.jauregui@uabc.edu.mx
Carretera Transpeninsular Ensenada-Tijuana No.3917
Fraccionamiento Playitas C.P. 22860, Ensenada, Baja California, México.

 https://doi.org/10.24844/EM3703.06

Análisis comparativo en la evaluación en geometría: PISA y pruebas propuestas por docentes

Comparative analysis in geometry assessment: PISA and tests proposed by teachers

María Isabel Elvas Fernández,[1] Rafael Ramírez Uclés[2]

Resumen: Este estudio compara las tareas de evaluación propuestas por PISA, en el contenido espacio y forma, con las propuestas por docentes en el aula para evaluar el conocimiento geométrico de 122 estudiantes de 15 años que cursan primer año de bachillerato uruguayo. La investigación tiene un enfoque cualitativo de carácter descriptivo. El análisis aborda las competencias matemáticas y componentes del sentido espacial como expectativas de aprendizaje y el rendimiento obtenido por el alumnado. Los resultados muestran semejanzas en las competencias matemáticas de comunicar y representar, en el proceso cognitivo de comprender, en el manejo de conceptos geométricos y en la habilidad de percepción de las relaciones espaciales. El alto rendimiento en las tareas de PISA garantiza alto resultado en las tareas de aula, pero no al revés, ya que el buen rendimiento en las tareas de aula no implica un alto resultado en las tareas de PISA. El bajo rendimiento en el aula conlleva bajo resultado en PISA.

Fecha de recepción: 27 de julio de 2024. **Fecha de aceptación:** 4 de noviembre de 2025

[1] Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Campus de Cartuja, isabelelvas@correo.ugr.es, https://orcid.org/0000-0003-1502-0381

[2] Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Campus de Cartuja, rramírez@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-8462-5897

Palabras clave: *Expectativas de aprendizaje, Competencias, Habilidades de visualización, Sentido espacial, Tareas.*

Abstract: This study compares the assessment tasks proposed by PISA in the space and shape content with those proposed by teachers in the classroom to assess the geometric knowledge of 122 15-year-old students who are in the first year of high school in Uruguay. The research has a qualitative approach of a descriptive nature. The analysis addresses mathematical competencies and components of spatial sense such as learning expectations and the performance obtained by students. The results show similarities in the mathematical skills of communicating and representing, in the cognitive process of understanding, in the management of geometric concepts and in the ability to perceive spatial relationships. High performance in PISA tasks guarantees high results in classroom tasks, but not the other way around, high performance in classroom tasks does not imply high results in PISA tasks; and low performance in the classroom leads to low results in PISA.

Keywords: *Learning expectations, Competences, Visualization skills, Spatial sense, Task.*

1. INTRODUCCIÓN

Distintas investigaciones consideran necesario el pensamiento espacial para desempeñarse en el mundo moderno y tecnológico en el que vivimos y, proponen incorporarlo dentro del currículo (Diezmann y Lowrie, 2009), además enfatizan la alfabetización espacial y el desarrollo de las habilidades espaciales como fundamentos para los trabajos en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (Novitasari *et al.*, 2021). Las expectativas de aprendizaje en tanto objetivos y competencias, obran como herramientas organizadoras del currículo, fundamentan el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas vinculadas al sentido espacial (Lupiáñez, 2009). Algunas investigaciones encuentran beneficioso el uso de la visualización y el desarrollo de las habilidades espaciales en la mejora del desempeño en matemática (Presmeg, 2006). Se reconoce un trabajo continuo, desde la investigación, en relación con el razonamiento espacial, la medición y la visualización en geometría, el conocimiento del estudiantado vinculado a las definiciones y comprensión de figuras geométricas, a las relaciones de inclusión e identificación de formas y a problemas de interpretación involucrados en la resolución de tareas geométricas (Jones y Tzekaki, 2016).

Los informes de PISA, en los que Uruguay comienza a participar desde 2003, muestran una baja puntuación promedio en matemáticas en las últimas tres mediciones, 418 en 2015 y 2018 y 409 puntos en 2022. En el contenido espacio y forma obtiene la mejor puntuación promedio en relación con los resultados en otras áreas. De los seis niveles de puntuación definidos en forma creciente, el promedio uruguayo accede al nivel 1 de desempeño (ANEP, 2023).

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que abarca las características de las tareas, el sentido espacial, las habilidades de visualización, las expectativas de aprendizaje y el rendimiento del estudiantado, donde se busca establecer relaciones entre estas variables, con el fin de determinar diferencias y semejanzas entre las dos tipologías de tareas, de aula y de PISA. En este artículo en particular, se pretende aportar información sobre las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial requeridas a estudiantes de 15 años que cursan primero en bachillerato de Uruguay, en tareas de evaluación propuestas por docentes en el aula y tareas de PISA. Para ello, se proponen categorías para describir las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial en las tareas de PISA, en el contenido espacio y forma, y en las tareas de evaluación propuestas por cuatro docentes de una institución privada de Montevideo, cuando evalúan el aprendizaje de los lugares geométricos como contenido curricular correspondiente a geometría.

Se abordan dos preguntas principales: ¿Qué expectativas de aprendizaje, en cuanto a competencias, procesos cognitivos y componentes del sentido espacial, se evidencian en las tareas propuestas en evaluaciones de PISA en el contenido espacio y forma y por el profesorado en el aula en una evaluación de geometría? ¿Qué rendimiento manifiestan los y las estudiantes al resolver dichas tareas de evaluación de PISA y de aula?

En la investigación presentada en este artículo se consideran algunas demandas provenientes de la investigación. Por un lado, identificar las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial, lo que permite obtener información más precisa para diseñar, implementar y evaluar procesos formativos vinculados con el conocimiento geométrico y para ayudar a los docentes a establecer conexiones entre registros visuales y simbólicos de las mismas nociones matemáticas (Presmeg, 2006). Por otro, contribuir a la mejora de la interacción y coherencia entre los dos tipos de evaluación, a gran escala y en el aula, interna y externa, para ayudar al éxito de los aprendizajes de los estudiantes (Suurtamm *et al.*, 2016).

2. ANTECEDENTES

Para la mejora de los aprendizajes, las investigaciones revelan que la formulación de expectativas de aprendizaje brinda ventajas potenciales en la enseñanza de las matemáticas y, a la hora de perfeccionar la capacidad de los estudiantes para reflexionar críticamente, para justificar la validez científica de sus ideas y determinar la importancia del aprendizaje realizado durante los cursos (De Long *et al.*, 2005).

En distintos países y contextos se han realizado investigaciones que buscan establecer un vínculo entre las expectativas de aprendizaje y el rendimiento en matemáticas. En Australia, Sullivan *et al.* (2010) analizan la implementación de una tarea matemática por tres docentes diferentes y afirman que las expectativas de aprendizaje definidas por cada docente influyen positivamente en el éxito de la evaluación del tema trabajado. En Chile, Martínez (2015) investiga a través de las pruebas del sistema nacional de evaluación de la calidad del aprendizaje para matemáticas en octavo año de la enseñanza básica, y concluye que las altas expectativas de aprendizaje de los docentes sobre las posibilidades de los estudiantes, generan mejores resultados en las pruebas y al revés, las expectativas bajas perjudican el logro educativo.

El estudio de Chen *et al.* (2009) analiza las expectativas de aprendizaje relacionadas con la medición que involucra área y volumen en primaria, en los grados 1 a 8 de varios estados de EE. UU. y países asiáticos de alto rendimiento en TIMSS, incluidos Singapur, Taiwán y Japón. Los resultados indican que el contenido de matemáticas, la ubicación de grado y el nivel cognitivo de las expectativas de aprendizaje relacionados con temas de medición seleccionados varían marcadamente entre estados y países. La variabilidad en las expectativas de aprendizaje da como resultado diferencias en las oportunidades de aprender. Son varios los factores que pueden contribuir a un mayor rendimiento en matemáticas e influir en lo que aprende el estudiantado: las expectativas de aprendizaje, el profesorado que imparte la instrucción y la forma en la que organiza el tema.

El interés de las investigaciones en el campo de las capacidades espaciales por el desarrollo del razonamiento espacial surge, no solo por ser un componente importante de la acción y el pensamiento humanos, sino por su estrecha relación con el pensamiento y el conocimiento geométrico. Las continuas investigaciones relacionadas con el sentido espacial manifiestan la complejidad de acciones e interacciones involucradas al resolver tareas que lo implican (Ortiz y Sandoval, 2018). Algunos trabajos consideran necesaria la inteligencia espacial para la resolución de problemas (Riastuti *et al.*, 2017). Los estudios referidos a la educación de la geometría han abarcado el razonamiento y pensamiento espacial y, en particular, la visualización es un aspecto que ha recibido atención (Jones y Tzekaki, 2016) y se ha señalado su relación positiva con la resolución de problemas (Stylianou, 2001). Además, los resultados indican un bajo desarrollo de habilidades relacionadas con la orientación espacial, las relaciones y transformaciones espaciales, así como la comprensión de las dimensiones y la posición (Jones y Tzekaki, 2016).

3. MARCO TEÓRICO

Se estructura a partir de las variadas denominaciones de las investigaciones sobre las expectativas de aprendizaje: metas, competencias, objetivos, demandas y resultados. Se busca ponerlas en diálogo y examinarlas desde diversos niveles del currículo, las competencias educativas y los procesos cognitivos acerca de un contenido determinado, a través de la demanda formulada en tareas concretas. Se presentan las competencias y los procesos cognitivos en educación matemática, el concepto de sentido espacial y sus componentes, y la actuación de los estudiantes en la resolución de tareas de PISA y de aula.

3.1. Expectativas de aprendizaje y sus concepciones

Las expectativas de aprendizaje en cualquier disciplina se definen como “aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los estudiantes” (Lupiáñez, 2009, p. 77).

Las expectativas de aprendizaje en matemáticas “expresan determinados usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden observar o inferir a partir de las actuaciones de los estudiantes ante las tareas” (Lupiáñez, 2009, p. 77). Estos conocimientos habilitan a la persona que los domina a tener un conjunto de puntos de vista que le permiten una descripción general y juicio de las relaciones entre las matemáticas y las condiciones y oportunidades en la naturaleza, la sociedad y la cultura (Niss y Højgaard, 2011).

Estas expectativas se concretan en el desarrollo y logro de capacidades vinculadas con los conocimientos que se espera que adquieran los estudiantes durante su etapa formativa obligatoria. La capacidad, se muestra en la destreza y aptitud con que actúan y pueden usar sus conocimientos para realizar tareas y resolver problemas en diferentes situaciones y contextos (Flores y Lupiáñez, 2016).

Parece que hubiera acuerdo en que hay dos niveles en las expectativas de aprendizaje: un nivel más general del aprendizaje de las matemáticas, a largo plazo, donde se habla de metas y competencias matemáticas; otro nivel más específico, a corto plazo, en relación con lecciones, contenidos matemáticos o cursos, en el que se habla de objetivos educativos (De Long *et al*., 2005).

En las expectativas de aprendizaje a largo plazo, Rico y Lupiáñez (2008) hablan de competencias, las sitúan en una perspectiva amplia y comprensiva, que en matemáticas se refiere a "procesos cognitivos que el alumno es capaz de llevar a cabo a partir de conocimientos y destrezas" (p.71) que orientan la formación a largo plazo.

En relación con las expectativas de aprendizaje como objetivos educativos, estas describen los resultados de la instrucción de algún contenido de una materia y lo que deben hacer con ese contenido, pueden, además, ser un medio para determinar la congruencia de objetivos, actividades y evaluaciones educativas en una unidad, curso o plan de estudios (Krathwohl, 2002).

3.2. Expectativas de aprendizaje y competencias educativas

Los estudios de las últimas décadas manifiestan que el término competencia tiene asociado una variedad de definiciones y un significado poco preciso. Una persona que posee competencia dentro de un campo es alguien capaz de dominar los aspectos esenciales de ese campo de manera efectiva e incisiva y con una visión general y certeza de juicio (Niss y Højgaard, 2011). Desde el enfoque funcional, la "competencia se define como la habilidad para enfrentar con éxito demandas complejas en un contexto determinado" (Rychen, 2008, p.10).

La OCDE (2017) considera al individuo competente en matemáticas cuando es capaz de interpretar y formular matemáticas en diversidad de contextos, incluyendo "el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos" (p.67). Una competencia matemática es una disposición bien informada para actuar apropiadamente en situaciones que involucran un cierto tipo de desafío matemático (Niss y Højgaard, 2011).

En este estudio, se consideran siete competencias matemáticas que se definen en la tabla 1: comunicar; matematizar; representar; razonar y argumentar;

idear estrategias para la resolución de problemas; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; y usar herramientas matemáticas. Son distintas e independientes, pero pueden estar relacionadas entre sí o, no tan claramente definidas para que no haya superposición. Cada una de las competencias matemáticas permite llevar a cabo ciertos tipos de actividades matemáticas basándose en conocimientos fácticos y habilidades concretas (Niss y Højgaard, 2011; OCDE, 2017).

Tabla 1. Competencias matemáticas (Niss y Højgaard, 2011; OCDE, 2017)

Comunicar.	Leer, decodificar e interpretar declaraciones, preguntas, tareas u objetos, para comprender, aclarar y formular un problema. Resumir y presentar resultados o presentar a otros la solución, y una explicación o justificación.
Matematizar.	Transformar un problema definido en el mundo real a una forma estrictamente matemática, o interpretar o evaluar un resultado o un modelo matemáticos en relación con el problema original.
Representar.	Seleccionar, interpretar, traducir y utilizar una variedad de representaciones para capturar una situación, interactuar con un problema o presentar un trabajo. Las representaciones incluyen gráficos, diagramas, tablas, imágenes, ecuaciones, fórmulas y materiales concretos.
Razonar y argumentar.	Procesos de pensamiento con raíces lógicas que exploran y vinculan elementos del problema para hacer inferencias, verificar una justificación dada o proporcionarla.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	Seleccionar o idear un plan o estrategia para utilizar las matemáticas para resolver problemas derivados de una tarea o contexto, y guiar su implementación.
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Comprender, interpretar, manipular y hacer uso de expresiones simbólicas dentro de un contexto matemático. Comprender y utilizar construcciones formales basadas en definiciones, reglas y sistemas formales, y utilizar algoritmos.
Usar herramientas matemáticas.	Herramientas físicas, como instrumentos de medición, calculadoras y herramientas informáticas. Saber utilizarlas y conocer sus limitaciones.

Por su parte, Krathwohl (2002) habla de los objetivos educativos que ayudan a clasificar metas, objetivos o estándares educativos. Los objetivos más importantes de la educación, implican procesos que van desde comprender hasta hacer síntesis. Por lo tanto, los procesos cognitivos están constituidos por seis categorías que se definen en la tabla 2: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear.

Tabla 2. Procesos cognitivos (Krathwohl, 2002)

Recordar.	Recuperar conocimientos relevantes de la memoria a largo plazo que se puede traducir como identificar o reconocer.
Comprender.	Determinar el significado de las instrucciones tradicionales incluidos orales, escritos y gráficos, que se puede dividir en interpretar, ejemplificar, clasificar, resumir, inferir, comparar y explicar.
Aplicar.	Realizar o utilizar un procedimiento en una determinada situación que se traduce en ejecutar o implementar.
Analizar.	Desintegrar el material en las partes que lo constituyen y detectar cómo las partes se relacionan entre sí, a una estructura o a un propósito general, que se traduce en diferenciar organizar o atribuir.
Evaluar.	Emitir juicios basados en criterios y estándares, que se traduce en comprobar y criticar.
Crear.	Juntar elementos para formar un todo coherente o hacer un producto original que implica, generar, planificar y producir.

3.3. Expectativas de aprendizaje y el sentido espacial

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) resalta la noción de sentido espacial; propone que los estudiantes desarrollen el sentido espacial y la capacidad de usar propiedades y características de formas geométricas y, desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas para resolver problemas. Así, el concepto de sentido espacial sugiere un enfoque funcional de la geometría aplicada a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Flores *et al.* (2015) explican el sentido espacial como un modo intuitivo de "entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellos, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas" (p.129-130). Además, conciben el manejo de conceptos geométricos constituido por tres componentes: elementos geométricos (conceptos geométricos y propiedades de las formas); relaciones geométricas; ubicación y movimientos (orientación). La componente elementos geométricos hace referencia a los conceptos geométricos y propiedades de las formas, implica conocer formas y figuras que, supone identificarlas, definirlas, caracterizarlas y construirlas. Establecer y reconocer relaciones geométricas supone apreciar cualidades de las formas y los cuerpos geométricos. La ubicación, los movimientos y la orientación requieren de la capacidad para situar los elementos en el espacio y en el plano, identificar regularidades y elementos invariantes para realizar movimientos y, comprender la disposición de los elementos en el espacio.

Estos autores agregan la visualización como una componente transversal que establece conexiones entre las tres anteriores y da fortaleza al sentido espacial (figura 1). Definen la visualización como "un amplio conjunto de imágenes, capacidades y habilidades necesarias y útiles para elaborar, analizar, transformar y comunicar información relativa a las posiciones entre figuras, objetos y modelos geométricos" (Flores *et al.*, 2015, p. 133).

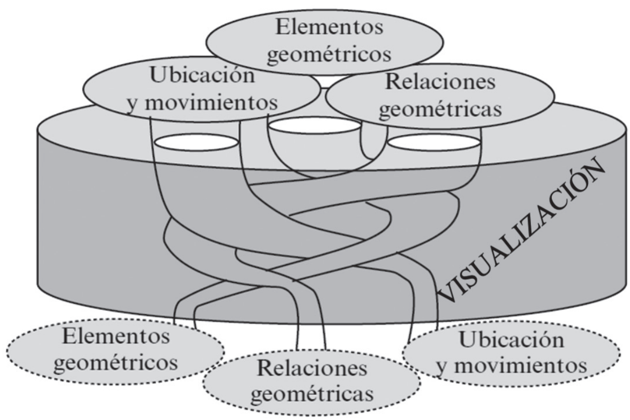


Figura 1. Esquema de las componentes del sentido espacial (Flores *et al.*, 2015, p.134).

En relación con la visualización, utilizan el marco teórico de Gutiérrez (1996) que, la concibe integrada por cuatro elementos: las imágenes mentales, los procesos de visualización, las representaciones externas y las habilidades de visualización. Este trabajo se centra en estas últimas al adquirir un papel relevante en la resolución de una tarea matemática (Gutiérrez, 2006).

Las habilidades espaciales se definen como una colección de habilidades que cambian o apoyan la percepción del espacio, que se representan en términos reales o mentalmente usando el conocimiento espacial (Mizzi, 2017). Se consideran siete habilidades de visualización que intervienen en la percepción espacial, en el proceso de manipulación y generación de imágenes: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y, memoria visual (Del Grande, 1990).

La coordinación ojo-motor involucra coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. La habilidad percepción figura-contexto, supone apreciar cambios en la percepción de las figuras contra fondos complejos y permite identificar un componente en una situación. La conservación de la percepción implica reconocer un objeto pese a sufrir variaciones de posición y tamaño. La percepción de la posición en el espacio determina un objeto en relación con otros objetos o con el observador. La percepción de las relaciones espaciales implica ver dos o más cualidades que caracterizan objetos relacionados con uno mismo o entre sí. La discriminación visual permite identificar similitudes y diferencias entre objetos. La memoria visual significa recordar con precisión objetos que ya no están a la vista y relacionar sus características con otros objetos que están o no a la vista.

3.4. Expectativas de aprendizaje y resultados de aprendizaje

Las expectativas de aprendizaje en matemáticas desde el punto de vista de los contenidos, se plantean a través de las tareas y, se manifiestan por medio de los logros y las actuaciones de los estudiantes (Rico y Lupiáñez, 2008).

Uno de los contenidos propuestos por PISA, espacio y forma, supone la comprensión de un conjunto de conceptos y habilidades básicos. Ser competente en matemáticas implica una variedad de actividades como comprender la perspectiva, crear y leer mapas, transformar formas, interpretar vistas de escenas tridimensionales desde varias perspectivas y construir representaciones de formas, que se ponen de manifiesto en las diversas tareas propuestas en cada medición (OCDE, 2017).

Las expectativas de aprendizaje se expresan como capacidades y se evidencian a través de conductas observables en la realización de tareas relativas a un tema específico con una complejidad determinada, o al conocimiento matemático que se espera hayan adquirido en el transcurso de una etapa escolar

(Lupiáñez, 2009). Se manifiestan a través de las tareas por medio de las actuaciones y los logros de los estudiantes (Rico y Lupiáñez, 2008).

Este estudio se centra en los resultados esperados de una etapa en los contenidos geométricos, a través de las tareas de PISA en el contenido espacio y forma, y de una unidad temática en relación con la geometría como son los lugares geométricos.

4. METODOLOGÍA

La investigación tiene un enfoque cualitativo de carácter descriptivo, busca comprender las expectativas de aprendizaje en la enseñanza de la geometría, las esperadas en la resolución de las tareas de PISA en el contenido espacio y forma y en las tareas propuestas por docentes en el aula para evaluar los lugares geométricos. Además, se espera comprender la manifestación del sentido espacial de 122 estudiantes de 15 años cuando resuelven ambas tipologías de tareas de evaluación.

4.1. Selección de las tareas

La selección de las tareas de evaluación implica dos procesos diferentes, el referido a la recolección de las tareas liberadas por PISA y la recolección y selección de las tareas de aula.

4.1.1. Tareas de PISA

De las tareas de evaluación liberadas por PISA se seleccionaron las correspondientes a PISA 2012, porque permanecieron como referencia y preparación para la última medición del 2022. Se eligieron las referidas a la competencia matemática, en particular, al contenido espacio y forma. Se descartan las tareas en soporte digital porque los enlaces encontrados no permiten su acceso (Instituto Nacional de Evaluación Educativa [INEE], s.f.).

Las tareas seleccionadas fueron siete que se refieren al contenido espacio y forma, y constituyen 13 preguntas que se nombran con las iniciales de su título y número de pregunta (ver anexo 1): compra de un apartamento (CA), heladería (preguntas H1, H2 y H3), vertido de petróleo (VP), la noria (preguntas N1 y N2), una construcción con dados (CD), garaje (preguntas G1 y G2) y puerta giratoria (preguntas PG1, PG2 y PG3).

4.1.2. Tareas de aula

Para la selección de las tareas de aula, se determina el curso de primero de bachillerato porque se encuentran la mayoría de los estudiantes con 15 años, corte etario de la evaluación de PISA. Se seleccionan las tareas de evaluación del único contenido curricular de geometría, por tanto, son tareas que evalúan el aprendizaje de los lugares geométricos (CES, 2010).

Dado que el interés del estudio está en el sentido espacial, se tiene acceso a seis pruebas de evaluación referidas a lugares geométricos, propuestas durante el año lectivo 2022 por cuatro profesores de secundaria de una institución privada de Montevideo. Dos profesores con dos grupos a cargo, y los otros dos con un grupo, forman un total de seis grupos en el nivel. Las pruebas tienen la misma estructura y similitud de exigencias en las tareas. Cada prueba está constituida por tres tareas. Se seleccionan dos pruebas de evaluación propuestas por dos profesores con uno y dos grupos a cargo, y constituyen seis tareas de aula que se codifican con Ai, desde A1 hasta A6 (ver anexo 2).

4.2. Recolección de datos

Para examinar los componentes del sentido espacial, se realiza la resolución amplia y detallada de cada una de las 13 tareas, siete de PISA y seis de aula. Se consideran todas las posibles estrategias de resolución y en cada estrategia se examinan todos los pasos. Las siete tareas de PISA con sus 13 preguntas se analizan de manera separada por dos expertos y se acuerdan las diferencias para establecer las categorías a priori. Las seis tareas de aula las resuelven dos docentes y se consensuan los procedimientos de resolución. A partir de esas respuestas, los dos expertos triangulan los componentes del sentido espacial.

En relación con el estudiantado, por una parte, se aplican las tareas de PISA a estudiantes de una institución privada de Montevideo. Se determina que las siete tareas de PISA se resuelven en 80 minutos, dos horas de clase que no siempre pueden ser consecutivas. Se dividen las tareas en dos cuestionarios para su aplicación a los seis grupos, un total de 155 estudiantes de 15 años. Por otra parte, se recopilan las calificaciones obtenidas por dichos estudiantes en las pruebas de geometría propuestas por el profesorado. El rango de las calificaciones para bachillerato en 2022, en Uruguay es de 1 a 12.

Se consideran las resoluciones de estudiantes que cumplen con asistir a las dos sesiones de cuestionarios y a la prueba de geometría. Son 122 estudiantes los que participan en todas las instancias, que se codifican como Ei, desde E1 hasta E122.

4.3. Determinación de las categorías de análisis

El trabajo de determinación de las categorías de análisis busca ajustarse a los objetivos planteados en este estudio. Para la creación de categorías, es necesario tener en cuenta que sean: pertinentes, adaptadas a los objetivos y contenidos; y exclusivas, un mismo elemento del contenido no puede ser clasificado en categorías diferentes (López, 2002).

En la tabla 3 se presentan los aspectos que atiende el análisis: las expectativas de aprendizaje como competencias educativas y componentes del sentido espacial. Para cada aspecto se establecen categorías y subcategorías descritas y definidas en el marco teórico. Así, el sentido espacial queda descrito a partir de cinco categorías para el manejo de conceptos geométricos y siete para las habilidades de visualización.

Tabla 3. Categorías y subcategorías

	Categorías	Subcategorías
Competencias educativas	Competencias matemáticas (Niss y Højgaard, 2011; OCDE, 2017)	Comunicar; matematizar; representar; razonar y argumentar; idear estrategias para la resolución de problemas; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; usar herramientas matemáticas.
	Procesos cognitivos (Krathwohl, 2002)	Recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear.
Sentido espacial	Manejo de conceptos geométricos (Flores *et al.*, 2015)	Conceptos de las figuras, propiedades de las formas, relaciones geométricas, ubicación y movimientos, y orientación.
	Habilidades de visualización (Del Grande, 1990)	Coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual, y memoria visual.

Para los resultados de aprendizaje se consideran las resoluciones de 122 estudiantes que son analizadas a través del acierto en sus respuestas. Los resultados, en las tareas de PISA atienden la cantidad de respuestas correctas y en las tareas de aula se considera la calificación obtenida por el estudiante en la prueba de evaluación propuesta por los docentes.

4.4. Descripción del análisis

El análisis se realiza a partir de las resoluciones de las 13 tareas que forman parte de esta investigación. Las siete tareas de PISA están constituidas por trece preguntas que se analizan de forma independiente, en adelante cada pregunta se considera como tarea. Mientras que cada una de las seis tareas de aula responden a una única consigna, por tal motivo se analiza la tarea en su conjunto. Así, se tienen en total 19 tareas para analizar. Los análisis fueron puestos en consideración, recibieron agregados y correcciones del intercambio entre los autores.

4.4.1. Análisis de las expectativas de aprendizaje en las competencias educativas

El análisis relativo a las expectativas de aprendizaje como competencias educativas considera la resolución de expertos de las tareas de PISA y la resolución de los docentes de las tareas de aula. Para todas las tareas se confecciona una tabla con las competencias educativas en sus dos categorías, competencias matemáticas y procesos cognitivos. Las tablas se completan con las subcategorías a partir de las evidencias que hay de ellas en cada tarea.

4.4.2. Análisis de las expectativas de aprendizaje en el sentido espacial

Para todas las tareas se confecciona una tabla con los componentes del sentido espacial, en sus dos categorías y correspondientes subcategorías (Elvas *et al.*, 2022). En la tabla 4, se presenta como ejemplo el análisis del sentido espacial en la tarea G2.

Tabla 4. Componentes del sentido espacial en la tarea G2

Componentes del sentido espacial		Tarea G2
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Aplicar el concepto de triángulo rectángulo, de rectángulo y de altura. Medida indirecta de la longitud. Medida directa del área.
	Propiedades de las formas	Aplicar el teorema de Pitágoras y el área del rectángulo.
	Relaciones geométricas	Lados opuestos de un rectángulo son paralelos. Lados consecutivos de un rectángulo son perpendiculares. La altura es perpendicular a la horizontal. El lado del rectángulo del tejado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo determinado por dos medidas que no corresponden a ningún objeto físico (la mitad de la anchura del tejado y su altura)
	Ubicación y movimientos	–
	Orientación	Identificar que el rectángulo superior de la vista lateral no representa el tamaño real del techo. Localizar los elementos del rectángulo (del techo) en las diferentes perspectivas.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	–
	Percepción figura-contexto	Identificar medidas que corresponden a objetos, como el largo del garaje se corresponde con el largo del techo. Identificar distancias entre objetos, como los que determinan el triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa al lado del tejado.
	Conservación de la percepción	Percibir la inclinación (el ancho y el largo en el techo), aunque no se vea en una de las vistas.
	Percepción de la posición en el espacio	Comprender las relaciones entre las medidas proporcionadas en las dos vistas, frontal y lateral para conformar el rectángulo que representa al techo.
	Percepción de las relaciones espaciales	Identificar y determinar el largo y el ancho real del techo a partir de las vistas frontal y lateral.
	Discriminación visual	Diferenciar la altura del ancho techo. Reconocer elementos comunes en las dos perspectivas.
	Memoria visual	–

4.4.3. Análisis del rendimiento del estudiantado en las tareas

Para el rendimiento en las pruebas de geometría que evalúan los lugares geométricos, propuestas por los docentes en el aula, se accede a las calificaciones que obtienen los 122 estudiantes. Se dividen en tres grupos: bajo, medio y alto según el rendimiento obtenido. La división se realiza según el criterio de evaluación que la institución educativa privada propone: bajo, calificación menor o igual a 4 que significa menos del 50 % de la prueba realizada con acierto, el rendimiento es considerado insuficiente; medio, del 5 al 8 donde se encuentran los estudiantes que realizan entre 50 y el 74 % de la prueba con acierto, el rendimiento va desde apenas aceptable hasta bueno; y alto, del 9 al 12, donde se encuentran los estudiantes que realizan entre 75 y el 100 % con acierto, cuyo rendimiento va desde muy bueno a excelente (tabla 5).

Tabla 5. Grupos de estudiantes según el rendimiento en las tareas de aula

	Rango total	Bajo	Medio	Alto
Calificaciones en pruebas de geometría	[1,12]	[1,4]	[5,8]	[9,12]
Cantidad de estudiantes	122	28	52	42

Para las tareas de PISA se construyen tablas que reúnen la información de la respuesta de 122 estudiantes de 15 años a cada una de las 13 tareas. Las respuestas se clasifican y codifican en: "bien resuelta" (B), llega a la respuesta esperada a través de alguna de las posibles estrategias de resolución; "mal resuelta" (M), no llega a la respuesta esperada; "con error" (ce), cuando el estudiante manifiesta errores en su proceso de resolución; "sin terminar" (st), cuando encauza la resolución, pero no alcanza una respuesta; y "sin hacer" (sh), cuando no hay registro de resolución ni respuesta.

En el estudio que se presenta en este artículo, se consideran las respuestas correctas. El rango de respuestas correctas es de 0 a 13, que se clasifica en los mismos tres niveles establecidos para el rendimiento: bajo, menos del 50 % de respuestas correctas; medio, entre 50 y el 74 %; y alto, más del 75 % de respuestas correctas (tabla 6).

Tabla 6. Grupos de estudiantes según las respuestas correctas en las tareas de PISA

	Rango total	Bajo	Medio	Alto
Respuestas correctas	[0,13]	[0,6]	[7,9]	[10,13]
Cantidad de estudiantes	122	85	29	8

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la presentación de los resultados, se confeccionan tablas que sintetizan la información para cada categoría con sus correspondientes subcategorías, que fueron definidas en el marco teórico, esta vez agrupándolas de acuerdo con su procedencia, es decir, las tareas de PISA con sus 13 preguntas y las seis tareas de aula.

Con los análisis agrupados se confeccionan tablas que sintetizan la información: la tabla 7 acerca de las competencias educativas, en sus dos categorías; y la tabla 8 relativa a los componentes del sentido espacial en sus dos categorías. En ellas se señala ausencia o presencia en la resolución de la subcategoría analizada.

Además, se busca establecer relaciones entre las expectativas de aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes. Para presentar los resultados obtenidos por los 122 estudiantes en las tareas de PISA y de aula, se consideran las respuestas correctas y las calificaciones alcanzadas.

5.1. Expectativas de aprendizaje en tareas de pisa y de aula

En este apartado se establecen relaciones entre las tareas de PISA y de aula, se siguen los dos niveles que se presentan en los resultados, las competencias educativas y los componentes del sentido espacial.

5.1.1. Competencias educativas

En la tabla 7 se encuentra la información sintetizada acerca de las competencias educativas como procesos cognitivos y competencias matemáticas en las tareas de PISA y de aula.

5.1.1.1. Competencias matemáticas

Tareas de PISA. Todas las tareas requieren dos de las competencias matemáticas: comunicar y representar. Comunicar, refiere a comprender el enunciado, el significado de la tarea indicada, por ejemplo, cuando el estudiante señala las cuatro longitudes en el apartamento, o cuando plantea la suma de tres segmentos para encontrar la longitud de la parte externa del mostrador, entre otros. Mientras que representar, refiere a traducir las representaciones brindadas en un mapa, por ejemplo, traducir que un conjunto está compuesto por un círculo que contiene un cuadrado y cuatro pequeños rectángulos representa una mesa y cuatro sillas, situarlo en la zona de mesas según las condiciones establecidas, e identificar el área que ocupa cada conjunto en la zona de mesas.

Otras dos competencias son mayormente requeridas en las tareas de PISA, usar herramientas matemáticas y matematizar, en ese orden. La herramienta que se usa es la calculadora a la hora de los cálculos que se necesitan realizar en todas las actividades, menos en el garaje y en la compra de un apartamento. Mientras que matematizar las situaciones de la vida real significa, por ejemplo, interpretar el mundo real ofrecido en la vista frontal y lateral del tejado y construir un nuevo modelo matemático en relación con el problema original de calcular la superficie total del tejado.

Entre seis y ocho tareas, requieren también utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas, idear estrategias para la resolución de problemas, y razonar y argumentar.

Tareas de aula. Todas las tareas de aula requieren cuatro de las competencias: comunicar, representar, razonar y argumentar, y utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Comunicar, refiere a presentar resultados, por ejemplo, escribir en palabras del estudiante una proposición dada en lenguaje simbólico. Representar, refiere a decodificar la información dada en el mapa, por ejemplo, interpretar un punto como intersección de una mediatriz y una bisectriz, o asociar que dos semirrectas son los lados de un ángulo. Razonar y argumentar, implica vincular elementos para inferir y justificar declaraciones, por ejemplo, las actividades A2 y A4 que requieren justificar las proposiciones indicando si son verdaderas o falsas a partir de la información brindada en el enunciado. Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas, requiere comprender y utilizar proposiciones en lenguaje simbólico basadas en definiciones, por ejemplo, $d(A, G) < d(G, C)$; $d(H, A) > 4 > d(A, G)$; $A = \left\{P \in \pi / d\left(P, \overleftrightarrow{BA}\right) \leq d\left(P, \overleftrightarrow{BC}\right)\right\}$.

Solo cuatro tareas requieren usar las herramientas matemáticas de regla y compás, mientras que no es requerida en la solución de las tareas de aula la competencia de idear estrategias para la resolución.

Las semejanzas entre las tareas de PISA y de aula se manifiestan en que todas las tareas requieren de dos competencias: comunicar y representar. Las diferencias se establecen en que las tareas PISA requieren idear estrategias para la resolución y las de aula no, todas las tareas de aula demandan razonar y argumentar, y utilizar lenguaje simbólico mientras que las tareas de PISA que las exigen son solo seis u ocho.

5.1.1.2. Procesos cognitivos

Tareas de PISA. Todas las tareas requieren en su resolución del proceso cognitivo comprender, que implica interpretar el significado de las consignas escritas en palabras y en gráficos del enunciado, los ejemplos corresponden a los indicados en las competencias, comunicar y representar antes descritas.

Otros procesos cognitivos requeridos en nueve o diez de las tareas de PISA son recordar, aplicar y evaluar. Se demanda recordar el teorema de Pitágoras, el cálculo de áreas de polígonos, la longitud de la circunferencia o el ángulo llano entre otros. Es necesario aplicar, por ejemplo, la suma de segmentos para obtener la longitud total, la suma o resta de áreas para obtener la solicitada, el teorema de Pitágoras para obtener la longitud de un segmento, y la composición o descomposición de figuras. Algunas tareas exigen evaluar si el resultado obtenido es coherente con la situación planteada.

Menos de la mitad de las tareas requieren analizar, por ejemplo, mediante la determinación de la superficie total del suelo de la tienda, excluidos el área de servicio y mostrador, las condiciones que se establecen para ubicar los conjuntos de mesas en el área de mesas, o los datos de la vista frontal y lateral del garaje para identificar largo y ancho del tejado, entre otros. Solo G2 requiere crear el rectángulo que representa el tejado que no está dado en el enunciado a partir de sus dimensiones.

Tareas de aula. Todas las tareas exigen en su resolución cuatro procesos cognitivos: recordar, comprender, analizar y evaluar. Recordar, implica recuperar conocimientos relevantes, por ejemplo, la definición de circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas como lugares geométricos. Comprender, supone interpretar el significado del enunciado: en las consignas escritas, los ejemplos se corresponden con los indicados en la competencia de comunicar antes descrita; y en los gráficos, por ejemplo, un punto exterior o interior a una circunferencia requiere inferir que la distancia con el centro es mayor o menor que el radio. Analizar, implica desintegrar en partes una proposición, por ejemplo, para poder afirmar si es verdadera o falsa. Evaluar, supone emitir juicios, por ejemplo, integrar las partes de la proposición y afirmar su verdad o falsedad.

Cuatro de las tareas de aula requieren crear, armar un producto, como por ejemplo, la A3 y A6, donde se debe representar gráficamente una proposición dada en lenguaje simbólico. Mientras que aplicar es requerida en solo dos tareas, A1 y A4, e implica el trazado de los cuatro lugares geométricos: circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas.

El proceso cognitivo exigido en todas las tareas tanto de PISA como de aula es comprender que se vincula directamente con las dos competencias en común, comunicar y representar. Se diferencian en el proceso cognitivo de crear, las tareas de aula intersecan lugares geométricos para determinar los puntos que cumplen con algunas condiciones, mientras que G2 es la única tarea de PISA que lo requiere. Las tareas de PISA necesitan aplicar procedimientos matemáticos para resolver las situaciones de la vida real, a diferencia de las tareas de aula, que parten de situaciones matemáticas y solo dos de ellas, A1 y A4, requieren ejecutar un procedimiento conocido como es la construcción de lugares geométricos. Otra diferencia es que las tareas de aula no requieren de idear estrategias para la resolución de problemas.

Tabla 7. Competencias educativas en tareas de PISA y de aula

Competencias educativas		H1	H2	H3	N1	N2	G1	G2	PG1	PG2	PG3	CA	VP	CD	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Competencias matemáticas	Comunicar	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Matematizar	x	x	x	x	x		x	x	x	x		x							
	Representar	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Razonar y argumentar					x	x		x		x	x		x	x	x	x	x	x	x
	Idear estrategias para la resolución de problemas	x	x	x	x			x		x			x							
	Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas	x	x		x	x		x	x	x			x		x	x	x	x	x	x
	Usar herramientas matemáticas	x	x	x	x	x		x	x	x	x		x	x	x		x	x		x
Procesos cognitivos	Recordar	x	x	x		x		x	x	x		x	x		x	x	x	x	x	x
	Comprender	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Aplicar	x	x			x		x	x	x	x		x	x	x			x		
	Analizar		x	x	x			x				x	x		x	x	x	x	x	x
	Evaluar	x	x	x	x		x	x	x	x	x		x		x	x	x	x	x	x
	Crear							x							x		x	x		x

5.1.2. Componentes del sentido espacial

En la tabla 8 se encuentra la información sintetizada acerca de los componentes del sentido espacial, manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización, en las tareas de PISA y de aula.

5.1.2.1. Manejo de conceptos geométricos

Tareas de PISA. Todas las tareas requieren en su resolución conocer conceptos geométricos tales como: triángulo, rectángulo, paralelogramo, trapecio, ángulo, circunferencia, distancia, medida directa e indirecta de longitud y de área entre otros.

Todas menos PG3 necesitan del empleo de las propiedades de las formas, tales como la aplicación del teorema de Pitágoras y de áreas de polígonos, la longitud como, suma o resta de longitudes, conservación de la distancia en los movimientos, composición y descomposición de áreas. A la vez, están implicadas relaciones geométricas tales como: paralelismo entre lados y caras; perpendicularidad entre segmentos, lados consecutivos y caras; distancia entre puntos de un segmento horizontal, vertical u oblicuo y entre objetos; amplitud de un sector de circunferencia, ángulos completos y obtusos, entre otras.

La mayoría, 10 de las 13 preguntas, requieren: la ubicación y los movimientos en todas salvo G2, VP y CD; y la orientación en todas, salvo N2, PG1 y PG3.

Tareas de aula. Todas las tareas requieren en su resolución conocer conceptos geométricos tales como: circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas como lugar geométrico; distancia y medida, semiplano y ángulo entre otros. A la vez, requieren del empleo de las propiedades de las formas tales como: puntos interiores, exteriores y en la circunferencia están a una distancia del centro menor, mayor o igual que el radio; puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo; puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento; y puntos de la unión de paralelas que distan una distancia fija de una recta.

En todas las tareas están implicadas también las relaciones geométricas, tales como: la distancia del centro de la circunferencia a un punto interior es menor que a un punto exterior; dos puntos como intersección de una recta y una circunferencia; un punto como intersección de una mediatriz y una bisectriz; los puntos que cumplen con dos condiciones: estar una distancia constante de un punto fijo y de una recta, entre otras. Asimismo, son requeridas la ubicación y los movimientos, por ejemplo, para la posición de puntos en relación con una circunferencia, (interiores, exteriores o pertenecientes a ella); que todos los puntos que equidistan de dos puntos fijos están alineados; o que todos los puntos que equidistan de los lados de un ángulo están alineados.

Todas las tareas, de PISA y de aula, requieren conocer conceptos geométricos. La mayoría hacen uso de las propiedades, de las relaciones geométricas, de la ubicación y los movimientos para obtener la solución. En menor medida se hace uso de la orientación en las tareas de PISA y establece la diferencia con las tareas de aula que solo una la requiere.

5.1.2.2. Habilidades de visualización

Tareas de PISA. Las habilidades visuales más requeridas para resolver las tareas de PISA son cinco: percepción de las relaciones espaciales, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción figura-contexto y, discriminación visual, aparecen entre ocho y once de las preguntas para su resolución. Mientras que la coordinación ojo-motor y la memoria visual son utilizadas en tres y cuatro preguntas respectivamente, H1, H2, H3 y CA.

Se puede afirmar que no hay una habilidad de visualización que sea necesaria para la resolución de todas las tareas. Asimismo, la coordinación ojo-motor y memoria visual son poco requeridas, aparecen en una o dos tareas, en la heladería y en la compra de un apartamento.

Tareas de aula. Todas las tareas requieren en su resolución la percepción de las relaciones espaciales, por ejemplo, percibir la igualdad de distancias, los puntos que cumplen con equidistar de los extremos de un segmento y pertenecer a la circunferencia; o puntos que cumplen con estar 3 cm de un punto fijo y 2 cm de una recta.

Hay dos habilidades visuales mayormente requeridas para resolver las tareas de aula: la coordinación ojo-motor y discriminación visual, aparecen en cuatro y cinco de las tareas. La percepción figura-contexto, conservación de la percepción y percepción de la posición en el espacio son utilizadas en una y dos de las tareas, mientras que la memoria visual no es requerida.

Se puede afirmar que hay cuatro aspectos del manejo de conceptos geométricos: conocer conceptos; las propiedades de las formas; las relaciones geométricas, y la ubicación y los movimientos; y una habilidad de visualización, percepción de las relaciones espaciales, que son requeridas para la resolución de todas las tareas, de PISA y evaluaciones de aula. Se diferencian en que las tareas de PISA precisan de la conservación de la percepción, la percepción de la posición en el espacio y en menor medida la percepción figura-contexto; y las tareas de aula requieren de la coordinación ojo-motor y discriminación visual, necesarias para construir e identificar, en particular cuando se trabaja con regla y compás. Las tareas de PISA utilizan la memoria visual en la resolución, no así las tareas de aula.

Tabla 8. Componentes del sentido espacial en las tareas de PISA y de aula

Componentes del sentido espacial		**H1**	**H2**	**H3**	**N1**	**N2**	**G1**	**G2**	**P G1**	**P G2**	**P G3**	**CA**	**VP**	**CD**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Propiedades de las formas	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Relaciones geométricas	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Ubicación y movimientos	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x			x	x	x	x	x	x
	Orientación	x	x	x	x		x	x		x		x	x	x						x
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	x	x	x											x		x	x		x
	Percepción figura-contexto	x	x	x		x	x	x				x	x	x	x			x		
	Conservación de la percepción	x	x	x		x	x	x	x			x	x	x	x					
	Percepción de la posición en el espacio	x		x		x	x	x	x	x		x		x		x			x	
	Percepción de las relaciones espaciales	x	x	x	x	x	x	x		x		x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Discriminación visual	x	x	x			x	x	x			x	x		x		x	x	x	x
	Memoria visual	x	x	x								x								

5.2. Rendimiento de los estudiantes en las tareas de PISA y de aula

Tareas de PISA. La tabla 6 contiene la información sintetizada acerca de las tareas bien resueltas. Permite afirmar que menos del 70 % de los estudiantes alcanza a realizar correctamente hasta 6 de las 13 tareas de PISA, que 24 % logra realizar entre 7 y 9 tareas con acierto y que tan solo 6 % logra realizar más de 10 tareas con acierto. Solo un estudiante logra responder las 13 con acierto. Las tareas respondidas con acierto por más del 83 % de los estudiantes son dos: G1 y CD; entre 50 y 64 % de los estudiantes respondieron con acierto a: CA, PG1 y PG3, y N1. Mientras que menos del 5 % respondieron con acierto a PG2 y VP.

Tareas de aula. La tabla 5 contiene la información sintetizada acerca de las calificaciones obtenidas por los estudiantes al realizar la prueba de geometría propuestas por los docentes en el aula. Permite afirmar que 23 % de los estudiantes alcanza a realizar menos de la mitad de la prueba con acierto, y que 34 % logra resolver con acierto más de las ¾ partes de la prueba, mientras que 43 % logra resolver con acierto más de la mitad y menos de las ¾ partes de la prueba.

Para el análisis comparativo en el rendimiento se examina el grupo alto-alto, estudiantes que responden en forma correcta más de nueve tareas de PISA y con calificación mayor a 8 en la evaluación de los docentes, y el grupo bajo-bajo, estudiantes que obtienen hasta seis respuestas correctas en las tareas de PISA y con calificación entre 1 y 4 en la evaluación de los docentes. En estos grupos se encuentran los estudiantes que han tenido alto o bajo rendimiento en las dos evaluaciones.

Grupo alto-alto. De los ocho estudiantes que logran resolver con acierto más de 9 tareas de PISA, seis de ellos obtienen una calificación mayor a 8, los otros dos tienen un 7. Mientras que de los 42 estudiantes que obtiene una calificación mayor a 8, pertenecientes al grupo de rendimiento alto en las tareas de aula, 23 de ellos (54 %) logran responder correctamente menos de la mitad, menos de 7, de las tareas de PISA, por lo que pertenecen al grupo bajo de las tareas de PISA (tabla 9).

Tabla 9. Grupo alto-alto

		Tareas de aula			
		Bajo	Medio	Alto	Total
Tareas de PISA	Bajo			23	
	Medio			13	
	Alto	-	2	6	8
	Total			42	

Grupo bajo-bajo. De los 85 estudiantes que responden con acierto menos de 7 tareas de PISA, como ya se dijo, 23 obtiene una calificación mayor a 8 y 24 obtienen una calificación menor a 5. Mientras que de los 28 estudiantes pertenecientes al grupo de rendimiento bajo en las tareas de aula, con calificación menor a 5, 4 de ellos logran responder correctamente 7 tareas de PISA, pertenecen al grupo medio, y todos los demás pertenecen al grupo bajo de las tareas de PISA (tabla 10).

Tabla 10. Grupo bajo-bajo

		Tareas de aula			
		Bajo	Medio	Alto	Total
Tareas de PISA	Bajo	24	38	23	85
	Medio	4			
	Alto	-			
	Total	28			

Se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes que logran un número alto de respuestas correctas en las tareas de PISA, logran también un buen rendimiento en las pruebas de evaluación propuestas por los docentes en el aula. Solo unos pocos de los que logran buen rendimiento en las tareas de aula obtienen un número alto de respuestas correctas en PISA. Los estudiantes que obtienen bajos resultados en las pruebas de aula logran resolver con acierto muy pocas tareas de PISA. Además, los estudiantes con muy pocas tareas de PISA resueltas con acierto logran un rendimiento variado en las tareas de aula.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo hace aportes en relación con las demandas de investigación. Se contribuye en la mejora de la coherencia entre la evaluación a gran escala y en el aula. Por un lado, se ha conseguido categorizar y clasificar las expectativas de aprendizaje como competencias educativas y componentes del sentido espacial en las tareas de evaluación de PISA 2012 y de docentes en el aula. Por otro, se han establecido relaciones entre los resultados de aprendizaje encontrados en los estudiantes al resolver las tareas de evaluación en geometría.

Se han establecido unos indicadores de análisis que han permitido identificar las expectativas de aprendizaje a través de las competencias matemáticas y los procesos cognitivos, las habilidades de visualización y el manejo de conceptos geométricos desarrollados por los estudiantes que permiten una mejora en la configuración de las condiciones de aprendizaje (De Long *et al.*, 2005). Se ha conseguido operativizar el análisis de las competencias matemáticas y los procesos cognitivos, las habilidades de visualización y el manejo de conceptos geométricos, lo que permite obtener información más precisa en relación con las capacidades espaciales, el desarrollo del conocimiento geométrico y su relación con la resolución de problemas para, entre otros, tomar decisiones pedagógico didácticas que favorezcan la práctica docente y la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Jones y Tzekaki, 2016; Ortiz y Sandoval, 2018; Riastuti *et al.*, 2017). Los indicadores de análisis y la identificación de las expectativas de aprendizaje permiten establecer relaciones entre el rendimiento en la evaluación de los conocimientos geométricos en el aula y en las tareas de PISA que favorece la coherencia entre ambas evaluaciones y puede resultar de ayuda para éxito de los aprendizajes de los estudiantes (Suurtamm *et al.*, 2016). El alto rendimiento en las tareas de PISA ha garantizado un alto resultado en las tareas de aula, pero no al revés, ya que el buen rendimiento en las tareas de aula no ha implicado un alto resultado en las tareas de PISA. El bajo rendimiento en el aula ha conllevado bajo resultado en PISA.

De acuerdo con los resultados, una semejanza en todas las tareas es que requieren de dos competencias matemáticas, comunicar y representar, directamente vinculadas con comprender, proceso cognitivo exigido también en todas ellas. Estas competencias matemáticas y proceso cognitivo se relacionan con el acceso a la información brindada y solicitada en las tareas, y a la explicitación de las respuestas que evidencian el alcance de la actividad matemática en la que el estudiante está involucrado, cuando resuelve tareas de evaluación en geometría. Asimismo, se evidencian algunas diferencias, ya que las tareas de aula requieren para su resolución de dos competencias asociadas a la argumentación y la utilización del lenguaje simbólico, no necesarias en las tareas de PISA. De igual modo sucede con el proceso cognitivo de crear, exigido en las tareas de aula y no así en las tareas de PISA (Niss y Højgaard, 2011; OECD, 2017). De los resultados se desprende que, tanto las tareas de PISA como las de aula buscan evaluar el aprendizaje del manejo de conceptos geométricos en todos sus aspectos, salvo en la orientación que establece la diferencia de las tareas PISA sobre las de aula (Flores *et al.*, 2015).

En relación con el sentido espacial, en los resultados se determina que las habilidades de visualización manifiestan mayores diferencias que semejanzas entre las tareas de PISA y las de aula. Todas las tareas requieren de la percepción de las relaciones espaciales. Sin embargo, las diferencias se establecen porque las tareas de PISA precisan de la conservación de la percepción y la percepción de la posición en el espacio, mientras que las tareas de aula requieren de la coordinación ojo-motor y discriminación visual.

Se puede afirmar que en todas las tareas son mayores las demandas del manejo de conceptos geométricos que de las habilidades de visualización. La evaluación de los docentes busca desarrollar los conceptos, relaciones geométricas, la ubicación, los movimientos, además de las habilidades de la precepción de las relaciones espaciales y de la posición en el espacio, si bien no es posible establecer el grado de desarrollo real en los estudiantes.

La conducta observable a través de la realización de las tareas relativas a un tema específico o al conocimiento geométrico de una etapa (Lupiáñez, 2009), permite inferir en esta investigación que, obtener buenos resultados en las tareas de PISA parece garantizar buen rendimiento en el curso, pero no al revés en tanto que hubo altos rendimientos en las tareas de aula con bajos resultados en PISA. Asimismo, obtener bajo rendimiento en el curso, en general implica tener bajos resultados en las tareas de PISA que miden los contenidos de una etapa, pero no sucede al revés en tanto que hubo bajos resultados en PISA con muy buen rendimiento en las pruebas de aula (Rico y Lupiáñez, 2008).

Se puede concluir que los buenos resultados en PISA y el buen rendimiento en el aula implican, mayor demanda del manejo de conceptos geométricos que de las habilidades de visualización; y el desarrollo de las competencias matemáticas, comunicar y representar, así como del proceso cognitivo de aprender (Niss y Højgaard, 2011).

Algunas limitaciones que se identifican en el estudio: la muestra de tareas, solo las liberadas por PISA sin poder acceder a las tareas interactivas; y la muestra de estudiantes, por estar centrado en una sola institución educativa. Para que los resultados tengan mayor sustento se podría extender la investigación a más estudiantes que abarquen realidades diversas, incluir los procesos de enseñanza y los objetivos específicos de los docentes que aporten información sobre posibles causas de que el estudiante promedio uruguayo alcance el nivel uno de desempeño, por debajo del nivel básico de competencia educativa definido por PISA. Sin embargo, se reconoce como aporte la categorización en las competencias educativas, en el sentido espacial y el análisis que permite trabajar con muestras mayores, con respuestas de estudiantes y comparar con otros países para brindar elementos objetivos en diseño de tareas de aula y estandarizadas, diseño de unidades para la formación del profesorado y para los desarrolladores de currículos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte de una de las líneas del proyecto PID2020-117395RB-I00 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación. Además, obtiene financiación de la ANEP. CES. Exp.2023-25-3-008641. Resol. Nº1310.

REFERENCIAS

ANEP. (2023). *Uruguay en PISA 2022. Volumen 4. Logros en matemática: marco conceptual, resultados y contexto curricular.* ANEP.

CES. (2010). *Programa de matemática primer año. Bachillerato, reformulación 2006, ajuste 2010.* ANEP. https://www.ces.edu.uy/index.php/propuesta-educativa/20207

Chen, J., Reys, B., y Reys, R. (2009). Analysis of the learning expectations related to grade 1-8 measurement in some countries. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 1013-1031. https://doi.org/10.1007/s10763-008-9148-5

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. En NCTM, *The arithmetic teacher, 37*(6), 14-20. https://doi.org/10.5951/AT.37.6.0014

De Long, M., Winter, D., y Yackel, C. (2005). Student learning objectives and mathematics teaching. *PRIMUS*, *15*(3), 226-258. https://doi.org/10.1080/10511970508984119

Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis, (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2*, (pp. 417-424). PME.

Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P. (2022). Habilidades de visualización en las evaluaciones escritas en secundaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 249-257). SEIEM.

Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Pirámide.

Flores, P. y Lupiáñez, J. L. (2016). Expectativas de aprendizaje escolar. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria,* (pp. 125-140). Pirámide.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.1* (pp. 3-19). PME.

Gutiérrez, A. (2006): La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

INEE (s.f.). *PISA 2012. Items liberados.* Recuperado el 31 de agosto de 2025, de https://www.educacionfpydeportes.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2012.html

Jones, K., y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.109–149). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4

Krathwohl, D. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: An overview. *Theory into practice, 41* (4), 212 – 254. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_2

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI Revista de Educación*, 4, 167-179.

Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (Tesis doctoral). Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/2726

Martínez, F. (2015). El rol de las expectativas docentes en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática (Tesis doctoral). Universidad de Chile.

Mizzi, A. (2017). *The Relationship between Language and Spatial Ability.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-20632-1

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Niss, M. y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.* Roskilde University, Department of science, systems and models, IMFUFA.

Novitasari, D., Nasrullah, A., Triutami, T.W., Apsari, R.A. y Silviana, D. (2021). High level of visual-spatial intelligence's students in solving PISA geometry problems. *Journal of Physics: Conference Series 895* (1), 1-9. IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1778/1/012003

OCDE (2017). *PISA 2015. Assessment and analytical framework: science, reading, mathematic, financial literacy and collaborative problem solving.* OCDE Publishing.

Ortiz, A. y Sandoval, I. (2018). Representaciones de cuerpos geométricos: una experiencia con profesores de primaria de Latinoamérica. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 427-436). SEIEM.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*, (pp.205-236). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009

Riastuti, N., Mardiyana, M. y Pramudya, I. (2017). Students' errors in geometry viewed from spatial intelligence. *Journal of Physics: Conference Series 895* (1), 1-6. IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012029

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Alianza.

Rychen, D.S. (2008). *Investigación internacional sobre competencias básicas para la vida.* USAID, Programa estándares e investigación educativa.

Shimizu, Y., Vithal, R., Arzanello, F., Ruiz, A., Cuoco, A., Bosch, M., Gholam, S., Morony, W. y Zhu, Y. (2018). Discussion document. En Y. Shimizu y R. Vithal (Eds.), *Proceedings the 24th ICMI study* (pp. 571-588). University of Tsukuba.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142.
https://doi.org/10.30827/pna.v4i4.6163

Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. y Vos, P. (2016). *Assessment in mathematics education: large-scale assessment and classroom assessment* (pp. 27-33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32394-7

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.225-232). PME.

Autor de correspondencia
María Isabel Elvas Fernández.
Dirección postal: Durazno 1125 Apto 801. Barrio Sur. Montevideo. Uruguay.
Código Postal: 11100
isabelelvas@correo.ugr.es

ANEXOS

Los anexos correspondientes a este manuscrito, proporcionados por los autores, pueden consultarse en los materiales complementarios del número 37(3) de *Educación Matemática,* disponibles en el sitio web de la revista https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/

 https://doi.org/10.24844/EM3703.07

Elementos para el diseño de Situaciones de Aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas con perspectiva de género

Elements for design Learning Situations for the teaching of mathematics with a gender perspective

María Guadalupe Simón Ramos[1]

Resumen: Desde distintas perspectivas teóricas y metodológicas la matemática educativa se ha preocupado porque las propuestas que surgen de la investigación lleguen a las aulas. Trabajo sobre la enseñanza y aprendizaje de los diferentes objetos matemáticos que están en el currículo escolar se publica y se comparte diariamente entre la comunidad. Las tendencias ponen atención hacia los elementos de tipo sociocultural y político que impiden que las personas de diferentes orígenes culturales, económicos, étnicos o por su sexo, puedan acceder a las virtudes que tiene el sentirse capaz en matemáticas dentro de su vida escolar, profesional y cotidiana. Este artículo presenta una reflexión teórico-metodológica que toma elementos de la epistemología de la matemática, la socioepistemología y de la epistemología feminista para plantear las bases para el diseño de situaciones de aprendizaje desde una perspectiva de género. Se parte de considerar que todos los elementos del triángulo de la didáctica pueden ser examinados con perspectiva de género y los resultados de este examen conjuntarse para la construcción de diseños para el aula desde una teoría con enfoque sociocultural.

Fecha de recepción: 5 de julio de 2024. **Fecha de aceptación:** 13 de agosto de 2025.

[1] Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México, maria_simon@uaeh.edu.mx, https://orcid.org/0000-0002-0140-4184

Palabras clave: *situaciones de aprendizaje, epistemología feminista, socioepistemología.*

Abstract: From distinct theoretical and methodological perspectives, our discipline has been worried about the proposals made by research and their arrival to the classroom. Work about the teaching and learning of different mathematical concepts in the scholar curriculum it's published and share everyday among the community. The trends take attention to sociocultural and political elements that impede that people of different cultural origins, economics, ethnic or by their sex could get access to the virtues that means feel capable in mathematics, into their scholar, professional and daily life. This article presents a theoretical and methodological reflection that takes elements of the mathematics epistemology, Socioepistemology and feminist epistemology, that focus on present de basis for the design of learning situations from a gender perspective. Starting off to consider that all the elements on the didactic triangle could be examine whit a gender perspective and the results of this exam get combined to the construction of design for the classroom from a theory whit a sociocultural approach.

Keywords: *learning situations, feminist epistemology, Socioepistemology.*

1. INTRODUCCIÓN: ¿POR QUÉ NECESITAMOS SITUACIONES DE APRENDIZAJE CON PERSPECTIVA DE GÉNERO?

Las personas que de manera profesional nos ocupamos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya sea desde la investigación o desde la docencia, tendríamos la obligación de preguntarnos: ¿Qué son las matemáticas? (Sierpinksca, *et al*., 1996; Font, 2007). Para algunas personas esta es una pregunta que ni siquiera tendría que hacerse, "la matemática es única y es universal". Sin embargo, mi experiencia como investigadora, formadora de docentes de matemáticas y en programas de desarrollo profesional, me dice que son muchos los tipos de respuestas que se obtienen ante esta pregunta. Por ejemplo: algunas de ellas se enfocan en una visión utilitaria de la matemática; otras en una de tipo conceptual; unas más la caracterizan como un sistema perfecto que además ayuda a desarrollar el intelecto; mientras que para otros es una herramienta para la modelación y la resolución de problemas.

Otra pregunta de tipo epistemológico que los mismos autores nos invitan a hacernos es: ¿Cómo sabemos que lo que sabemos en matemáticas es cierto? En este caso las respuestas están polarizadas según el nivel educativo o el grado de especialización en matemáticas que se tenga. Para la matemática escolar tradicional, llegamos a un resultado verdadero si hemos seguido correctamente el algoritmo adecuado; para la matemática aplicada, hemos llegado a un conocimiento verdadero si el modelo matemático que hemos propuesto tiene un parecido muy cercano a la realidad. Y para la matemática pura una prueba que siga un método axiomático será la adecuada para llegar a aceptar o rechazar una proposición.

Desde nuestra disciplina, la matemática educativa, han sido muchas personas a lo largo de varias décadas las que han buscado reflexionar en comunidad sobre el tema, pues es a partir de tomar postura sobre esto que, podremos realizar propuestas para la enseñanza de las matemáticas y también para su evaluación.

Una de las posturas más conocidas sobre qué es la matemática, es la Platónica, la cual considera que se trata de un conocimiento a priori, es decir, preexistente e independiente de la mente humana.

> El platonismo considera que las entidades matemáticas son no empíricas, perfectas, inmutables y totalmente objetivas (independientes del pensamiento y de la percepción). (Font, 2007, p. 2)

Esta concepción sobre la matemática es la que está presente en la matemática escolar y entre el profesorado. Y se transmite desde los niveles básicos hasta el nivel superior, ya sea que se trate de una carrera relacionada o no con matemáticas. Más aún, esta visión es de origen occidental y se ha transmitido en todos los niveles de nuestro sistema educativo a manera de colonización mental (siguiendo los principios de la Etnomatemática de D´Ambrosio, 2014). Ante esta problemática afirmamos en este momento, que la matemática escolar es además androcéntrica. Más adelante se desarrollará este término con profundidad.

Karla Sepúlveda y Javier Lezama (2021) han analizado de manera particular la epistemología del profesorado sobre el conocimiento matemático. Concluyen que una visión platónica niega la posibilidad creadora a las personas y por lo tanto también la posibilidad de modificar su realidad. Como producto de esta "racionalidad mono-epistémica" de entender a la matemática y su enseñanza, se contribuirá a mantener las condiciones de desigualdad actuales. Pues, según los autores reproduce la sociedad de clases de manera que se mantengan las condiciones de producción y reproducción inmutables.

La reflexión que se desarrolla en este artículo parte de considerar otras formas de construcción de conocimiento diferentes a las hegemónicas. Y también de reconocer a la matemática en uso en contextos a los que no suele recurrirse en clase, como los que se asocian a las mujeres y a lo femenino. Para ello es necesario apoyarnos en un enfoque teórico de tipo sociocultural que, además, es el que ha dado la pauta para generar este tipo de reflexiones.

Entre los principales fundamentos de la socioepistemología (también llamada Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa) está su crítica a la matemática platónica y a su presencia en nuestro sistema educativo, desde el nivel preescolar, hasta el nivel superior e incluso presente en el cotidiano de las personas, tanto en el ámbito profesional como personal. Por lo tanto, dicha teoría se ha propuesto el rediseño del discurso matemático escolar como una forma de atender problemas sociales y culturales que acompañan a la actividad didáctica en matemáticas. Esto con el objetivo de democratizar el aprendizaje y también la enseñanza de esta. Tiene entre sus objetivos que, todas las personas puedan gozar de la matemática inmersa en sus vidas, ya sean docentes o estudiantes. Y por qué no, a través de ello alcanzar a la sociedad en general y cambiar las concepciones que tienen sobre la matemática, su enseñanza y sobre quienes tienen la capacidad necesaria para aprenderla. Pero a la vez, que también se abran espacios para otras formas de conocer (Sepúlveda y Lezama, 2021). Es decir, dar valor a la presencia dentro y fuera del aula de otros sujetos epistémicos.

Al respecto, la investigación en socioepistemología ha puesto gran empeño en caracterizar a lo que se ha denominado "discurso matemático escolar" (dME) y una de las investigaciones que más ha dado luz sobre este discurso es la de Soto en 2010 y 2014 (Soto, 2010; Soto y Cantoral, 2014). Ella ha caracterizado al dME como un sistema de razón que produce violencia simbólica, a partir de la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos. Las características de este discurso matemático escolar, o lo que podemos considerar la enseñanza tradicional de las matemáticas, que además excluyen a las personas de la construcción de conocimiento son:

- Hegemónico, esto significa que al presentar una única forma de construir conocimiento matemático marca superioridad respecto de otras.
- Ha antepuesto la utilidad inmediata y a corto plazo del conocimiento al resto de sus cualidades.
- Los objetos se presentan siempre en el mismo orden y como preexistentes a la actividad humana.
- Se ha enfocado tanto en los objetos matemáticos que los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento no tienen cabida en él y por lo tanto, tampoco cualquier otro marco de referencia, donde hayan surgido o permita la significación de los mismos.

La conclusión que engloba el trabajo de Soto es que el discurso nos ha excluido de la construcción de conocimiento matemático. En un sentido amplio, tenemos acceso, sin embargo, no somos considerados, somos invisibles (Soto y Cantoral, 2014).

Hegemónico	Existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, frente a otras
Utilitario	La organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades.
Acabado y continuo	Los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden preestablecido.
Atomizado en objetos matemáticos	No se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento
Sin marcos de referencia	Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

Ilustración 1. El discurso Matemático Escolar actual (dME).

Para Soto y Cantoral (2014), tanto docentes como estudiantes somos excluidos de la construcción de conocimiento matemático. Esto debido a que los procesos de control hegemónico social, político y cultural han generado un sistema escolar que ha tendido a invisibilizar formas de conocimiento usados y emanados en y desde las prácticas sociales de una gran parte de la población. Explican también este tipo de exclusión al considerar su participación (la del dME) en la falta de acceso de ciertos grupos, poblaciones o individuos que son minoría en los espacios educativos, como: los pueblos originarios; quienes viven con alguna discapacidad; las personas en su cotidiano; de bajos recursos económicos; grupos culturales no dominante; y, por supuesto, las mujeres. Siendo este último grupo el que nos ocupa, pues las actividades asociadas a las mujeres y a lo femenino dentro de la cultura occidental no son consideradas importantes y poca referencia se hace a las mismas como contextos de uso o aplicación para la matemática.

Dado el enfoque que fue tomando la teoría a lo largo de los años, estudiar a la actividad humana no podría realizarse a través de tomar únicamente los objetos matemáticos. Por lo tanto, era necesaria una descentración del objeto y focalizar la investigación en aquellas prácticas humanas cotidianas que permiten la construcción de conocimiento: predecir, clasificar, comparar, transformar, construir, optimizar, anticipar, localizar etcétera.

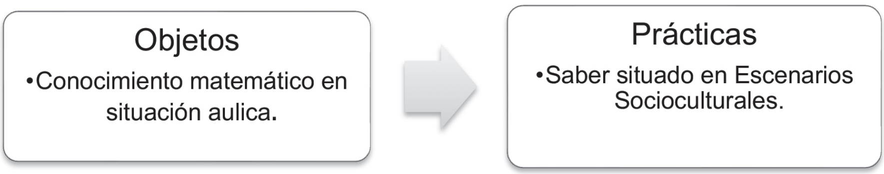


Ilustración 2. Enfoque socioepistemológico.

De manera general podemos describir este paso de los objetos a las prácticas como pensar al conocimiento matemático más allá del aula y considerarlo en el día a día de las personas, en su toma de decisiones, en la producción de ciencia, tecnología y de bienes y servicios. Es decir, el saber matemático situado en escenarios socioculturales. Esto implicaba dejar de pensar que solo dentro de la escuela es posible aprender. Pasar de considerar a un estudiante dentro de un aula, descontextualizado, liberado de las capacidades prácticas de actuar con objetos en el espacio, en particular de los espacios en donde desarrolla su vida cotidiana (Valero, *et al.* 2022), a considerarlo un individuo que nunca es una hoja en blanco y nunca está solo, siempre está acompañado de su cultura, su historia, sus saberes y los de su comunidad.

2. GÉNERO Y CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Es desde esta postura sobre la exclusión del discurso matemático escolar y sobre centrarnos en las prácticas que permiten la construcción de conocimiento, que se logra voltear la mirada hacia las mujeres, como una forma de hacerles justicia, una justicia epistémica, considerarlas como constructoras de conocimiento matemático. En el pasado se pensaba que las mujeres no producían conocimiento verdadero, este solo era producido por hombres blancos, heterosexuales, con buena posición económica y social (sujeto androcéntrico) y las mujeres debíamos vivir eternamente buscando un espacio donde nuestros saberes fueran valorados y aceptados como importantes en el progreso científico. No está de más mencionar que las aportaciones científicas de las mujeres fueron denominadas brujería y se creía que eran producto de prácticas mágicas y supersticiones (Blazquez, 2012). Al respecto, la epistemología feminista (Castañeda, 2014) reflexiona que, el conocimiento que se ha tomado como verdadero es el que se ha construido, desde una postura del género masculino, es decir, desde la subjetividad masculina, asociada al poder y la dominación. Más aún, desde este programa de investigación reconocemos los contextos en los cuales las mujeres siempre hemos sido orientadas a desarrollarnos, como espacios que permiten la construcción de conocimiento y, pretendemos darle la legitimidad que merece como conocimiento científico y matemático.

Desde varias investigaciones en la línea género y matemáticas, la socioepistemología ha dado evidencia de cómo, desde una cultura patriarcal (sistema que mantiene la subordinación e invisibilización de las mujeres) con un punto de vista androcéntrico (varones, de raza blanca, con acceso a la propiedad privada, heterosexuales, occidentales, etc.), se ha construido un discurso matemático escolar hegemónico y utilitario, desprovisto de marcos de referencia con lo cual impone significados, argumentos y procedimientos centrados en los objetos matemáticos. También, ha dado evidencia del énfasis que dicho discurso pone en las producciones de los hombres y desde un punto de vista masculino. Por ejemplo, se privilegia un estilo de argumentación centrada en objetos abstractos y la competencia en el aula. Lo anterior significa que las formas de conocimiento que tienen más valor mantienen las estructuras de poder en las cuales las mujeres y otros grupos sociales son excluidos (Cantoral y Soto, 2014).

Como ya hemos mencionado, la matemática y la matemática escolar representan un paradigma androcéntrico de conocimiento. Consideremos ahora al triángulo de la didáctica, indispensable para el estudio de los fenómenos que competen a nuestra disciplina, para analizar el cómo estas características lo permean.

Al analizar el polo del docente como reproductor de la cultura, también reproduce creencias y el trato por género en el aula. Para el polo del alumno, estamos hablando de un sujeto que vive en un contexto dividido en roles de género y que, además, está expuesto a una fuerte carga de estereotipos de tipo histórico, social y cultural. Por ejemplo, que el tamaño y la forma del cerebro de los hombres les hace más aptos para la matemática o que tienen mayor facilidad para desarrollar ciertas habilidades del tipo que son más importantes en esta área como las visoespaciales. Solo por mencionar algunas.

Por su parte Soto, junto con un conjunto de colegas que se interesan en el tema de exclusión y otros temas relacionados, ante fenómenos de este tipo, hacen una propuesta de rediseño del discurso matemático escolar para la inclusión. Este puede adaptarse perfectamente al caso de las mujeres y la construcción del género como una dualidad entre poder y subordinación, masculino/femenino (Gómez *et al.*, 2015) (ilustración 3). De este modo podemos pensar en las mujeres como parte de la diversidad de grupos culturales con formas propias de construcción y uso de conocimiento matemático que no ha sido legitimado como conocimiento científico. Según lo reportado por Araceli Mingo (2006), en su análisis de diferencias entre los sexos en investigaciones de distintos países, ellas tienen un estilo de aprendizaje abierto y reflexivo, que se enfoca más en el contexto social de los problemas. Lo cual coincide con los resultados obtenidos por las investigaciones de Simón M. G. y por Farfán C. y Farfán R. (2017) en las que concluyen que, ellas se relacionan mejor con una matemática funcional por encima de la utilitaria. Esta propuesta al no centrarse en objetos permitirá la visibilización y la inclusión de prácticas de referencia donde se desarrollan las mujeres, considerando la transversalidad de la matemática. El estudio de los contextos, asociados a lo femenino y a las mujeres, que permiten la construcción de conocimiento matemático, dará la pauta para generar epistemologías de usos de conocimiento matemático de las mujeres (en el sentido de Cordero, 2017).

dME	Construcción social del conocimiento matemático	Perspectiva de género
Hegemónico	Pluralidad epistemológica	Reconocer a las mujeres y a los contextos femeninos en la construcción de conocimiento matemático.
Utilitario	Funcional	La funcionalidad y el uso del conocimiento está en la base de los razonamientos de las mujeres.
Centrado en objetos	Centrado en práctica	Las prácticas asociadas a los saberes de las mujeres permiten también la construcción de conocimiento
Continuo y lineal	Transversalidad	La mecanización de conceptos o memorización de procedimientos no está dentro de las metas principales de las mujeres pues su estilo de aprendizaje es abierto y reflexivo.
Sin marcos de referencia	Desarrollo de usos	Los marcos de referencia en los cuales se da significado al conocimiento matemático no son aquellos en los que tradicionalmente las mujeres participan.

Ilustración 3. Rediseño del discurso matemático escolar.

3. ELEMENTOS TEÓRICOS PARA EL DISEÑO DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE DESDE UNA PERSPECTIVA DE GÉNERO

La socioepistemología asume la legitimidad de toda forma de saber, sea popular, técnico o culto, pues en su totalidad constituyen la sabiduría humana (Cantoral *et al.*, 2014). En este sentido, partimos de que la sabiduría de las mujeres ha sido ignorada, opacada, subordinada e invisibilizada.

Pasar de los objetos a las prácticas permite pasar de un conocimiento matemático ya fijado, del cual las mujeres aparentemente no han formado parte en su construcción, a las prácticas que anteceden al conocimiento. Partimos de que muchas de ellas se encuentran en las prácticas de referencia asociadas a las mujeres y a lo femenino donde es posible identificar en estas el uso de conocimiento matemático. Esto último, con formas y principios inimaginables pues los conocimientos de las mujeres pocas veces han sido mirados con esta intensión.

La socioepistemología se ha constituido como una teoría de tipo sistémica que al tomar en cuenta la complejidad de la naturaleza del saber, estudia a los fenómenos de construcción social del conocimiento, partiendo de una perspectiva múltiple que incorpora a las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social. Al considerar las múltiples dimensiones del saber, esta teoría ha resultado ideal para abordar nuestro fenómeno de estudio.

Para determinar los elementos de la construcción social del conocimiento matemático la socioepistemología utiliza una herramienta teórica-metodológica denominada problematización del saber matemático. Esta se emplea para estudiar de forma articulada las distintas dimensiones de un saber matemático específico: dimensión epistemológica, circunstancias que hicieron posible la constitución del saber; dimensión cognitiva, formas de apropiación y significación progresiva del conocimiento; dimensión didáctica, cómo vive el saber en el sistema didáctico; y dimensión sociocultural, el uso situado del saber (Farfán *et al.*, 2019).

Hemos encontrado importante resaltar en el análisis los siguientes elementos de tipo epistemológico: reconocer a las mujeres como grupo social que construye conocimiento matemático, partiendo de una epistemología distinta a la dominante; identificar; visibilizar; y estudiar los saberes de las mujeres y los asociados a lo femenino. Cabe mencionar que estas cuatro dimensiones se entretejen en una sola unidad de análisis y por motivos ilustrativos las mostramos separadas para delinear nuestra propuesta para el aula de matemáticas:

Desde la dimensión epistemológica, vale la pena acercarnos a las formas de construcción de conocimiento de las mujeres, las cuales en su mayoría han quedado relegadas pues su trabajo no ha salido a la luz, su autoría no se ha reconocido o sus conocimientos no son considerados valiosos. Actualmente las investigaciones realizadas desde la perspectiva de género y la matemática educativa han ayudado a develar este aspecto. Se ha evidenciado que más mujeres mostramos un estilo de construcción de conocimiento abierto y reflexivo que se enfoca más en la funcionalidad y uso del conocimiento que en su mero utilitarismo al interior del aula.

En el caso de la dimensión cognitiva, hemos identificado que muchas de las investigaciones realizadas en el pasado, con el objetivo de caracterizar el pensamiento matemático de las mujeres, estaban fuertemente sesgadas por las ideas y estereotipos que histórica y culturalmente se han depositado sobre el género femenino. Entre las investigaciones en socioepistemología, el trabajo de Verónica Ortiz parte de haber identificado una tendencia en los resultados de varias investigaciones, de hace dos décadas o más. Estas atribuyen a los hombres una habilidad visoespacial mejor desarrollada que en las mujeres, lo cual, según estos trabajos comprometía el desarrollo de la habilidad matemática de ellas (Farfán y Ortiz, 2019). Entre otras cosas, esta autora realiza un estudio minucioso de los procesos cognitivos relacionados con la visualización, para concluir que las pruebas utilizadas para evaluar la visualización espacial no los consideran a profundidad. Más aún, citando a Acuña (2012), destaca que "el principio de toda idea matemática surge de la interacción entre el que mira y lo que se mira" poniendo en evidencia la necesidad de realizar nuevas investigaciones que den un enfoque actual a la forma en que nuestros procesos cognitivos (los de las mujeres) se conjugan con los aspectos socioculturales para dar pie a la construcción de conocimiento.

Desde la dimensión social, lo más importante será diversificar los ejemplos, es decir, incluir aquellos contextos y prácticas de referencia en los que se lleva a cabo la construcción de conocimiento, pero que son poco reconocidos y valorados pues tradicionalmente están asociados a lo femenino o se trata de temas que tienen que ver con las mujeres. Y finalmente desmontar todas las prácticas discriminatorias que se dan al interior de las aulas hacia las mujeres, lo cual consideramos podremos hacer a través de legitimar sus saberes y su contribución al conocimiento.

Todo lo anterior, siguiendo la propuesta de la epistemología feminista, que nos invita a empezar por las mujeres, partir de aquello que les atañe y las pone en una situación de desigualdad (Castañeda, 2014). Y como segundo objetivo reconocerlas como sujetos capaces de construir conocimiento matemático. La teoría del punto de vista de Sandra Hardíng (1990), nos guía a considerar la aparente ausencia de las mujeres en el mundo científico del pasado, para ayudar a cimentar nociones más objetivas del mundo, en términos de lo que nos ocupa, "reconocer una visión más amplia e inclusiva sobre los usos y la construcción de conocimiento".

El trabajo de Cynthi Farfán (2016), sobre la importancia de analizar con una perspectiva de género la resolución de problemas de tipo multiplicativo en el aula de primaria, ha mostrado la importancia del carácter funcional del saber matemático que caracteriza a las Situaciones de Aprendizaje (SA) de la socioepistemología. Sin embargo, al usar esta misma metodología didáctica con estudiantes de nivel superior en una carrera de matemáticas avanzadas se obtuvieron resultados contradictorios. La investigación de maestría de Brenda Carranza sobre *el uso de estrategias dinámicas para la introducción de la noción de variación en la ecuación diferencial ordinaria con perspectiva de género* (2019), evidenció que aun cuando el diseño se planeó para conscientemente incorporar a las estudiantes mujeres en la discusión al trabajar con las SA, aspectos de tipo cultural asociados al género, prevalecieron a través de ciertas acciones de forma inconsciente, tanto por parte de la investigadora como de las y los participantes. Carranza, identificó que durante las actividades ellas mostraron baja confianza, ansiedad y renuencia a participar activamente. Además, al llevar a cabo un análisis minucioso de las interacciones durante las actividades, notó que incluso ella, en algunos momentos, pasó por alto lo que ellas deseaban aportar para poner más atención a un participante varón (p. 431).

Por otro lado, la propuesta de modelación de Erika Frayre, al trabajar la proporcionalidad en la elaboración de platos de barro por alumnas y alumnos del grupo étnico o'dam de nivel primaria en el estado de Durango, mostró que necesitamos empoderar a las estudiantes mediante visibilizar y valorar las actividades asociadas a lo femenino dentro del aula escolar (2023). Esto debido a que la elaboración de platos de barro es una actividad considerada femenina y los resultados de la implementación de su diseño didáctico evidenciaron una participación más activa de parte de las niñas en la clase de matemáticas. Los resultados de esta investigación dieron mayor claridad a las reflexiones que desde nuestra postura teórica habíamos realizado y nos permitió distinguir a los saberes de las mujeres en otras investigaciones que los habían integrado. Mencionaremos el trabajo de De la Cruz y Buendia (2021) y el de Barkera y Solares (2016) por haber sido realizados dentro de la disciplina y como un ejemplo de cómo los saberes de las mujeres están siendo considerados como importantes marcos de referencia para la construcción de conocimiento matemático.

No obstante, estas investigaciones al no haber sido llevadas a cabo con una perspectiva de género no han puesto por delante a las mujeres y lo que les involucra, como lo menciona Castañeda (2014). En el caso de la investigación de Barkera y Solares (2016) sobre los conocimientos matemáticos involucrados en la producción de bordados de la cultura hñähñu, se han enfocado en aspectos de tipo metodológico para la investigación y conceptuales para la matemática, centrándose en los factores semióticos y culturales involucrados en la actividad. Obtuvieron como resultado un conjunto de transformaciones geométricas que, si bien están presentes en los diseños de las mujeres bordadoras, sus principios de construcción no son equivalentes a los de la geometría plana. Los investigadores identifican esto y no descartan la posibilidad de usar lo que llamaron “una geometría práctica” como alternativa didáctica para la enseñanza. Es importante hacer notar que esta investigación, si bien visibiliza el trabajo de las bordadoras y sus conocimientos puestos en uso, estos quedan a un nivel epistémico inferior que el de la matemática formal. La propuesta principal de este artículo, razón por la que al inicio se ha realizado una reflexión de tipo epistemológico, es reconocer y profundizar en otras formas de construcción y uso de conocimiento matemático.

Por su parte, De la Cruz y Buendía (2021) toman a una actividad comunitaria con el objetivo de identificar un contexto de significación para la matemática del cambio y la variación, "la elaboración de la buena tortilla". Para el estudio del cambio y la variación las preguntas: ¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia? ¿Por qué cambia de esa manera? Son una herramienta metodológica de primera mano. Al responder a la primera pregunta esta investigación toma a la temperatura como aquello que cambia y permite la cuantificación del fenómeno endotérmico, reconociendo que aquello que consideran las mujeres al realizar la tortilla es el cambio de color y la textura.

> ... la buena tortilla involucra un conocimiento funcional que quienes la elaboran han desarrollado a partir de las vivencias y experiencias con la actividad comunitaria. Respecto a cuándo se debe voltear la tortilla, puede entreverse de forma implícita la noción de predicción pues precisa de la valoración empírica del cambio y la cuantificación intuitiva del tiempo que se concreta en las dos acciones de volteo necesarias para producir la buena tortilla. (De la Cruz y Buendía, 2021)

Si todas estas características de una matemática funcional están presentes en el fenómeno las preguntas son: ¿Por qué se eligió a la temperatura para analizar el fenómeno? ¿Podrían haberse usado otros elementos que están presentes en el proceso para elaborar una tortilla para cuantificar el fenómeno? Si bien, esta investigación visibiliza los saberes de las mujeres y de la comunidad, no obstante, la actividad real al hacer la tortilla queda ensombrecida por la medición y cuantificación de la temperatura usando una herramienta tecnológica. Sumado a que, al considerarse una actividad comunitaria, el saber de las mujeres queda en un lugar secundario y, como resultado, ellas no son protagonistas.

Por lo tanto, nuestra propuesta pretende visibilizar a las mujeres, sus saberes y a la matemática ahí presente, reconociendo que podemos encontrar formas de pensar matemáticamente diferentes a las escolares y hegemónicas.

4. LA EVOLUCIÓN DE LAS SITUACIONES DE APRENDIZAJE CON PERSPECTIVA DE GÉNERO

Nos hemos propuesto para este documento hacer un recorrido por cómo hemos construido la articulación entre la perspectiva de género y la socioepistemología para el diseño de SA para el aula, pues es el espacio que de manera urgente deseamos intervenir. Describimos a continuación el camino seguido por las investigaciones que han tomado a la socioepistemología para análisis de la práctica docente y el diseño de propuestas de intervención para el aula. Este es un camino que con cada resultado empírico ha enriquecido el diseño de las posteriores propuestas. Por supuesto, siempre acompañado de los estudios de género y de la teoría y epistemología feminista.

Considerando además que, de esta forma es posible mostrar cómo nuestro recorrido metodológico se ha ido robusteciendo.

Una SA necesita en un primer momento de la aceptación de un reto que requiera de poner en funcionamiento todo el conocimiento matemático del estudiantado, de tal forma que la primera respuesta que emerja no sea la correcta para esa situación o esté incompleta. De este modo, a partir de una serie de actividades con un fundamento basado en la previa problematización, se guíe a los estudiantes a la construcción de una nueva herramienta matemática de mayor potencia que las que ya habían puesto en juego. Finalmente, esta herramienta se abstrae del contexto situado que le dio origen para formar parte del cúmulo de conocimientos institucionalmente reconocidos.

Por supuesto, esta dinámica no es la que sucede dentro del entorno escolar tradicional. Más aún, hemos dado evidencia de cómo el discurso matemático escolar excluye tanto a estudiantes como docentes con un impacto mayor en las minorías étnicas y culturales, como en el caso de las mujeres.

La investigación de Gisela Espinosa (2007) dio evidencia de cómo los roles y estereotipos de género, en especial sobre la capacidad de las mujeres, influían en las dinámicas dentro del aula tradicional de matemáticas, donde reinaba un discurso matemático escolar excluyente. La herramienta que se propuso para rediseñar ese discurso por supuesto fueron las SA, considerando que, al poner énfasis en las experiencias de tipo histórico, cultural, comunitario e individuales, sería la solución a los problemas identificados por Espinosa. Al parecer estas situaciones tienen un efecto importante donde las mujeres son una mayoría, como en el trabajo de Simón M. G. (2023), donde se reporta que incluso fue posible identificar que estos espacios permitieron que ellas mostraran su preferencia por un conocimiento funcional. En este caso, las SA usadas fueron producto de otras investigaciones y mostraron su potencia.

Otros trabajos, como el antes citado de Cynthi Farfán (2017), identificaron que las niñas de nivel primaria tenían un mejor desempeño en actividades que tuviesen como fundamento a una matemática que sirviera como una herramienta para enfrentar situaciones donde esta tuviera una razón real para estar presente. Contrario a lo que sucedía con la matemática escolar asociada al mismo tema.

En otra investigación, al incluir el ciclo menstrual y los cambios hormonales que se dan durante el mismo, en el diseño de una SA, Nallely López (2016) nos guío a pensar en los temas que tienen que ver con mujeres y su inclusión como contextos para la matemática escolar en medio superior. Además, identificó que las estudiantes tenían preferencia por trabajar con registros de representación de gráficos en la clase de cálculo.

Con todo lo anterior en mente, nos dimos a la tarea de realizar propuestas de SA que tomaran a las mujeres y a sus contextos como protagonistas, para lo cual partimos de los objetos matemáticos considerados en los programas de estudios vigentes, pues en nuestra área se nos exige de diseños que puedan ser llevados al aula en un futuro inmediato. Para la construcción de estos diseños se llevó a cabo una importante discusión y reflexión teórica sobre sus fundamentos en la matemática educativa y la teoría feminista. A la vez que, dichos diseños fueron piloteados e implementados con grupos correspondientes a los niveles educativos para los que fueron diseñados.

Un ejemplo de ello se aprecia en una SA publicada en el material diseñado por un equipo de investigación en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN en México, para el programa Aprender Matemática del Ministerio de Educación argentino, donde la idea original estuvo a cargo de Claudia Rodriguez Muñoz, especialista en género y matemáticas (Ministerio de Educación, Cultura y Tecnología, 2019). Este tuvo como objetivo el construir significados para las fracciones a partir del tratamiento de las prácticas que se desarrollan en una situación contextual relacionada a la organización de actividades que puede hacer día a día una persona. De este modo, la base del diseño fue: partir el día en 24 horas, ordenar las actividades realizadas durante un día y comparar el tiempo que distintas personas pueden dedicar a estas. En este diseño es posible identificar cómo se pretende desestereotipar comportamientos para mujeres y para hombres, por mencionar algunos: quién se encarga de las labores de cuidados y quiénes ponen más importancia al cuidado de su propia salud.

Por otro lado, el diseño "matemáticas en mi cuerpo", propuesto por Simón M. G. (2023), pone a las mujeres y a la diversidad de cuerpos como protagonistas en una serie de actividades que pretenden construir significados sobre la proporcionalidad. Se consideran prácticas como medir, comparar, conmensurar y equivaler presentes en el desarrollo del pensamiento proporcional. En esta actividad se muestran cuerpos de mujeres reales y se destaca la importancia de la herramienta matemática como aquella que nos permite identificar que la proporcionalidad en nuestros cuerpos y sus formas son lo que nos caracteriza como humanos y también los hace funcionales. Esta propuesta fue diseñada y rediseñada con base en sus múltiples aplicaciones con estudiantes de primaria y secundaria. La versión publicada es el resultado del análisis y discusión minuciosa que se tuvo en el grupo de "educación y divulgación" de la Red de ciencia tecnología y género documentada en el libro *Ciencia y científicas* (2024).

Como ya hemos mencionado, el trabajo de Carranza (2019) nos hizo ver que las SA no eran una herramienta suficiente, para motivar e interesar a las mujeres, por lo tanto, debíamos considerar otros elementos, que solo una perspectiva feminista nos dejaría descubrir.

Por otra parte, la discusión que se llevaba a cabo en la toma de decisiones sobre políticas públicas en educación y salud se realizaba de manera paralela al análisis que se hacía de estas mismas temáticas desde la teoría feminista. Esto nos llevó a poner la mirada sobre cómo el olvido de temas relacionados a los *cuidados* estaba teniendo un fuerte impacto en las sociedades actuales. Tomando en cuenta que la mayoría de los temas relacionados con las mujeres y lo femenino están centrados en los cuidados: salud, educación, administración del hogar, alimentación, el medio ambiente, la reproducción, el cuerpo de las mujeres, las artesanías (arte de nuestros pueblos originarios), etc. Reafirmamos la importancia de estos y su inserción en el aula.

Por lo tanto, un elemento indispensable para el diseño de SA con perspectiva de género estaba en visibilizar a las mujeres desde una posición NO androcéntrica, es decir, visibilizarlas a ellas y también a sus saberes, desde el cómo construyen y usan conocimiento matemático.

Se presenta a continuación el resultado de la inclusión de todos los elementos que se han destacado en las secciones anteriores para el diseño de SA con perspectiva de género. Pretendemos con esto ofrecer una sistematización de hallazgos que pueda compartirse con la comunidad y ser usados tanto para la investigación como para la docencia.

5. DISEÑO DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE CON PERSPECTIVA DE GÉNERO PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS

Fallas y Lezama (2022), teniendo como base una problematización del contenido matemático que se pretende trabajar, proponen el diagrama siguiente (ilustración 4) para guiar el diseño de SA comenzando por el polo superior "saber matemático". Considerando las bases de teoría feminista de nuestra propuesta y la experiencia que hemos obtenido de trabajar el diseño de SA con docentes de matemáticas en formación, la primera decisión metodológica será identificar un "contexto situacional real" que parta de los saberes de las mujeres o de aspectos relacionados a lo femenino (dimensión sociocultural), con el objetivo de reconocer los saberes de las mujeres como un conocimiento institucional, histórica y culturalmente situado.

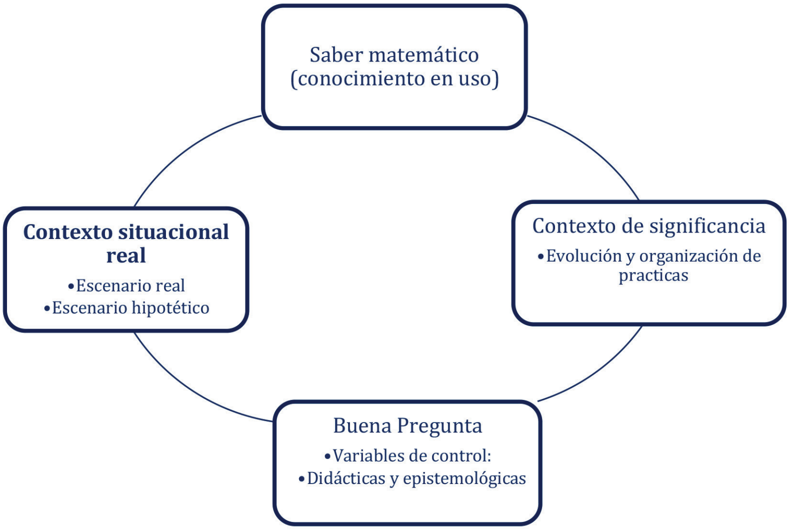


Ilustración 4. Reconstrucción del diagrama de Fallas y Lezama (2022).

A continuación, se deberá explorar todo lo relacionado a ese saber mediante una investigación documental o de campo que permita identificar a la matemática puesta en uso en ese contexto. Para el caso de las investigaciones de campo, serán las mujeres, quienes realicen las actividades elegidas, las portadoras de los saberes histórica y socioculturalmente construidos (dimensión epistemológica y sociocultural). A partir de este momento es que recurriremos a la problematización del saber matemático, partiendo del análisis del resto de las cuatro dimensiones, haciendo un estudio de:

- Cómo viven los objetos matemáticos involucrados dentro del sistema didáctico (dimensión didáctica).
- Cuáles son las principales dificultades del estudiantado y las formas de apropiación que se han identificado desde la misma teoría y desde otras en la disciplina (dimensión cognitiva).
- Cuál es la naturaleza de la matemática puesta en juego a partir del contexto situacional real (dimensión epistemológica), en contraste con el currículum escolar. Es importante hacer notar que todas las dimensiones interactúan entre sí y por lo tanto los estudios realizados a partir de cada una de ellas tendrán cruces, se complementarán y robustecerán.
- Es vital, en este momento, recurrir a los resultados de investigación en la disciplina en cuanto a las prácticas que se han identificado desarrollan el pensamiento matemático de las personas y ofrecen una explicación sobre las formas de apropiación y resignificación progresiva de los objetos matemáticos (dimensión cognitiva).

De este modo podremos confeccionar un contexto de significancia, es decir, que parta de la evolución y organización de prácticas que sabemos permiten la construcción de conocimiento matemático.

Así también, se deben consultar los resultados de investigación obtenidos desde la perspectiva de género y la teoría feminista pues estos amplían la visión de las cuatro dimensiones.

Desde la dimensión epistemológica hemos comenzado poniendo énfasis en los saberes de mujeres y en los problemas que les atañen, para identificar la racionalidad con la que un grupo social (las mujeres en contextos situados) construyen, significan o ponen en uso al conocimiento matemático. Por supuesto, es evidente que la dimensión epistemológica está estrechamente relacionada con la dimensión sociocultural, la cual en un sentido más amplio toma al género, en tanto construcción sociocultural, que marca roles para mujeres y hombres y, por lo tanto, también las dinámicas en las aulas. De esta forma, para el caso de la dimensión didáctica y cognitiva tendríamos que mantener un estado constante de vigilancia de modo que los estereotipos de poder, trabajo, cuidados y sobre la capacidad de las mujeres, no se reproduzcan más en los diseños didácticos y tampoco entre los comportamientos del estudiantado y del profesorado.

Para la construcción de la SA es preciso partir de una "buena pregunta", la cual surge de la problematización que se realizó desde las cuatro dimensiones y está en estrecha relación con el conocimiento en uso dentro del contexto situacional real, que toma sentido a la luz del contexto de significancia, es decir, de la evolución pragmática. Por ejemplo, en el diseño de SA citado "matemáticas en mi cuerpo", la buena pregunta con la que se genera todo el diseño y que además se introduce en la primera fase es, ¿Cómo es el tamaño de tu cabeza con relación a tu altura? Para referirnos a las proporciones que deben mantenerse en el cuerpo humano y donde las prácticas de medir, comparar, equivaler y conmensurar jugarán un rol vital para significar a la proporcionalidad (Simón, 2017).

Las SA se presentan en tres fases (factual, procedimental y simbólica), correspondientes a las de inicio, desarrollo y cierre, que se acostumbran desde varias propuestas didácticas (Ministerio de Educación, Cultura y Tecnología, 2019). Y estas tienen una connotación especial:

En la primera de ellas, la etapa factual, dentro del contexto situacional real (o hipotético) se plantea una situación problema que ponga en juego todos los saberes de las personas que participan de la SA. Estas deberán errar o entrar en conflicto. De este modo estarán en situación de aprendizaje, puesto que todo su conocimiento no es suficiente para abordar la tarea, pero quiere y necesita hacerlo.

En la segunda fase, también llamada etapa procedimental, se deben poner en juego todos los elementos surgidos de la problematización, para generar una serie de actividades que, entre otras cosas partan de la buena pregunta, permitan la construcción de procedimientos, la observación de regularidades, la generación de hipótesis, contrastar las hipótesis con la realidad o reflexionar por qué suceden las cosas de una manera y no de otra. Es aquí donde las experiencias de las mujeres sobre los saberes femeninos (o el sentirse aludidas dado el sexo que se les asignó al nacer) les darán la autoridad no solo para reflexionar, generalizar o construir procedimientos, sino para externar sus opiniones, sus hipótesis y sus propuestas. Y de este modo participar de toda la dinámica de construcción de conocimiento que es posible generar mediante las SA. En el mismo diseño ya mencionado, las actividades en esta etapa consisten en tomar medidas de varias partes del cuerpo de la misma persona, de manera que a partir de comparar entre ellas las longitudes se logre identificar alguna relación de proporcionalidad, tomando en cuenta la emergencia de las prácticas de equivaler y conmensurar.

En un tercer momento se estará en condiciones, a partir de las evidencias (situadas), para la formalización y simbolización del conocimiento matemático en uso. Es ahora cuando los procedimientos construidos, los patrones observados, las hipótesis probadas serán formalizadas en términos de un lenguaje común, que es el matemático. Siguiendo nuestro ejemplo para esta etapa, según las regularidades encontradas, se cuantifica y se traduce en términos aritméticos, la relación encontrada.

Las tres fases requieren de trabajo y reflexión colectiva en relación con el contexto situacional real. Desde la socioepistemología no es posible la construcción de conocimiento sin estos elementos. Por tanto, era importante integrarlos a los diseños y solo podría hacerse desde la epistemología feminista.

6. REFLEXIONES FINALES

Las SA de aprendizaje con perspectiva de género deben comenzar desde la realidad de las mujeres (como grupo social y a partir de sus entornos de acción tradicionales), una realidad soslayada, poner en juego sus saberes, y a partir de ellos identificar uso de conocimiento matemático.

De este modo, a través de diseños didácticos, haremos justicia epistémica a las mujeres y contribuiremos a robustecer la mirada sociocultural de la socioepistemología, incluyéndolas como un grupo social, con una historia, cultura, formas de apropiación y de uso del saber propias...

Desde la epistemología platónica, que encontramos actualmente en nuestras aulas, los saberes de las mujeres no tienen un lugar en la clase, en los programas de estudio o en los libros de texto de matemáticas y las áreas donde tiene fuerte influencia. Esto debido a que la lógica eurocéntrica y androcéntrica nos empuja a pensar en el poder (económico, político) y la dominación. Según la división en roles de género, a las mujeres (quienes somos concebidas como femeninas) se nos ha encomendado todo lo relacionado a los cuidados (físicos, afectivos, sociales y de la naturaleza). Es, por lo tanto, muy importante posar la mirada sobre todos aquellos marcos de referencia para la matemática escolar, que al haber sido dejados de lado han causado los desastres actuales en el mundo. Pobreza, pandemias, destrucción de la naturaleza, guerra, etc., han sido reportados por el ecofeminismo como el resultado de la normalización de las desigualdades traducidas en dicotomías como las de género (Shiva, 1988).

Con esta propuesta no pretendemos caer en esencialismos de género. Por el contrario, consideramos que una división en roles de género fragmenta innecesariamente a la sabiduría humana. Así, a modo de acción afirmativa, para darle el valor que merece a lo femenino y lo asociado a las mujeres es necesario integrarlo al aula y volverlo un contexto de construcción de significados para un área de conocimiento con alto reconocimiento como lo es la matemática.

REFERENCIAS

Barkera, E., y Solares, A. (2021). Conocimientos matemáticos involucrados en la producción de bordados de la cultura Hñahñu: un análisis semiótico-didáctico. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 9*(1), 26-48.

Blazquez, N. (2012). *El retorno de las brujas. Incorporación, aportaciones y críticas de las mujeres a la ciencia*. UNAM, Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades.

Camelo, F., García, G., Mancera, G., Romero, J., y Valero, P. (2022). La educación matemática y la dignidad de estar siendo. *Revista de Educación Matemática, 37*(3), 38-59. https://doi.org/10.33044/revem.39920

Carranza, B. (2019). Estrategias dinámicas para la introducción de la noción de variación en la ecuación diferencial ordinaria con perspectiva de género. Un caso de simulación digital del fenómeno de caída libre (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Castañeda, P. (2014). Epistemología y metodología feminista: debates teóricos. En. Jarquín Ma. Elena. (Coord.) *El campo teórico feminista. Apuntes epistemológicos y metodológicos*. México: UNAM, Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Cantoral, R., y Soto D. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática, 28*(50) 1525-1544.

González, S., y Simón M. G. (2024). *Ciencia y Científicas. Sistematización de prácticas de divulgación con perspectiva de género*. Red de Ciencia, Tecnología y Género.

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del programa de etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 100-107.

De la Cruz, F., y Buendía, G. (2021). La tortilla tradicional. Un contexto de significación para la matemática de la variación. *Revista de Investigación Educativa de la Rediech 12*(1), 1-19. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v12i0.1098

Espinosa, G. (2010). Estudio de las interacciones en el aula desde una perspectiva de género. Géneros. *Revista de investigación y divulgación sobre los estudios de género*, *6*(2), 71-86.

Fallas, R., y Lezama, J. (2022). *Argumentos variacionales en la comprensión de la concavidad en gráficas de funciones. Perfiles educativos, 44*(178), 130-148. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2022.178.60619.

Farfán, R. M., y Farfán, C. (2017). Matemática educativa y (perspectiva de) género en la resolución de problemas, una mirada socioepistemológica. Tesis Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Farfán, R. M., Hinojosa, J., y Romero, F. (2020). Principios de diseño de tareas en socioepistemología. *Revista de Investigación Educativa de la Rediech, 11*(1), 1-20. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.708

Farfán, R. y Ortiz, V. (2019). Matemáticas y género: un estudio del razonamiento espacial. *Revista Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(1), 434-440.

Farfán, R. M., y Simón, M. G. (2016). *La construcción social del conocimiento. El caso de género y matemáticas*. Gedisa.

Font, V. (2007). Epistemología y didácticas de las matemáticas. En F. Ugarte (ed.) Reportes de investigación núm. 21 serie C. II (pp. 1-48, conferencia inaugural). Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas. PUCP.

Frayre, E. (2023). *El razonamiento proporcional en la elaboración de bhi'ñ jooxia' (platos de barro) en alumnos O'dam de 3er año de secundaria.* Ponencia presentada en las Sesiones Especiales del Congreso 56 de la Sociedad Matemática Mexicana: Educación Matemática con una mirada a la inclusión. San Luis Potosí, México.

Gómez Osalde, K., Silva-Crocci, H., Cordero Osorio, F., y Soto, D. (2015). Exclusión, opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 27*(1), 1457-1464.

Harding, S. (1990). *Ciencia y feminismo*. Ediciones Morata.

López, R. N. (2016). *¿Gráficas o algoritmos? Un estudio con perspectiva de género.* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Mingo, A. (2006). *¿Quién mordió la manzana? Sexo, origen social y desempeño en la Universidad*. Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación, Universidad Nacional Autónoma de México.

Ministerio de Educación, Cultura y Tecnología. (2019). *Comparar y equivaler: ¿Cuánto me toca? ¿Es justo?* Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología-Plan Nacional Aprender Matemática.

Sepúlveda, K., y Lezama, J. (2020). Epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático escolar. Un estudio de caso. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24*(2), 177-206. https://doi.org/10.12802/relime.21.2423

Sierpinska, A., y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Kluwer, A. P.

Simón, M. G. (2023). Diseño de una secuencia de actividades para la divulgación de la ciencia con perspectiva de género. *Revista Educ@rnos, 49*(2), 107-120.

Shiva, V. (1988). *Abrazar la vida. Mujer, ecología y supervivencia.* Horas y HORAS.

Soto, D. (2010). El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica (Tesis Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Datos de correspondencia

María Guadalupe Simón Ramos

Dirección: Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México
maria_simon@uaeh.edu.mx

 https://doi.org/10.24844/EM3703.08

Filosofía de la Educación Matemática: Fundamentos y perspectivas post-humanas

Philosophy of Mathematics Education: Foundations and Post-Human Perspectives

Santiago Alonso Palmas Pérez[1]

Man is the measure of all things: of things
which are, that they are, and
of things which are not, that they are not"
Protágoras -Theaetetus 152a

1. INTRODUCCIÓN

La filosofía de la educación constituye una rama de la filosofía que se ocupa de analizar los fundamentos, fines, métodos, y, cuestionando críticamente las creencias, valores y conceptos que subyacen en las prácticas educativas. Entre sus cuestionamientos fundamentales se encuentran: ¿Cuál es el propósito de la educación? ¿Qué tipo de conocimientos se formulan? ¿Cómo debemos enseñar?, o ¿Cuál es la relación entre la educación y la sociedad? Desde los planteamientos platónicos sobre la verdad y la justicia, aristotélicos sobre las virtudes, Kant y la autonomía, Rousseau y la naturaleza y la libertad del proceso educativo, la filosofía de la educación subyace en todo planteamiento educativo. En el siglo XX, pensadores como Dewey, Freire, Dussel, Walsh, Mignolo y Puiggrós han insistido en la importancia de las reflexiones filosóficas como elemento indispensable para orientar ética y políticamente la praxis educativa en distintos contextos.

Bajo estas reflexiones, el primer objetivo de este ensayo propone contribuir al diálogo entre la filosofía de la educación y la enseñanza de las matemáticas,

Fecha de recepción: 15 de mayo de 2024. **Fecha de aceptación:** 24 de octubre de 2025
[1] Universidad Autónoma Metropolitana s.palmas@correo.ler.uam.mx, https://orcid.org/0000-0003-1175-5938

examinando las condiciones para el desarrollo de una filosofía de la educación matemática. A pesar de la rica historia en contribuciones en la educación matemática, nuestro país ha explorado relativamente poco la filosofía de la educación matemática de manera formal en el ámbito académico. Un estado del conocimiento reciente (Palmas, 2024) no encontró trabajos explícitamente denominados 'filosofía de la educación matemática. Sin embargo, existen aportes dispersos desde la filosofía de las matemáticas, la didáctica crítica y los estudios socioculturales que permiten delinear un horizonte teórico posible.

Particularmente, en este texto, se examina cómo los enfoques posthumanos, y en especial el posthumanismo crítico formulado por Rosi Braidotti, pueden ser un aliciente y enriquecer la reflexión sobre la educación matemática, al problematizar la centralidad del sujeto humano racional, la dicotomía naturaleza/cultura y la relación con la naturaleza y lo tecnológico. En este sentido, el presente ensayo aspira a ampliar los marcos teóricos actuales a partir de los cuales se comprende la educación matemática desde el punto de vista filosófico.

Así, en el primer apartado, se abordan algunos fundamentos conceptuales de la filosofía de la educación, sus preguntas centrales y su relevancia actual para comprender la enseñanza y el aprendizaje. En el segundo, se plantea la necesidad de una filosofía de la educación matemática, mostrando cómo se configura a partir del diálogo entre la filosofía de la educación, la filosofía de las matemáticas y los enfoques críticos contemporáneos. Este apartado incluye una revisión del estado del arte y las principales corrientes que han contribuido a delimitar el campo. Por último, en el tercer apartado, se introducen las perspectivas posthumanas y se discute su potencial para reconfigurar el pensamiento educativo en matemáticas, abriendo finalmente un espacio de reflexión sobre las implicaciones éticas, epistemológicas y ontológicas de este desplazamiento teórico para el futuro de la educación matemática.

Sin duda, este ensayo no trata de presentar una filosofía ya establecida de la educación matemática, sino de explorar algunos de sus fundamentos y convergencias entre tres campos: 1) la filosofía general de la educación, 2) la filosofía de las matemáticas y 3) los enfoques críticos contemporáneos sobre la educación matemática que problematizan relaciones de poder, inclusión, justicia cognitiva y ecología de saberes. La intención es, ante todo, provocar nuevas preguntas que estimulen la reflexión en nuestra área y contribuir a imaginar otras formas de enseñar, aprender y habitar lo matemático en contextos escolares cada vez más complejos, híbridos y plurales.

2. FUNDAMENTOS DE LA FILOSOFÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Hablar de una "filosofía de la educación matemática" no implica establecer una ruptura ontológica ni epistemológica con la "filosofía de la educación" en su sentido más amplio. Por el contrario, se asume que esta última constituye un campo plural de reflexión, del cual la dimensión educativo-matemática forma parte. La especificidad de la filosofía de la educación matemática reside en que concentra su mirada en los problemas que emergen en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: la naturaleza del conocimiento matemático, la relación entre abstracción y experiencia, la tensión entre rigor formal y significado contextual, y las implicaciones éticas y sociales de dichas prácticas. En este marco, la filosofía de la educación matemática puede entenderse como una extensión situada de la filosofía de la educación: retoma sus preguntas centrales –sobre el sentido del aprendizaje, la formación del sujeto o el valor del conocimiento–, pero las reelabora dentro de las prácticas discursivas, teóricas y pedagógicas propias del campo matemático, estableciendo así un diálogo constante entre lo general y lo particular.

Para Paul Ernest *et al.* (2016), en un estado del conocimiento ICME-13 donde proveen una visión contemporánea de la investigación en filosofía de la educación matemática proponen algunas preguntas que guían este campo:

- ¿Qué son las matemáticas?
- ¿Cómo se relacionan las matemáticas con la sociedad?
- ¿Cómo se enseñan las matemáticas?
- ¿Cuál es la naturaleza del aprendizaje de las matemáticas?
- ¿Cuál es la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuál es la importancia de las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?
- ¿Con qué valores subyacen a estas actividades, explícitas o implícitas?
- ¿Cómo y en qué medida se promulga la justicia social mediante estas actividades en este campo de estudio?
- ¿Cuál es el estatus de la educación matemática como campo de conocimiento?
- ¿Qué supuestos profundos y a menudo no reconocidos subyacen en la investigación y práctica de la educación matemática? (Ernest *et al.*, 2016, p. 2)

La filosofía de la educación matemática permite interrogar de manera crítica aquello que investigamos, cuestionando los supuestos (pedagógicos, sociales o políticos) que nos hacen mirar los fenómenos desde una única perspectiva. Este subcampo de la educación matemática, la filosofía, permite tener herramientas de pensamiento y de análisis de los sujetos, tanto aprendices como docentes, aquellos fuera de contextos escolares, al medio, a la comunidad o a la sociedad.

Para Ernest (2016, p. 5), la expresión 'filosofía de la educación matemática' puede entenderse de forma amplia, ya sea como la aplicación de la filosofía (general o de las matemáticas) a la educación matemática, o como una actitud filosófica crítica que analiza conceptos, teorías y métodos de la investigación en educación matemática y en la propia matemática. Es esta amplitud de labores que motiva que la filosofía en nuestro campo sea fundamental para poder plantear una mayor diversidad de preguntas de investigación. Así mismo, reconocer nuestras posturas filosóficas nos ayudará, como investigadoras e investigadores a poder reconocer los límites de nuestro campo ontológico, metodológico y en última instancia epistemológico. Como plantea Ernest, la filosofía en nuestro campo "nos provee de herramientas para cuestionar el *status quo*, para lograr ver "qué es" que no, qué tiene que ser; para ver los límites entre lo posible y lo imposible que no siempre están en donde nos han dicho que están" (Ernest, 2016, p. 6).

2.1 Principales corrientes y enfoques filosóficos en la educación matemática

En la historia moderna de la filosofía de la educación matemática específicamente, es posible identificar algunas corrientes consolidadas y otras recientes. Varias escuelas de pensamiento en filosofía de la matemática han sido retomadas en la educación matemática, como, por ejemplo, el Logicismo, Formalismo, Constructivismo, Platonismo, el Falibilismo, Teorías Críticas, entre otras. Describiré a continuación, cronológicamente, aquellas con las que quisiera dialogar y poner en contraste:

2.1.1 Logicismo

Históricamente, las discusiones iniciales sobre la filosofía de la educación matemática no estaban formalmente integradas, sino, eran personas que se acercaban desde la filosofía o desde las matemáticas en sí. Por ejemplo, Bertrand Russell o Alfred North Whitehead influyeron profundamente en el pensamiento sobre la matemática como tal, lo cual tuvo implicaciones para la enseñanza. En *Principia Mathematica* (Whitehead y Russell, 1913). Su postura, basada en el *logicismo,* sostiene que las matemáticas, en general, son una implicación de los resultados de la lógica y, por lo tanto es una ciencia analítica que no requiere de una facultad especial de intuición; décadas después, el movimiento de Matemática Moderna retomó ese énfasis formalista en el currículo. Este enfoque en la estructura y la lógica incluía la enseñanza de teoría de conjuntos, estructuras algebraicas en sus términos formales, desde la entrada a la escuela primaria.

El realismo es una corriente que sostiene que los objetos y procesos matemáticos existen independientemente de los sujetos cognoscentes. Utilizo esta noción en contraste con la postura constructivista, que presupone la existencia necesaria de un sujeto que elabora el trabajo cognitivo. En el realismo, fundamentado en los trabajos de Whitehead y Russell (1913), los objetos matemáticos poseen una existencia propia, con independencia de quienes los conciben o estudian. Aunque esta corriente ha perdido presencia en la literatura contemporánea, aún pueden encontrarse defensas de posiciones afines, como el estructuralismo. Actualmente, una exponente del realismo moderno es Penelope Maddy (1992), quien propone un "realismo set-teórico" en el que las entidades matemáticas son conjuntos con propiedades que pueden ser descubiertas por las y los matemáticos. Desde esta perspectiva, las posturas realistas tienen implicaciones educativas claras: las matemáticas se estudian como una estructura independiente de la persona cognoscente, de modo que la enseñanza se orienta hacia la lógica formal y la búsqueda de verdades universales o estructurantes.

2.1.2 Constructivismo

Entre las décadas de 1960 y 1970, las ideas de Piaget y Vygotsky influyeron en nuestro campo de manera contundente. Sus ideas cimentaron las bases de un pensamiento constructivista, del desarrollo cognitivo y del análisis de las estructuras mentales de quienes aprenden. Aunque divergentes, el pensamiento filosófico de ambos yace en la epistemología genética, su estrecho vínculo con la biología y los procesos cognitivos humanos, en el caso de Jean Piaget; mientras que en el caso de Lev Vygotsky provenía de la dialéctica cultural y del aprendizaje como fenómeno social, y la idea de que las herramientas culturales juegan un papel central en el desarrollo cognitivo.

El paradigma constructivista, tanto en sus formas cognitivas como sociales, se define por una ontología de carácter relativista, es decir, "basada social y experiencialmente, de naturaleza local y específica (aunque con frecuencia hay elementos compartidos entre muchos individuos e incluso entre distintas culturas), y cuya forma y contenido dependen de los individuos o grupos que sostienen esas construcciones" (Guba y Lincoln, 1994). Como cambio filosófico, durante las décadas de 1960 y 1970 se transitó del estructuralismo hacia una propuesta epistemológica constructivista, en la cual las personas son los sujetos cognoscentes, es decir, quienes construyen activamente el conocimiento. En esta perspectiva, el comportamiento humano es primordialmente propositivo y los organismos humanos poseen una amplia capacidad para organizar su experiencia y generar conocimiento (Magoon, 1977). Para Kilpatrick (1987), el constructivismo se sustenta en dos hipótesis:

i. El conocimiento es activamente construido por el sujeto cognoscente y no pasivamente recibido del ambiente.
ii. *Conocer* es un proceso adaptativo que organiza la experiencia personal de vivir en el mundo; no se descubre un mundo independiente y pre-existente fuera de la mente del sujeto. (Kilpatrick, 1987)

Desde esta perspectiva, y según Steffe y Kieren, Piaget no estudia la realidad en sí misma, sino la manera en que los individuos construyen su realidad a partir de la experiencia. En el ámbito de la educación matemática, esto implica que "uno está estudiando la construcción de la realidad matemática de los individuos en el espacio de su experiencia" (Steffe y Kieren, 1994). Sin embargo, al cuestionar los límites de esta posición, el enfoque socioconstructivista amplía la mirada y reconoce que dicha construcción individual del conocimiento está mediada por la interacción social y el lenguaje como herramientas culturales, tal como lo plantean Vygotsky y Paul Ernest en nuestro campo. De esta postura, podemos encontrar diversas teorías didácticas inspiradas en el constructivismo (por ejemplo, campos conceptuales, situaciones didácticas, aprendizaje situado, entre otras).

2.1.3 Posturas socioculturales y sociopolíticas

La Etnomatemática (D' Ambrosio, 1985, 2006), la Educación Matemática Crítica (Skovmose, 1994; Valero y Skovmose, 2012) y la Teoría de la Objetivación de Radford (2023) han logrado posicionarse como alternativas epistemológicas a la enseñanza de las matemáticas. Por un lado, la etnomatemática se centra en el análisis de la diversidad de prácticas matemáticas en diferentes culturas. Esta postura estudia cómo los grupos culturales usan ideas, conceptos y procesos matemáticos en sus prácticas cotidianas y cómo se pueden integrar a la enseñanza de las matemáticas. D'Ambrosio (1999, p. 150) enfatiza que la etnomatemática reconoce la diversidad cultural de las prácticas matemáticas y su dimensión política, promoviendo la justicia social y cognitiva.

Por otro lado, la Educación Matemática Crítica (EMC) propone que la educación matemática nunca es neutral, sino un medio para la emancipación y la justicia social (Skovmose, 2016, p. 9). Fundamentada en el compromiso social y un enfoque crítico, la EMC, sostiene que la educación matemática, así como toda la educación, no es neutral políticamente; juega un papel crucial en la formación de una ciudadanía consciente de su realidad. Como plantea Valero y Zevenbergen "la educación matemática puede ser una práctica de liberación y un medio para entender las estructuras de poder en la sociedad" (2004), estableciendo así, la posibilidad de ser un sujeto transformador de su realidad. Esta aproximación teórica a la educación matemática, fundamentada en valores humanistas, promueve la justicia social a través de la participación democrática tanto en flujos de conocimiento como en la posibilidad de agencia, dignidad y capacidad racional llevada a la acción, ver por ejemplo Valero y Skovmose (2012).

Sumando al análisis de las corrientes filosóficas y teorías afines a los cortes sociopolíticos y socioculturales, la Teoría de la Objetivación de Radford (2023), basada en una perspectiva vygotskiana, propone entender la educación matemática como parte de un proceso sociocultural en el que los conocimientos se entrelazan estrechamente con un contexto cultural estructurado. Para Radford: "El aprendizaje como participación en la práctica social se enmarca en procesos de objetivación y subjetivación, donde el saber y el conocimiento se entrelazan con la cultura y la historia del aprendiz" (Radford, 2023, p. 86), en donde la objetivación se refiere a cómo los conceptos abstractos se vuelven "objetos" de conocimiento a través de la actividad en el aula o en el espacio en donde se gesta la acción educativa. Esta teoría centrada en los procesos socioculturales, puede interpretarse como una postura humanista en ciertos aspectos. La teoría enfatiza cómo las y los estudiantes internalizan y personalizan en el sentido de que la incorporan en su identidad, aspecto clave en el humanismo.

2.1.4 El posicionamiento humanista

Tanto la perspectiva constructivista como la sociocultural y la sociopolítica están enmarcadas en el humanismo. El humanismo, es la corriente filosófica general que afirma que hay algo particular, cognitiva, moral, éticamente, que separa a los seres humanos del resto de la naturaleza. Para Jacques (1969):

> El humanismo como enfoque del paradigma de la educación y el aprendizaje se desarrolló desde la década de 1960 como contraste con el cognitivismo y el conductismo y la percepción del ser humano como un objeto en la investigación científica. El humanismo parte de la creencia en la bondad humana inherente y contrasta los enfoques biológicos y de Sigmund Freud, que afirman que el comportamiento y la cognición humana están determinados por la experiencia y los eventos previos. (Jacques, 1969, p. 137)

Esta corriente tiene gran influencia en la educación. Históricamente, desde las posturas de Carl Rogers y Abraham Maslow en los años cincuenta en donde plantean algunas bases humanas, como, por ejemplo, le necesidad de "autorrealización" (Maslow, 1954, p. 91); en donde la realización es y actúa solo en el ser humano. Principalmente, el humanismo se fundamenta en una idea de que el ser humano está en el centro; ¿el centro de qué?, de la atención en el individuo humano como único ente cognoscente (Coles *et al.*, 2024, p. 2).

Más recientemente, algunas críticas del humanismo yacen en el enfoque antropocéntrico, excediendo el enfoque en la visión humana del mundo. Una de las críticas al trabajo de Maslow, es al concepto de "auto-realización" ya que presupone una meta universal y dictada por la experiencia humana. El artículo de Geller (1982) argumenta que las teorías de autorrealización de Rogers y Maslow son fundamentalmente defectuosas.

Según Geller, la propuesta de "jerarquía de necesidades humanas", en donde Maslow propone cinco niveles de necesidades humanas (fisiológica, seguridad, social, estima y auto actualización) (Maslow, 1954) puede ser falible ya que falla en reconocer adecuadamente la complejidad de motivaciones humanas y su interacción con factores ambientales y sociales. El enfoque antropocéntrico formulado por Rogers y Maslow –y posteriormente cuestionado por Geller y por las corrientes del nuevo materialismo– sitúa al ser humano en el centro del desarrollo personal y educativo, sin reconocer el papel decisivo de los sistemas ecológicos y de la comunidad más amplia de vida en dicho proceso.

3. EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN EL POSTHUMANISMO

Ahora bien, un segundo objetivo de este ensayo es la presentación de las discusiones actuales en filosofía, en particular las del posthumanismo , su versión crítica y su vínculo con la educación matemática. En este apartado, se hace una breve presentación del posthumanismo como corriente filosófica y sus posibles vínculos con la educación matemática.

Dentro del posthumanismo existen diversas subcorrientes afines (Ferrando, 2013), entre ellas el posthumanismo crítico (Braidotti, 2017), la cibernética (Pickering, 2010), el posthumanismo ecológico (Grusin, 2015), el posthumanismo en la educación (Snaza y Weaver, 2015) y el transhumanismo (Bostrom, 2005). Este ensayo busca tender puentes entre el posthumanismo, en su sentido general, y la filosofía de la educación matemática, explorando cómo las ideas de Donna Haraway, Rosi Braidotti y Karen Barad pueden ofrecer nuevas perspectivas y respuestas a los desafíos contemporáneos.

En general, el planteamiento posthumanismo es aquél en donde se desafía el antropocentrismo, al cuestionar la primacía del ser humano sobre otros seres y agentes en el mundo. Esta postura, cuestiona la centralidad humana y los discursos en donde se posiciona a un observador alejado de la naturaleza. Como anticipó Paul Ernest, el descentramiento de los humanos podría dejar tanto a tradicionalistas como a constructivistas positivamente aturdidos. Al igual que Ernest, de De Freitas y Sinclair (2014) invitan a un "experimento mental" que deje de centrar al sujeto humano por un momento, con el fin de explorar nuevas maneras de entender cómo se relacionan el cuerpo humano y las matemáticas

Al transponer algunos postulados del posthumanismo a la filosofía de la educación matemática, no solo se amplían sus fundamentos teóricos, sino que se reconfiguran las formas de comprender la práctica, el conocimiento y los valores del campo.

En el plano ontológico, las matemáticas dejan de concebirse como un sistema cerrado de entidades abstractas, para entenderse como una práctica relacional, donde tecnologías y seres no humanos participan en la producción de conocimiento. Esta nueva ontología da lugar a una epistemología distribuida, en la que el saber matemático no pertenece exclusivamente al sujeto humano, sino que emerge de las interacciones entre humanos, máquinas y otros agentes. Desde allí, se derivan consecuencias éticas, las decisiones educativas considerando la interdependencia entre todos los entes implicados: humanos, tecnología y naturaleza. De igual modo, en la dimensión sociocultural, se subraya que el conocimiento matemático se produce en contextos diversos, atravesados por relaciones entre cultura, tecnología y naturaleza. Finalmente, en el nivel axiológico, se amplía la noción de creación de valor, admitiendo que los elementos naturales y tecnológicos también pueden generar diseños didácticos, métodos, formas de evaluación y producciones significativas tanto en la educación matemática como en la matemática misma.

Estos postulados del posthumanismo promueven una visión más interconectada y consciente de las implicaciones éticas, socioculturales y conscientes de la integración de la tecnología, la ecología y lo humano. Desde esta manera de concebir los alcances del posthumanismo, logró ver algunas consecuencias en nuestro campo, que expondré a continuación:

3.1 Poshumanismo y sus consecuencias en la Educación Matemática.

En su texto *Post-human Mathematics*, David Ruelle (2013) expone que, entre el progreso de la computación, la inteligencia artificial, es válido preguntarse sobre si es posible enseñar la "creatividad matemática" a entes computacionales –refiriéndome a estos artefactos tecnológicos como *entes*, desde la postura de Haraway-. ¿Qué tipo de matemáticas se producirán desde la creatividad matemática artificial? (Ruelle, 2013, p. 6). Escéptico ante la idea de que las computadoras hagan sus propias matemáticas Ruelle, añade que no quisiera cerrar los ojos ante esta posibilidad de que eso suceda. El mismo autor, reflexiona sobre algunas posibles consecuencias de que estas matemáticas no-humanas aparezcan:

- La computadora puede probar resultados interesantes, pero, su demostración puede ser impenetrable para los humanos, porque usaría un desarrollo largo en un lenguaje formal sin posibilidad de traducción al lenguaje humano.[2]
- La computadora podría probar un teorema importante, pero con una declaración incomprensible para los humanos (nuevamente porque no tendría una traducción razonablemente breve al lenguaje matemático humano). La computadora podría convencernos de que este teorema es importante, porque implica una serie de conjeturas interesantes que podemos entender. Pero nuestro cerebro no podría dar sentido al teorema en sí (Ruelle, 2013, p. 7).

[2] Como ha ocurrido desde, por lo menos, la demostración del Teorema de los Cuatro Colores por Apple en 1984.

Estos cuestionamientos invitan a reflexionar sobre la naturaleza misma de las matemáticas y sobre el tipo de actividad que consideramos genuinamente matemática. En nuestro campo, surgen nuevas preguntas: ¿cómo podría la educación matemática adaptarse y evolucionar en un entorno donde las computadoras no sean solo herramientas de cálculo, sino agentes que participan activamente en la producción o invención de conocimiento matemático? ¿Qué lugar ocupará el pensamiento matemático humano en una época en la que la creatividad matemática –entendida como la capacidad de formular conjeturas, construir demostraciones y generar nuevas estructuras conceptuales– puede ser asistida o incluso ejecutada por sistemas artificiales? ¿Cómo se transformará la educación matemática ante esta expansión de la agencia cognitiva?

La emergencia de estas preguntas nos obliga a revisar nuestros preceptos y paradigmas, ante un futuro donde la producción matemática –humana y artificial– podría fusionarse para dar origen a formas inéditas de conocimiento. No se trata solo de adaptarse a un nuevo contexto tecnológico, sino de repensar la propia naturaleza del conocimiento matemático y su lugar en la educación.

3.2 Sobre la descentralización de la enseñanza, extendiéndola más allá de los seres humanos.

Desde el posthumanismo, la enseñanza no puede concebirse exclusivamente como una relación entre un sujeto humano que enseña y otro que aprende, sino como una red distribuida de agencias (Kouppanou, 2022; Strom y Martin, 2022) en la que participan no solo docentes y estudiantes, sino también tecnologías, algoritmos, materiales, artefactos, arquitecturas y discursos. Como señala Braidotti (2013), la subjetividad posthumana es relacional, encarnada y situada en flujos transversales que desbordan al individuo; en este marco, la descentralización de la enseñanza implica reconocer que el conocimiento no se produce únicamente en la mente de los seres humanos, sino en ensamblajes heterogéneos que integran dispositivos digitales, medios simbólicos y formas de inteligencia no humanas. En educación matemática, esto supone asumir que los lenguajes formales, los entornos virtuales, los objetos manipulativos y las interfaces digitales no son simples auxiliares, sino participantes activos en la configuración del pensamiento matemático. Así, el posthumanismo no solo cuestiona la centralidad del "hombre vitruviano" como medida universal (Roden, 2014), sino que propone reconfigurar la pedagogía como una ecología de prácticas, donde la enseñanza emerge de interacciones múltiples entre lo humano y lo más-que-humano.

Esta discusión filosófica sobre el posthumanismo, aunque tradicionalmente alejada de nuestra área, se ha dado en otras ramas de la educación, por ejemplo, en la educación artística y literaria, donde se han explorado las implicaciones que tendría asumir dicha postura filosófica. Por ejemplo, en su libro *The Posthuman*, Braidotti (2013) argumenta que, al difuminar las líneas entre entidades humanas, no humanas e inhumanas, emerge una nueva forma de comprender la identidad y la subjetividad humana, ligándola con su ambiente y los objetos de manera más concreta. Esta perspectiva invita a repensar las teorías educativas desde enfoques interdependientes que reconozcan que los seres humanos no estamos "frente" a la naturaleza o la tecnología, sino que somos constituidos en red con ellas. De este modo, lo natural, lo técnico y lo simbólico no se oponen a lo humano, sino que forman parte de una misma co-emergencia que nos configura mutuamente. Por otro lado, el trabajo de Gleason (2014), aborda la interacción entre humanos y tecnología en la educación en general. Gleason aborda cómo los discursos feministas y posthumanistas pueden ayudar a "aliviar" los temores culturales asociados con el uso de la tecnología y esto puede ser clave para su integración al campo educativo.

Gran parte de la educación matemática –como muchas otras áreas del conocimiento escolar– se sustenta en la aplicación mecánica de teorías ya consolidadas. En contraste, el ejercicio filosófico permite suspender esa inercia y examinar críticamente nuestras prácticas y supuestos. Desde el posthumanismo, esta pausa reflexiva invita a reconsiderar nuestra relación con los otros habitantes del planeta –humanos, no humanos y objetos–, cuestionando las jerarquías ontológicas que han sostenido la modernidad educativa.

En esta línea, Marla Morris (2014) advierte que la educación contemporánea reproduce formas de objetivación hacia los animales no humanos, tratándolos como cuerpos disponibles para la disección o el experimento, desvinculados de toda relación ética o afectiva con lo humano. Como plantea la autora, "la educación posthumanista coloca a todas las criaturas, tanto humanas como animales no humanos, en una red no jerárquica" (Morris, 2015, p. 43).

Este llamado, obliga a revisar incluso nuestras prácticas pedagógicas más naturalizadas, incluidas aquellas de la educación matemática que tienden a abstraer y formalizar el mundo, despojándolo de su dimensión viviente y relacional. Asumir una perspectiva posthumana implica reconocer que enseñar matemáticas no puede desvincularse de los contextos materiales, éticos y ecológicos en los que se inscribe, y que los objetos de estudio –ya sean animales, datos o formas geométricas– forman parte de una red de vida compartida que también educa.

Por otro lado, Nathan Snaza y otros (2014) en el libro *Towards a Posthumanist Education*, presenta las implicaciones educativas de considerar las tecnologías, los animales y las personas como inseparables. En este mismo libro se presentan algunas de las consecuencias del pensamiento post-humanista en la educación, por ejemplo:

- Las escuelas están intrínsecamente ligadas al mundo no humano, incluyendo infraestructura física, tecnológica, la relación con otras especies. En esta perspectiva, la educación permite una interacción consciente con el entorno más amplio vivo y no vivo.
- Plantea un cambio ontológico que otorgue igual importancia y capacidad de agencia a humanos, animales, máquinas y objetos, desafiando directamente las teorías educativas centradas únicamente en las necesidades, capacidades y formas de pensamiento humanas lineales
- Por otro lado, se cuestionan los preceptos humanistas que conciben al sujeto y al aprendizaje desde una perspectiva puramente cognitiva, lineal y exclusivamente humana.

En el contexto de la educación matemática, este enfoque tiene algunas dimensiones y aplicaciones importantes. En primer lugar, la reflexión sobre la educación matemática post-humana implica reconsiderar quién o qué puede ser un aprendiz. Esto, incluye a las inteligencias artificiales y algoritmos como participantes activos en los procesos educativos –recalcando–, no solo como herramientas sino como "sujetos" que aprenden, o por lo menos, entes que participan en la construcción del conocimiento. El cuestionamiento de los límites entre humano-máquina-naturaleza, se puede rastrear desde la importante obra de Donna Haraway.

Como consecuencia, las líneas entre docentes, estudiantes y entre aprendizaje generado por humanos y máquinas se desdibuja, como bien lo plantea Haraway:

> En la última parte del siglo XX, la diferenciación entre humanos y animales, organismos y máquinas se ha vuelto cada vez más borrosa. Ya no es posible afirmar claramente dónde termina lo humano y comienza lo animal o lo máquina. (Haraway, 1985, p. 11)

Visionaria, Haraway ha sido una de las autoras más influyentes en el posthumanismo moderno incluyendo la posibilidad de que las inteligencias artificiales y algoritmos actúen no solo como herramientas sino como participantes activos en procesos educativos. Específicamente, para la Educación Matemática podemos reflexionar en las posibles implicaciones, por ejemplo, considerar que no solo humanos pueden ser practicantes de la educación. Esto pudiera incluir la participación de estas máquinas en los procesos educativos, por ejemplo, colaborando con los docentes para adaptar el contenido que necesiten conducir,[3] (ver, por ejemplo, Richard *et al.,* 2022).

El *Manifiesto Cyborg* (Haraway, 1985), anima a pensar en las colaboraciones entre máquina y humano más allá de la dicotomía de controlado-controlador. Con los *Large Language Models* es posible "entrenar" modelos para clasificar información y generar predicciones sobre qué tipo de respuestas son estadísticamente más plausibles que otras. No obstante, más que entender este proceso como una simple enseñanza a las máquinas, se trata de una relación de co-aprendizaje, donde humanos y sistemas artificiales ajustan mutuamente sus formas de representar, interpretar y producir conocimiento:

- Por ejemplo: "Matzakos *et al.* (2023) comparan Large Language Models (LLMs) con sistemas algebraicos computacionales y encuentran que, a diferencia de estos últimos, los LLMs permiten una interacción en lenguaje natural con el problema y brindan explicaciones detalladas al estudiante. (Matzakos *et al.,* 2023, p. 63)
- Shima *et al.* (2023) muestran que ciertas técnicas de 'encadenamiento de pensamientos' en los prompts aumentan significativamente la precisión de los LLMs al resolver problemas, demostrando que la *agencia cognitiva* puede distribuirse entre humanos y máquinas.
- Por otro lado, Yen, An-Zi, y Wei-Ling Hsu (2023), reconocen que actualmente, el empleo de los LLMs para mejorar habilidades de resolución de problemas matemáticas proporcionando una debida retroalimentación tiene aún grandes desafíos. En ocasiones, los LLMs pueden malinterpretar preguntas, generar razonamientos incorrectos y una dificultad para comprender las razones de las preguntas dadas por estudiantes.

[3] Recientemente, Open AI la empresa que elabora ChatGPT publicó un video donde el asistente virtual guiaba a un niño a resolver un triángulo equilátero. (Ver: https://youtu.be/_nSmkyDNulk?si=ViLQzhb99McVk2la

Estos estudios muestran que, aunque los LLMs ofrecen algunas alternativas para la educación matemática, aún existen desafíos significativos que deben abordarse. En conjunto, estos estudios muestran que los LLMs no deben entenderse únicamente como herramientas controladas por el docente, sino como agentes que participan en la configuración de nuevas formas de mediación cognitiva. Su incorporación a la educación matemática abre posibilidades para la personalización de la retroalimentación, el diseño adaptativo y la co-producción de conocimiento entre humanos y sistemas artificiales.

Dada la creciente evidencia de la presencia de las inteligencias artificiales en la educación (ver por ejemplo Chen *et al.*, 2020), sería ingenuo suponer que estas tecnologías no encontrarán caminos hacia el aula. Los avances sugieren una integración inevitable de estas herramientas en contextos educativos a pesar de los desafíos que presentan en términos de sus posibles errores. Por lo tanto, es prudente anticipar y preparar estudios sobre la incorporación y uso en la práctica educativa, así como el propio "entrenamiento" de las inteligencias artificiales para garantizar que su implementación maximice sus beneficios mitigando riesgos inherentes.

3.3 Sobre la posibilidad de mejorar nuestra comprensión y relación con el medio ambiente.

Las teorías posthumanistas de Donna Haraway, Rosi Braidotti y Karen Barad, ofrecen una crítica profunda al dualismo tradicional en donde se hace énfasis en el individuo y su psicología, negando, en muchas ocasiones, otras formas de existencia y su convivencia; es decir, una visión jerárquica humana. Las autoras y sus teorías argumentan que no existen fronteras fijas entre humanos, máquinas y naturales, sino una especie de red de interdependencias (Haraway, 1985; Braidotti, 2013; Barad, 2007). En obras como *Feminist Posthumanism and New Materialism and Education* (Ringrose *et al.*, 2018) o *Posthuman and Higher Education* (Taylor y Bayley, 2018) se explora cómo estos enfoques pueden informar y transformar la educación, en general, para promover una mayor conciencia ecológica y sostenible. Al reconocer que los seres humanos somos participantes activos y no dominantes de los sistemas ecológicos, será posible desarrollar estrategias educativas más efectivas para abordar los problemas ambientales que recaen en nuestro planeta.

Concretamente, en el campo de la educación matemática, Mikulan y Sinclair (2017), en *Thinking Mathematics Pedagogy Stratigraphically in the Anthropocene*, argumentan que una postura posthumanista puede enriquecer la reflexión pedagógica al vincularla con las crisis medioambientales contemporáneas. Las autoras sostienen que la educación matemática debe ir más allá de una lógica centrada exclusivamente en la supervivencia humana y considerar otras fuerzas y formas de existencia que desbordan los marcos antropocéntricos tradicionales. En sus palabras, es necesario atender a "fuerzas de composición que difieren de las del hombre y de su organismo productivo" (Mikulan y Sinclair, 2017, p. 23). Desde una filosofía de la educación matemática, esta perspectiva impulsa a imaginar prácticas pedagógicas ecológicamente integradas, que reconozcan la interdependencia entre humanos, no humanos y entornos materiales, y que descentren al sujeto humano como único agente de sentido y conocimiento.

Por otro lado (Coles *et al.*, (2024) en su artículo sobre los gestos socio-ecológicos en la educación matemática, describen cómo existe una relación bidireccional entre las prácticas educativas y los aspectos ecológicos y sociales. En este trabajo, plantean que la educación matemática no solo debería ser receptiva a los cambios ambientales, sino que también puede ser un agente de cambio ofreciendo respuestas significativas a estos. Proponen, "estar atentos a los cruzamientos socio-ecológicos" (Coles *et al.*, 2024, p. 367) como una práctica relevante en la educación matemática, permitiendo así confrontar los desafíos reales que enfrenta la sociedad y el planeta.

Estos estudios evidencian una preocupación compartida por promover una visión más holística y menos dualista de la educación matemática. En particular, resulta notable la manera en que ambos trabajos reconceptualizan las nociones de sujeto y agencia, al preguntarse: ¿Qué o quién puede participar y ejercer agencia en los procesos educativos? La respuesta que proponen se inscribe en una perspectiva posthumanista que cuestiona la centralidad antropocéntrica del sujeto humano como único agente legítimo del conocimiento. Desde esta mirada, se desdibujan las fronteras entre humanos y no humanos, reconociendo la interacción entre animales, plantas, tecnologías y objetos en la producción de sentido educativo.

Más que una idea nueva, esta postura busca revertir la separación moderna entre humanidad y naturaleza, una escisión que ha legitimado la explotación del entorno y el uso instrumental de los seres no humanos. Pensar la educación matemática desde el posthumanismo no implica descubrir una interdependencia inexistente, sino reconocerla críticamente y asumir sus consecuencias éticas y ecológicas. De ahí su relevancia para reorientar las prácticas pedagógicas hacia una comprensión más relacional, simbiótica y responsable del mundo que habitamos.

3.4 Críticas al posthumanismo

En la incursión del posthumanismo a lo educativo, se han presentado algunas críticas relevantes. Por ejemplo, Snaza y Weaver (2015) argumentan que el posthumanismo podría minar los valores humanistas esenciales en la educación, como la empatía, la ética y la búsqueda de justicia social. De la misma manera, ambos autores, expresan preocupación que las posturas posthumanistas enfaticen el avance tecnológico por encima de un bienestar entre estudiantes, docentes y la comunidad educativa. Aunque el posthumanismo es una corriente más amplia que aquella que trabaja con la tecnológica, el "sobre énfasis tecnológico" puede provenir de la predominante visibilidad de la tecnología, de los medios de comunicación con narrativas sobre cyborgs, robots; sobre la dominante influencia del transhumanismo y en general por una cultura de la fascinación tecnológica. El posthumanimo va más allá de esto. Aunado a estas críticas, Pedersen (2010) critica los marcos educativos posthumanistas por potencialmente descuidar la agencia, el contexto y la subjetividad humana durante el proceso de aprendizaje haciendo énfasis excesivo en los agentes no humanos.

Desde algunas posturas más radicales, esta excesiva descentralización del humano podría llevar a una especie de "deshumanización" de la experiencia educativa. No obstante, es coherente cuestionarse si las actuales posturas educativas humanistas priorizan el desarrollo humano a expensas de otros agentes, como la naturaleza, que son estudiados como subordinados a estos. Otra crítica yace en lo que Ferrando (2013) cuestiona las posibles dificultades de implementar principios posthumanistas en los procesos educativos, señalando que estas ideas pueden ser demasiado teóricas para poder usarlas. El mismo Ferrando propone la necesidad de equilibrar la descentralización del sujeto con algunas posturas humanistas en donde sea el sujeto y su contexto quienes definan lo ocurrido en la situación educativa.

4. REFLEXIONES

En este ensayo se han explorado las implicaciones de una filosofía de la educación matemática a la luz del posthumanismo, que exige repensar nuestras relaciones con la tecnología y el medio ambiente. Haraway, Braidotti y Barad invitan a deshacer los límites entre lo humano, lo tecnológico y lo natural; de ello se sigue una reconceptualización del campo: la educación matemática debe entenderse como práctica relacional y distribuida, donde el quehacer educativo no se reduce a voluntades humanas, sino que se co-configura en ensamblajes con inteligencias artificiales, sistemas ecológicos y materiales que participan en la producción de conocimiento y en la constitución de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En la misma dirección, asumir una postura posthumanista –como plantean Snaza y colaboradores– implica "rechazar que lo humano está separado (y separable) de todo lo demás del planeta" (Snaza y Weaver, 2015, p. 4), desplazando así el eje desde el control humano hacia la co-agencia situada que sostiene toda práctica educativa.

El posthumanismo en la educación matemática no se limita a cuestionar el antropocentrismo: reubica la agencia del conocimiento en ensamblajes donde humanos, sistemas de IA y entornos ecológicos co-configuran prácticas de enseñanza y aprendizaje. En este marco, las máquinas dejan de operar como meras herramientas y pasan a funcionar como co-agentes que proponen, verifican y reorganizan procedimientos; a la par, los entornos naturales se integran como condiciones materiales y normativas que orientan el sentido y alcance de lo que se aprende. Este desplazamiento no afirma que las "máquinas piensen" en un sentido humano, sino que intervienen efectivamente en la producción de conocimiento.

Finalmente, esta apertura teórica invita a problematizar algunas preguntas cruciales que podrían orientar futuras investigaciones en filosofía de la educación matemática desde una perspectiva posthumanista: ¿La actividad matemática puede seguir considerándose esencialmente humana? ¿Qué matemáticas tiene sentido aprender cuando la agencia cognitiva es distribuida? ¿Cómo afecta la reconstrucción del concepto de "naturaleza humana" a nuestras nociones de ciencia, investigación, escuela, aula, enseñanza, estudio, etc.? ¿Cómo pueden las inteligencias artificiales no solo asistir sino ser agentes activos en los procesos de educación matemática, y cuáles son las implicaciones éticas de tal participación?

Estas preguntas abren las reflexiones hacia nuevas posibles exploraciones. La filosofía de la educación matemática, nutrida por el pensamiento posthumanista, tiene el potencial de desestabilizar supuestos arraigados, expandir horizontes teóricos y renovar las prácticas educativas en un mundo cada vez más interconectado, híbrido y éticamente desafiante.

REFERENCIAS

Appel, K. I. (1984). The use of the computer in the proof of the four color theorem. *Proceedings of the American Philosophical Society, 128*(1), 35–39.

An-Zi, Y., y Hsu, W.-L. (2023). Three questions concerning the use of large language models to facilitate mathematics learning. arXiv preprint arXiv:2310.13615.

Barad, K. (2007). *Meeting the universe halfway: Quantum physics and the entanglement of matter and meaning*. Duke University Press.

Bostrom, N. (2005). In defense of posthuman dignity. *Bioethics, 19*(3), 202–214.

Braidotti, R. (2013). *The posthuman*. Polity Press.

Braidotti, R. (2017). Critical posthuman knowledges. *South Atlantic Quarterly, 116*(1), 83–96.

Chen, L., Chen, P., y Lin, Z. (2020). Artificial intelligence in education: A review. *IEEE Access, 8*, 75264–75278. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2988510

Coles, A., Solares-Rojas, A., y le Roux, K. (2024). Socio-ecological gestures of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 1–19.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technoracy: A trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 131–154.

D'Ambrosio, U. (2006). *Ethnomathematics; between traditions and modernity*. Sense Publishers.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 44–48.

de Freitas, E., y Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. Cambridge University Press.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Routledge.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. State University of New York Press.

Ernest, P. (2016). An overview of the philosophy of mathematics education. *Revista Eletrônica de Educação Matemática, 11*, 3–20.

Ernest, P. (2016). The ethics of mathematics: Is mathematics harmful? En P. Ernest (Ed.), *Critical mathematics education: Theory, praxis, and reality* (pp. 187–216). Information Age Publishing.

Ernest, P., Miarka, R., Skovmose, O., Kvasz, L., van Bendegem, J. P., Moeller, R., y Bicudo, M. (2016). *The philosophy of mathematics education*. Springer Nature.

Ferrando, F. (2013). Posthumanism, transhumanism, antihumanism, metahumanism, and new materialisms: Differences and relations. *Existenz, 8*(2), 26–32.

Geller, L. (1982). The failure of self-actualization theory: A critique of Carl Rogers and Abraham Maslow. *Journal of Humanistic Psychology, 22*(2), 56–73.

Gleason, S. C. (2014). Don't fear the cyborg: Toward embracing posthuman and feminist cyborg discourses in teacher education and educational technology research. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 14*(2), 120–134.

Gordon, J., Babaeianjelodar, M., y Mathews, J. (2020). Studying political bias via word embeddings. En *Companion Proceedings of the Web Conference 2020* (pp. 760–764).

Grusin, R. (2015). *The nonhuman turn*. University of Minnesota Press.

Guba, E. G., y Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 163–194). Sage.

Haraway, D. J. (1985). *A cyborg manifesto: Science, technology, and socialist-feminism in the late twentieth century*. University of Minnesota Press.

Jacques, C. (1969). Humanism. *The Expository Times, 80*, 137–140.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. *En Proceedings of the Eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–27). PME.

Kouppanou, A. (2022). The posthumanist challenge to teaching or teaching's challenge to posthumanism: A neohumanist proposal of nearness in education. *Discourse: Studies in the Cultural Politics of Education, 43*, 766–784. https://doi.org/10.1080/01596306.2022.2033534

Louie, N., y Zhan, W. (2022). A socio-ecological framework for research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 53*(5). 365-371. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2022-0003

Maddy, P. (1992). *Realism in mathematics.* Oxford University Press.

Magoon, A. J. (1977). Constructivist approaches in educational research. *Review of Educational Research, 47*(4), 651–693.

Maslow, A. (1954). *Motivation and personality.* Harper y Row.

Matzakos, N., Doukakis, S., y Moundridou, M. (2023). Learning mathematics with large language models: A comparative study with computer algebra systems and other tools. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET), 18*(20), 51–71.

Mikulan, P., y Sinclair, N. (2017). Thinking mathematics pedagogy stratigraphically in the Anthropocene. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 32*.

Morris, M. (2014). Posthuman education and animal interiority. En N. Snaza y J. A. Weaver (Eds.), *Posthumanism and educational research* (pp. 43-55). Routledge.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 1–24.

Palmas, S. (2024). Capítulo 29. Balances y Horizontes en la Investigación Educativa Matemática Mexicana de la Década. En D. Rodríguez y S. Palmas (coords.). "La

Educación en campos Disciplinares. Área Temática 6: Artes, Ciencias, Educación Física, Matemáticas, Lenguaje, Lenguas Extranjeras 2012-2021". COMIE. México.
Pedersen, H. (2010). Is 'the posthuman' educable? On the convergence of educational philosophy, animal studies, and posthumanist theory. *Discourse: Studies in the Cultural Politics of Education, 31*(2), 237–250.
Pickering, A. (2010). *The cybernetic brain: Sketches of another future*. University of Chicago Press.
Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación: Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Universidad de los Andes.
Richard, P. R., Vélez, M., y Van Vaerenbergh, S. (2022). *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve the mathematical human learning*. Springer.
Richards, J., y von Glasersfeld, E. (1980). Jean Piaget, psychologist of epistemology: A discussion of Rotman's Jean Piaget: Psychologist of the real. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*, 29–36.
Ringrose, J., Warfield, K., y Zarabadi, S. (2018). *Feminist posthumanism and new materialism and education*. Routledge.
Roden, D. (2014). *Posthuman life: Philosophy at the edge of the human*. Routledge.
Ruelle, D. (2013). *Post-human mathematics*. arXiv preprint arXiv:1308.4678.
Shima, I., Du, L., y Shrivastava, H. (2023). *MathPrompter: Mathematical reasoning using large language models*. arXiv preprint arXiv:2303.05398.
Skovmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Kluwer.
Skovmose, O. (2014). *Critique as uncertainty*. Monografías de Educação Matemática, 12, 33–56.
Skovmose, O. (2016). Critical mathematics education: Concerns, notions, and future. En P. Ernest, O. Skovmose, J. P. van Bendegem, M. Bicudo, R. Miarka, L. Kvasz, y R. Moeller (Eds.), *The philosophy of mathematics education* (pp. 9–12). Springer.
Snaza, N., y Weaver, J. (2015). *Posthumanism and educational research*. Routledge.
Snaza, N., Appelbaum, P., Bayne, S., Carlson, D., Morrison, M., Rotas, N., ... Weaver, J. (2014). Toward a posthuman education. *Journal of Curriculum Theorizing, 30*(2), 39-55.
Steffe, L. P., y Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 711–733.
Strom, K., y Martin, A. (2022). Toward a critical posthuman understanding of teacher development and practice: A multi-case study of beginning teachers. *Teaching and Teacher Education, 113*, 103688. https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103688
Taylor, C., y Bayley, A. (2018). *Posthuman and higher education*. Springer.

Valero, P., y Skovmose, O. (2012). *Educación matemática crítica: Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Centro de Investigación y Formación en Educación, Universidad de los Andes; Department of Learning and Philosophy, Aalborg University.

Valero, P., y Zevenberger, R. (2004). *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology*. Kluwer.

Whitehead, A. N., y Russell, B. (1913). *Principia mathematica to 56*. Cambridge University Press.

Datos de correspondencia

Santiago Alonso Palmas Pérez

Dirección: Universidad Autónoma Metropolitana. Unidad Lerma. Departamento de Estudios Culturales. Av. de las Garzas No. 10, Col. El Panteón, Municipio Lerma de Villada, Estado de México, C.P. 52005

s.palmas@correo.ler.uam.mx

 https://doi.org/10.24844/EM3703.09

El trapecio sin fórmula. Situación didáctica para profesores en formación

The trapezium with no formula. Didactical situation for pre-service teachers

Ismael Cuevas-Morales,[1] Apolo Castañeda,[2] Santiago Palmas[3]

Resumen: Este artículo reporta parte de los resultados de una investigación desarrollada con estudiantes de la Licenciatura en Educación Primaria, centrada en los procesos de adaptación independiente dentro del marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). El estudio se enfocó en el diseño y organización de una situación didáctica orientada a favorecer la autonomía del profesorado en formación, así como en el análisis de las interacciones entre este y el milieu diseñado. La metodología incluyó un análisis a priori de la situación, fundamentado en condiciones derivadas de la TSD, y un análisis a posteriori de las estrategias de resolución desplegadas por los participantes. Entre los hallazgos sobresale el tránsito de los dibujos a esquemas interpretados como "pruebas", en el sentido de Eschenburg (2022), como punto crucial en la evolución de la situación. Asimismo, se concluye que las condiciones establecidas en el análisis a priori desde la TSD fueron cruciales para el diseño de la situación didáctica, pues orientaron las posibilidades de adaptación independiente y enmarcaron la emergencia de estrategias de resolución.

Fecha de recepción: 16 de junio de 2023. **Fecha de aceptación:** 9 de agosto de 2025.

[1] Benemérita Escuela Normal Veracruzana "Enrique C. Rébsamen", México, ismaelbenv@gmail.com

[2] Instituto Politécnico Nacional, CICATA Legaria, Programa de Matemática Educativa, México, acastane@ipn.mx, https://orcid.org/0000-0002-7284-8081.

[3] Departamento de Estudios Culturales, Universidad Autónoma Metropolitana, México, s.palmas@correo.ler.uam.mx, https://orcid.org/0000-0003-1175-5938.

Palabras clave: *Teoría de Situaciones Didácticas, formación docente, geometría, adaptación independiente, representaciones matemáticas.*

Abstract: This article reports part of the results of a study conducted with students of the Primary Education Degree, focused on the processes of independent adaptation within the framework of the Theory of Didactic Situations (TDS). The study focused on the design and organization of a didactic situation aimed at fostering the autonomy of preservice teachers, as well as on the analysis of the interactions between them and the designed milieu. The methodology included an a priori analysis of the situation, based on conditions derived from the TDS, and an a posteriori analysis of the resolution strategies deployed by the participants. Among the findings, the transition from drawings to schemes interpreted as "proofs" in the sense of Eschenburg (2022), stands out as a crucial point in the evolution of the situation. Likewise, it is concluded that the conditions established in the a priori analysis from the TDS were crucial for the design of the didactic situation, since they guided the possibilities of independent adaptation and framed the emergence of resolution strategies.

Keywords: *Theory of Didactic Situations, teacher education, geometry, independent adaptation, mathematical representations.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de la geometría pueden contribuir al desarrollo del pensamiento lógico, la percepción espacial, el razonamiento deductivo y la resolución de problemas, entre otras habilidades fundamentales (García y López, 2008). Además, dado que conceptos matemáticos de distintas ramas pueden representarse y explicarse mediante recursos geométricos, la geometría adquiere un lugar estratégico en la formación docente (Pasani, 2019).

No obstante, diversas investigaciones han mostrado que los futuros docentes tienden a privilegiar enfoques procedimentales en la enseñanza de la geometría, lo que se relaciona con mayores niveles de ansiedad matemática en comparación con quienes perciben la geometría como una oportunidad para mejorar la capacidad de pensar y razonar (Gutiérrez-Rubio *et al.*, 2018). En particular, se han identificado problemáticas persistentes: dificultades para reconocer figuras en orientaciones no convencionales (Clements y Battista, 1992), errores de clasificación al relacionar diferentes conjuntos de figuras, como no reconocer que el cuadrado pertenece al conjunto de los rectángulos (Hershkowitz, 1990), escasa familiaridad con cuerpos geométricos y sus representaciones (Gutiérrez, 1996), así como limitaciones para establecer vínculos entre distintas representaciones semióticas (Duval, 2006). Esto es un aspecto especialmente crítico ya que el conocimiento disciplinar insuficiente, que lleva a algunos futuros docentes a evitar los temas que no dominan, restringiendo así las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos (Barrantes y Blanco, 2004).

Desde esta perspectiva, se vuelve necesario generar experiencias en las que el profesorado en formación construya sus propias relaciones geométricas y explore las de sus pares, de manera que pueda establecer vínculos significativos con los objetos matemáticos presentes en su práctica profesional. Es en este marco que se sitúa la propuesta de la situación didáctica presentada en este artículo, cuyo propósito es favorecer procesos de adaptación independiente y promover la autonomía de los profesores en formación en el análisis de un problema geométrico.

MARCO DE REFERENCIA

Realidad, ideas y conceptos matemáticos

Eschenburg (2022), dice que originalmente la geometría es el estudio del espacio y forma, afirmando que las ideas y lenguaje desarrollados en esta área pueden ser transferidos y aplicados más allá del espacio visible a otras áreas del conocimiento. Concibe a la geometría como una cuidadosa reflexión matemática, enfocada al conjunto de ideas derivadas de la percepción espacial. Desde su perspectiva, la intuición geométrica se refiere a percibir las formas espaciales presentes en la realidad y sus relaciones explícitas e implícitas. Las formas, sin embargo, no se toman simplemente de la realidad, también son idealizadas y transformadas en sentido platónico. De esta manera en la geometría euclidiana, la relación entre idea y formalización matemática, se realiza a través de una definición que debe representar puntualmente la idea en palabras (figura 1).

Figura 1. Relación entre realidad, idea y formalización matemática.
Imagen tomada de Eschenburg (2022, p. 2).

La "idea" se cimienta entonces en un cierto marco conceptual, volviéndose susceptible de un razonamiento posterior a través de la lógica. Este proceso tiene una naturaleza compleja, ya que, a pesar de tener familiaridad con la "idea", la cimentación conceptual es necesaria para asegurar la construcción de conocimiento, dado que las apariencias por sí solas pueden ser engañosas.

Durante la exploración de algunas "ideas" geométricas existen diversos escenarios donde la intuición no es suficiente para visibilizar algunas relaciones, por lo que la necesidad de una definición precisa cobra relevancia. Durante esta construcción, los trazos pueden ayudar a mostrar nuevas perspectivas de un problema o concepto, ayudando a hacer evidentes relaciones que puedan eventualmente aceptarse como obvias. Eschenburg (2022) llama "prueba", a esos trazos hechos en la realidad (izquierda de la figura 1) que tratan de esquematizar estructuras ideales, en los casos más simples, con ayuda de algunas líneas auxiliares. Ejemplo de lo anterior puede ser la determinación de la suma de los ángulos internos de un triángulo al añadir líneas paralelas (figura 2).

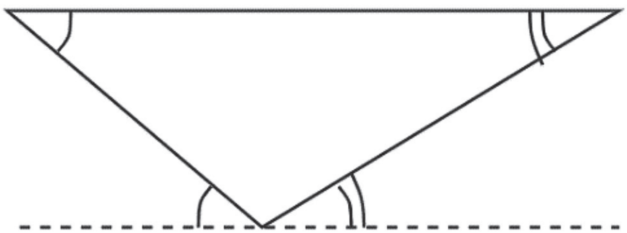


Figura 2. Determinación de la medida de los ángulos de un triángulo mediante paralelas.
Imagen tomada de Eschenburg (2022, p. 3).

Así, el proceso de tránsito de "idea" a concepto matemático con ayuda de "pruebas" se puede considerar como formalización. En ese sentido, Angulo *et al.* (2020) señalan que un pensamiento donde predominan las imágenes da paso a la construcción de conceptos empíricos basados en características observables del objeto matemático. Con base en estas construcciones, mediante un razonamiento lógico y abstracto, se realizan generalizaciones a través de las cuales los conceptos se pueden definir formalmente a partir de la identificación de sus rasgos esenciales. En contraparte, una definición memorizada sin que exista una idea o concepto matemático en el sentido antes discutido, podría ser más difícil de manipular mentalmente. Por lo que un entendimiento intuitivo es un punto de partida para la construcción de un concepto geométrico que pueda ser posteriormente manipulado.

Teoría de situaciones didácticas (TSD)

Por lo anterior, organizar intervenciones que puedan fomentar procesos de construcción de conceptos geométricos a partir de "ideas" en escuelas formadoras de docentes se considera relevante. Para ello, basándose en la TSD, se organizó una intervención de tal manera que fue posible observar cómo los profesores en formación explicitan "ideas" que puedan transitar hacia un estatus de conceptualización a través de "pruebas" durante diferentes interacciones. Se consideró la TSD ya que Brousseau (2007) señala que una situación es "un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado" (p.17), en la que, mediante la interacción, los sujetos buscan alcanzar un cierto estado favorable en el *milieu* (medio), para lo cual, su principal recurso son una serie de decisiones que dependen de un determinado conocimiento. Ese estado favorable, en este documento, se interpreta como la construcción de un concepto geométrico a partir de interacciones basadas en "ideas" que puedan ser manipuladas de manera cada vez más abstracta, por ejemplo, a través de "pruebas".

Por ello, la organización de la intervención se propone a través de la distinción propuesta por la TSD en tres tipos particulares de situación. Esta distinción depende de la interacción de los sujetos con el *milieu* y la forma en la que suelen manifestar (los sujetos) los conocimientos: la *situación de acción* incluye intercambios de información sin lenguaje o codificación aparente, estas interacciones suelen reflejarse como acciones y decisiones individuales; La *situación de formulación*, hace referencia a intercambios de información codificadas en algún lenguaje, se suele observar estas interacciones como mensajes; la *situación de validación* hace referencia a los intercambios de juicios, los cuales se pueden observar en opiniones que pueden articular múltiples enunciados y que juegan el papel de hipótesis (Brousseau, 2007). Con base en la tipificación anterior y respecto a una dimensión cognitiva, Artigue *et al.* (2014), sugieren distinguir dos tipos de procesos: la adaptación independiente y la aculturación. La adaptación independiente se acota al papel del medio en una situación a-didáctica, mientras que la aculturación, observa el papel de las interacciones bajo la responsabilidad del docente en una situación didáctica.

Las nociones de situación a-didáctica y *milieu*, están ligadas a la visión del aprendizaje como proceso de adaptación y la intención de optimizar dichos procesos. Es decir, elucidar o crear situaciones para que el conocimiento matemático objetivo emerja de la interacción entre los estudiantes y el *milieu*. Así en una situación a-didáctica, los estudiantes aceptan la responsabilidad de enfrentar el problema y el docente se restringe de interferir o sugerir el conocimiento objetivo haciendo que el proceso de adaptación sea posible. En ese sentido el *milieu* es el sistema con el que los estudiantes interactúan durante una situación a-didáctica y el rol principal del docente o investigador es su organización. Además de la situación a-didáctica, la TSD integra interacciones bajo la responsabilidad del profesor, la devolución e institucionalización. A través de estas nociones, busca conectar los procesos de adaptación con los de aculturación. Mediante la devolución, el profesor hace que los estudiantes acepten y mantengan la responsabilidad de enfrentar la situación, gestionando las condiciones de aprendizaje sin revelar las intenciones didácticas. Durante la institucionalización, el profesor ayuda al estudiantado a conectar el conocimiento que ha sido construido derivado de la situación a-didáctica con el conocimiento cultural e institucional objetivo. Lo anterior restaura las intenciones didácticas haciendo la aculturación posible, derivando en una situación didáctica (Artigue *et al.*, 2014).

De los procesos planteados por la TSD, este artículo se centra exclusivamente en el de adaptación independiente. En consecuencia, el análisis se enfoca en el papel del docente en el diseño y organización del *milieu* con la intención de favorecer la máxima autonomía del profesorado en formación, así como en las interacciones que dichos estudiantes establecieron con ese *milieu* durante la implementación. La metodología que se presenta a continuación aborda precisamente cómo se diseñó la situación con este propósito y en qué medida las interacciones observadas reflejaron el nivel de autonomía previsto.

METODOLOGÍA

En esta sección se presenta la situación propuesta durante una sesión del curso de geometría para profesores en formación, junto con el análisis realizado antes de su implementación y el reporte de las estrategias que emergieron en el trabajo del estudiantado. La intervención, organizada según lo descrito en el apartado teórico, se llevó a cabo en una escuela normal pública formadora de docentes de educación primaria, con la participación de 26 estudiantes que cursaban el cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria. El procedimiento metodológico se estructuró en dos fases: un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. El primero constituyó un espacio de estudio del *milieu*, en el que se valoró cómo los elementos del medio (enunciado del problema, recursos materiales y condiciones de trabajo) podían incidir en la adaptación independiente del profesorado en formación, identificando tanto su potencial adidáctico como sus posibles limitaciones.

El segundo análisis, de carácter *a posteriori*, se orientó a clasificar las estrategias desplegadas durante la implementación e identificar los factores que favorecieron o dificultaron la resolución. En este marco, el *milieu* estuvo conformado por el problema geométrico del trapecio, los recursos disponibles (papel, instrumentos de geometría y consignas), así como las relaciones que los estudiantes establecieron con estos. Los datos considerados incluyeron las producciones escritas del profesorado en formación, los registros de sus interacciones durante la sesión y las notas de observación tomadas por el docente-investigador. La retroalimentación emergió principalmente de la interacción entre el estudiantado y dicho *milieu*, favoreciendo la autonomía en la construcción de estrategias, mientras que la intervención docente se restringió a sostener el desarrollo de la situación sin dirigirlo hacia una solución específica.

La situación geométrica

El diseño de la situación se pensó para que el profesorado en formación de una escuela formadora de docentes en México, pusiera en juego la construcción del objeto geométrico con base en sus ideas. La intervención se propuso en el curso Geometría. Su aprendizaje y enseñanza bajo el marco del plan de estudios 2018 de la Licenciatura en Educación Primaria. De acuerdo con la tipificación de situaciones didácticas propuesta por Brousseau (2007) descrita anteriormente, se organizó la intervención de la siguiente manera:

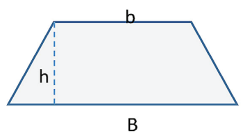
1) Situación de Acción (SA): Con el objetivo de que el profesorado en formación se familiarizara con la tarea presentada, se les pidió plantear alguna primera solución de forma individual. Se esperaba que algunos planteamientos que surgieran durante este espacio, pudieran ser puntos de discusión en las siguientes situaciones, facilitando la interacción (10-15 minutos).
2) Situación de Formulación (SF): En grupos pequeños, de 3 a 4 miembros, se les solicitó socializar sus razonamientos y primeras respuestas. Además, se les pidió que anotaran o dibujaran tanto los detalles de los procedimientos que habían utilizado (hayan sido exitosos o no) como sus primeras conclusiones. Con esto se esperaba que el profesorado en formación comunicara sus procesos resolutivos, planteando estrategias alternativas de solución. (15-25 minutos).
3) Situación de Validación (SV): Se les pidió a los equipos que esquematizaran y compartieran sus conclusiones mediante una pequeña presentación. Con ello se esperaba que el profesorado en formación pudiera organizar la información que considerara relevante durante la construcción de su resultado (hasta 5 minutos de presentación para cada equipo, más una etapa de retroalimentación de los otros equipos).

A continuación, se muestra la situación tal como se les presentó a los profesores en formación:

Trapecio isósceles

La siguiente figura es un trapecio isósceles:

Usualmente, la fórmula para calcular su área se representa con la siguiente expresión:



$$A = \frac{B + b}{2}\, h$$

Ahora, imagínate que no conoces dicha expresión, y que eres un matemático que está buscando calcular el área de uno de estos trapecios, pero tú solo conoces las fórmulas para calcular el área de triángulos, cuadrados y rectángulos.

¿Tú cómo calcularías el área de esta figura a partir de la base menor (b), base mayor (B) y altura (h)?

¿Podrías escribir tu propia fórmula para calcular el área del trapecio isósceles?

¿Tu fórmula para calcular el área del trapecio isósceles y la fórmula convencional son las mismas?

Recuerda anotar, en donde gustes, tanto el camino que seguiste al buscar la respuesta a las anteriores preguntas, como también tus respuestas.

Análisis previo a la intervención

Tal como se mencionó, se retomaron las condiciones mencionadas por Artigue *et al.* (2014), como base de este análisis. Las condiciones de análisis a-didáctico proponen una reflexión organizada en torno a la posible interacción del profesorado en formación y el *milieu*, para que pudiera ayudar a prever elementos relevantes de la intervención, a esto se le llamó análisis del potencial a-didáctico. A continuación, se enuncian las nueve condiciones con su respectiva reflexión *a priori.*

a) El conocimiento matemático objetivo, debe constituir al método de solución del problema.

En un primer momento el conocimiento matemático objetivo de esta situación está relacionado al cálculo de áreas de un trapecio isósceles. Y tiene como premisa generar un algoritmo que permita el cálculo de su área para después compararlo con el algoritmo convencional.

De manera general, el área de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases multiplicada por su altura (Baldor, 1983). Lo anterior se puede demostrar con ayuda de la construcción mostrada en la figura 3. En esta figura se encuentra el trapecio ABCD, en donde por construcción, E es el punto donde la prolongación de $\overline{DC}$ se intersecta con la paralela de $\overline{AD}$ que pasa por el punto B. Por lo anterior $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$.

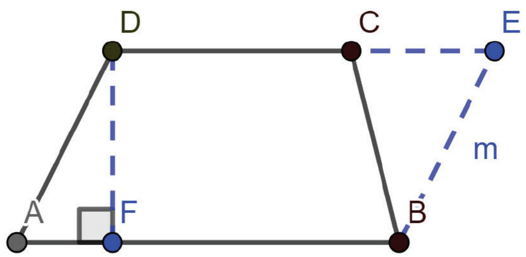


Figura 3. Trapecio con base menor prolongada.

Si $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$, entonces ABED es un paralelogramo. Luego, a través de las fórmulas para el área de un paralelogramo y un triángulo podemos obtener el área del trapecio:

$$\acute{A}rea = \overline{AB} \cdot \overline{DF} - \left(\frac{\overline{EC} \cdot \overline{DF}}{2}\right)$$

Como ABED es un paralelogramo

$$\overline{EC} = \overline{AB} - \overline{DC} \text{ , entonces}$$

$$\acute{A}rea = \overline{AB} \cdot \overline{DF} - \left(\frac{(\overline{AB} - \overline{DC}) \cdot \overline{DF}}{2}\right) = \overline{AB} \cdot \overline{DF} - \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{DF} - \overline{DC} \cdot \overline{DF}}{2}\right) =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{DF} - \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DF}}{2} + \frac{\overline{DC} \cdot \overline{DF}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DF}}{2} + \frac{\overline{DC} \cdot \overline{DF}}{2} = \frac{\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC})}{2}$$

Entonces,

$$\acute{A}rea = \frac{\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC})}{2}$$

De donde $\overline{DF} = h$, $\overline{AB} = B$ y $\overline{DC} = b$ en el algoritmo convencional.

Otra manera de demostrar lo anterior es dividir a un trapecio en dos triángulos (ΔAFD y ΔBGC) y un rectángulo (DCFG) como se muestra en la figura 4.

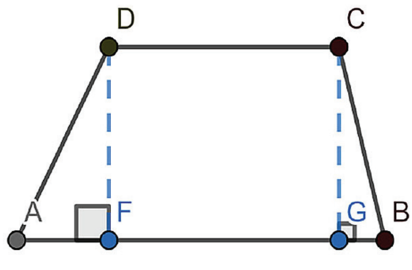


Figura 4. Trapecio dividido en regiones.

De esa manera podemos obtener el área del trapecio mediante las fórmulas de cálculo de área de triángulos y rectángulos:

$$Área = \frac{1}{2}\overline{AF} \cdot \overline{DF} + \overline{FG} \cdot \overline{DF} + \frac{1}{2}\overline{GB} \cdot \overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{DF}(\overline{AF} + 2\overline{FG} + \overline{GB}) =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{DF}(\overline{AF} + \overline{FG} + \overline{DC} + \overline{GB}) = \frac{1}{2}\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC}) = \frac{\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC})}{2}$$

Entonces,

$$Área = \frac{\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC})}{2}$$

Las demostraciones anteriores aplican para todos los trapecios, incluyendo el trapecio isósceles. Sin embargo, dado que el trapecio isósceles cuenta con un eje de simetría axial, se consideró que a los profesores en formación les resultaría más fácil plantear estrategias para enfrentar la situación.

b) La consigna no debe hacer referencia de ninguna manera al conocimiento objetivo. Esta consigna determina el estado inicial, el proceso interactivo y lo buscado en el estado final.

Se puede observar que la consigna contiene el algoritmo convencional para el cálculo del área del trapecio isósceles y también contiene el nombre de la figura a analizar. Aunque se hace referencia al conocimiento objetivo, se considera que no interferirá con el proceso de construcción de un algoritmo propio. Es más, se pretende que se use como punto de comparación para validar el algoritmo generado.

También se puede ver que la consigna menciona al triángulo, cuadrado y rectángulo. Con ello se pretende dotar a los profesores en formación de un punto de partida para plantear sus propias estrategias o "pruebas" en el sentido de Eschenburg (2022). Sin embargo, es posible que dicha información prive al estudiantado de una oportunidad de aprendizaje acotando el conocimiento que tienen que usar. Para evaluar más a profundidad se consideró observar la evolución de la situación.

La consigna se diseñó para que en un inicio los profesores en formación plantearan algunos esquemas desde una visión intuitiva de la figura. Luego, conforme interactuaran más con el medio, tuviesen la necesidad de plantear un algoritmo que finalmente fuera validado a través del cálculo convencional del área de un trapecio.

c) El estudiantado comienza trabajando desde un conocimiento básico previo.

Dado el nivel de escolaridad de los profesores en formación, se consideró que tienen el conocimiento básico previo para enfrentar esta situación.

d) El estudiantado puede verificar por sí mismo, el éxito o fracaso de cada intento.

La pregunta tres de la secuencia planteada está diseñada con el objetivo de validar (o no) el algoritmo construido por el profesorado en formación. Esto dado que, una vez encontrado un planteamiento que se considere exitoso, este se tendrá que poner a prueba a través de un contraste con el algoritmo convencional durante la fase de validación.

e) Dichas verificaciones favorecen la construcción de hipótesis y agregan información

En caso de que las validaciones anteriores no tengan éxito, es posible que las diferencias que se encuentren entre el algoritmo propio y el convencional brinden información que les permita hacer replanteamientos tanto en sus procedimientos como en sus consideraciones iniciales.

f) El estudiantado puede realizar una serie rápida de prueba y error, pero la anticipación a las consecuencias de las acciones debe ser favorecida.

Desde el diseño de la situación no se percibe cómo se pueda realizar una serie rápida de prueba y error. Esto dado a que se percibe que cualquier planteamiento inicial requerirá una verificación de éxito o fracaso, lo cual implica cierto nivel de compromiso con el intento.

Sin embargo, se considera que la anticipación a las consecuencias se podrá dar en cuanto el estudiantado discuta los planteamientos, es decir en la fase de formulación. Ya que al poner en juego sus hipótesis y antes de comprometerse con la resolución, es posible que requieran evaluar las posibles consecuencias de éstas en el cálculo del área.

g) Dentro de las soluciones empíricas aceptables, existe una que puede refutar cualquier objeción

Como se mencionó en el inciso a) de esta sección, se optó por proponer al trapecio isósceles dado que esto podría permitir la identificación de estrategias de una forma más intuitiva. Sin embargo, también podría facilitar que se visualizara la construcción geométrica mostrada en la figura 5.

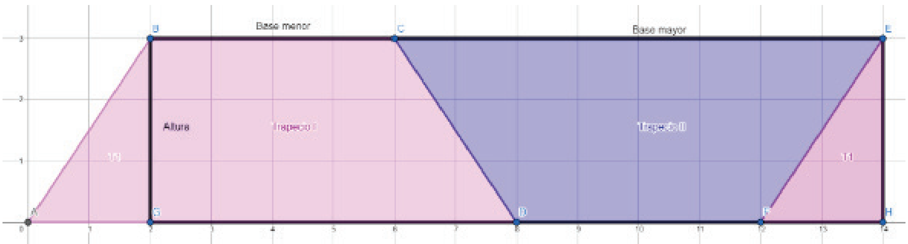


Figura 5. Construcción geométrica esperada. Elaborado con el software GeoGebra.

Esta construcción podría ser aceptada como "prueba", ya que otorga una perspectiva del trapecio isósceles en la cual los elementos del algoritmo convencional $A = \frac{B+b}{2}\,h$ están explícitos. Esta relación pudiese ser más obvia desde, por ejemplo, un trapecio rectángulo, por lo que trabajar desde un trapecio isósceles podría generar más elementos para el análisis.

h) La solución puede ser encontrada al menos por una parte del estudiantado. Esta también deberá ser verificada y compartida de forma rápida y eficiente. Lo anterior en un periodo de tiempo correspondiente al de una clase ordinaria.

La actividad se planificó para 60 minutos de duración efectiva, sin contar tiempos muertos dedicados a la organización, formación de equipos y demás necesidades presentes de forma natural en una sesión cotidiana. Dado que las sesiones en la escuela donde se puso en marcha la situación didáctica son en promedio de 120 minutos, el tiempo se considera suficiente para realizar la intervención.

Como se mencionó, la organización de la intervención se realizó con base en la situación de acción, formulación y validación. De tal manera que, para la primera, situación de acción, se prevé una fase individual donde puedan familiarizarse con la situación y generar una primera opinión sobre ésta.

Luego, durante la situación de formulación, se pretende realizar equipos de tres a cuatro individuos. Esto con el fin de verbalizar y plantear propuestas sobre cómo abordar la situación. Además, se pretende que el profesorado en formación pueda percibir propuestas resolutivas diferentes a la propia, generando discusiones que pongan en juego sus ideas iniciales. Después, durante la fase de validación, se pretende que en primer lugar se verifique el algoritmo generado con el algoritmo convencional, para que finalmente se puedan validar los argumentos sobre cómo se construyó en plenaria.

i) La situación podrá ser retomada, proveyendo de algunas preguntas que permitan reiniciar el proceso.

Una de las formas inmediatas de retomar la situación, sería preguntar al estudiantado si existe alguna otra forma de justificar el algoritmo convencional del cálculo de área del trapecio isósceles. Asimismo, se podría retomar el algoritmo construido y verificar su validez para cualquier trapecio. Otra forma sería cuestionar si existe alguna otra forma geométrica de la cual, a primera vista, no se comprenda el algoritmo convencional para entonces relanzar la situación a partir de ella.

Análisis de las evidencias del estudiantado

Durante esta sección se discute brevemente lo realizado por el profesorado en formación durante las etapas descritas anteriormente. Para ello, se organizan las interacciones a través de formas generales de enfrentar la situación por el estudiantado mediante las evidencias derivadas de la intervención.

Estrategias no exitosas

Divisiones en triángulos

Una propuesta del profesorado en formación intentaba dividir al trapecio en una serie de triángulos, considerando que inicialmente se podría calcular su área, para posteriormente multiplicarla por el número de triángulos que se formaran dentro del trapecio isósceles como se muestra en la figura 6.

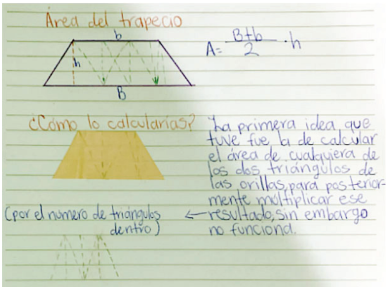


Figura 6. Ejemplo de procedimiento de división del trapecio en triángulos.

Se intuye que el equipo de profesores en formación asumió que era posible dividir el trapecio en triángulos idénticos de manera exacta (mediante dibujos o dobleces de papel). Para ello, tomaron como base la sección triangular que surge al dividir el trapecio en 2 secciones triangulares y una rectangular (similar a la división mostrada en la figura 8). Pero al llevarlo a la práctica identificaron que no era posible ya que sobraba una cierta área triangular que no era igual que las otras. Esto posiblemente los llevó a la conclusión de que su procedimiento no era funcional. Quienes intentaron esta estrategia enfrentaron dos dificultades principales, la primera, era expresar la división en triángulos mediante un algoritmo. La segunda, cómo integrar el área triangular inexacta en su procedimiento. Ningún intento derivado de estas estrategias logró proponer alguna expresión para el cálculo de área.

Intentos similares se dieron al dividir el trapecio isósceles en tres triángulos. Sin embargo, constantemente se preguntaban ¿Cómo saber el valor de cada una de las bases? La respuesta para el triángulo central mostrado en la figura 7, fue que su base era igual a la base menor del trapecio isósceles. Pero la respuesta para las bases de los triángulos laterales no fue tan evidente, lo que llevó al abandono de esta estrategia.

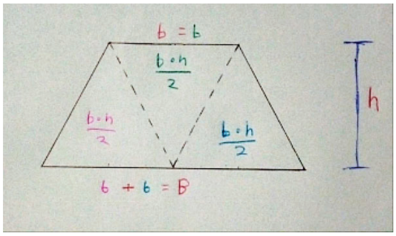


Figura 7. División del trapecio en tres triángulos.

Las anteriores estrategias fueron abandonadas al no poder solventar las dificultades encontradas, por lo que no fueron discutidas tan ampliamente como las estrategias que sí procedieron, las cuales se presentan a continuación.

Estrategias exitosas

División del trapecio isósceles en tres segmentos

Una de las estrategias más utilizadas por el grupo fue la división del trapecio isósceles en un rectángulo central, cuyas dimensiones eran la base menor y la altura del trapecio, más dos triángulos laterales que se formaban al dibujar el cuadrilátero central, tal como se muestra en la figura 8. El reto al que se enfrentaron los profesores en formación a través de este método fue encontrar una expresión generalizada para describir la base de los triángulos formados.

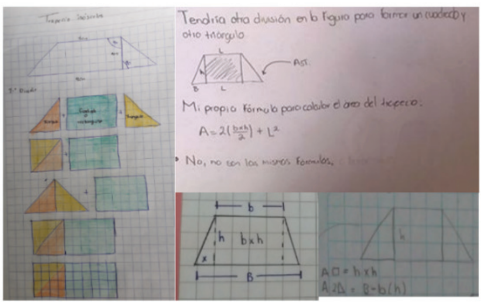


Figura 8. División del trapecio en un rectángulo y dos triángulos laterales.

Dada la problemática para generalizar expresiones, algunos docentes en formación comenzaron a asignar valores numéricos tanto a las bases del trapecio, como a la altura de este (algo que no se percibió en otras estrategias), esto con el objetivo de percibir algún método para obtener las medidas de las bases de los triángulos resultantes de la segmentación propuesta. Dicha estrategia les permitió transitar de una forma particular de calcular dicha medida hacia la generalización de dicho algoritmo, dadas ambas bases del trapecio. Por ejemplo, el asignar los valores de $B = 10$ y $b = 4$, facilitó visualizar que la resta $B - b = 6$ debía ser la suma de las dos bases de los triángulos laterales, lo que significaba que la base de cada uno tendría un valor de tres.

Durante la interacción grupal, la mayoría de las conversaciones se enfocaron en la discusión de la anterior estrategia, en donde comenzaron a llamarle "*x*" a cateto incógnita (foto inferior central e inferior derecha de la figura 8). Lo que les permitió incorporar dicho elemento a un algoritmo que comenzó a ser cada vez más aceptado al interior de algunos equipos:

$$A_{trapecio} = \frac{h}{2}\left(\frac{2x}{2}\right) + (b \cdot h) = \frac{hx}{2},$$

$$en\ donde: x = B - b,$$

$$\frac{2x}{2} = longitud\ del\ cateto,$$

$$h = altura$$

La anterior expresión fue posteriormente comparada con la fórmula convencional. Para ello, asignaron valores numéricos a las variables para contrastar el área resultante mediante ambos algoritmos. Un equipo sugirió el siguiente ejemplo: si $B = 16\ cm, b = 4\ cm, h = 4\ cm$, el área calculada tanto por el algoritmo construido como por el algoritmo convencional es de $28\ cm^2$. Al observar lo anterior algunos equipos propusieron dicho algoritmo como método propio para calcular el área de un trapecio isósceles. Sin embargo, lo anterior generó algunas dudas cuando fue analizada la segunda pregunta ¿Tu fórmula para calcular el área del trapecio isósceles y la fórmula convencional son las mismas?

Se generó entonces, una nueva discusión centrada en encontrar una manera de comprobar si el algoritmo propuesto era igual al convencional. Aquí también se pudieron observar diferentes formas de abordar esta nueva tarea, por un lado, hay quienes argumentaban que, si ambos algoritmos resultaban en la misma área, era entonces evidente que ambos métodos eran iguales.

Algunos profesores en formación comenzaron a tratar con diferentes valores para B, b y h, pasando a concluir que ambos algoritmos eran lo mismo. A pesar de ello unos cuantos sentían la necesidad de comprobarlo por algún otro método, por lo que decidieron abordar esa idea mediante álgebra.

El análisis algebraico, generó una discusión en la cual se abordó el papel del signo igual (=) para realizar dicho planteamiento. La interacción se centró en la posibilidad de escribir una igualdad basada en una suposición. Quienes decidieron proceder, continuaron operando la igualdad algebraicamente para representar esas expresiones de una manera en la que pudieran identificar si en realidad son iguales o no. Los profesores en formación argumentaron que usualmente usaban álgebra para encontrar el valor de una variable, pero que aquí, no se buscaba ningún valor, sino simplemente querían saber si ambas expresiones eran iguales. Dada la suposición de que ambos algoritmos eran iguales, una sección del grupo planteó la igualdad y llegó al siguiente resultado:

$$\frac{(B-b)*h}{2}+(b*h)=\frac{B+b}{2}*h$$

$$si\ se\ divide\ entre\ h:$$

$$\frac{(B-b)}{2}+b=\frac{B+b}{2}$$

$$si\ se\ multiplica\ por\ 2:$$

$$(B-b)+2b=B+b$$

$$al\ simplificar\ términos\ semejantes$$

$$B+b=B+b$$

Con base en lo anterior, concluían que el algoritmo que habían planteado inicialmente era igual al algoritmo convencional, al menos para el trapecio isósceles.

Construcción geométrica de dos trapecios isósceles

Esta estrategia surgió de una evidencia individual durante la situación de acción. Cuando se conformó el equipo que incluía a la persona que la propuso (figura 9), el equipo la acepto de inmediato sin proponer algún cambio. Una vez aceptada la estrategia, al interior del equipo cesaron los intentos por buscar otras alternativas.

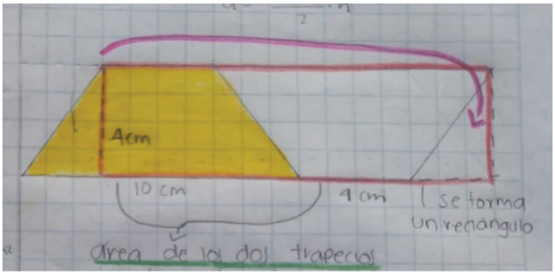


Figura 9. Construcción de un rectángulo a partir de dos trapecios isósceles idénticos.

Se cree que esta construcción fue fácilmente aceptada en la socialización, dado que el algoritmo para calcular el área de la figura en cuestión era idéntico al algoritmo tradicional enseñado en la escuela, ya que solo tenían que calcular el área del rectángulo formado y dividirla entre dos al estar conformada por dos trapecios, en donde uno de los lados del rectángulo se calculaba mediante la suma de la base menor con la base mayor y el otro lado era igual a la altura del trapecio.

DISCUSIÓN

En cuanto a la TSD

Se considera que la organización con base en la TSD tuvo efectos sobre la socialización. La familiarización con el problema durante la SA permitió al profesorado idear un primer planteamiento sobre la estrategia a seguir. Lo anterior facilitó que permearan distintas estrategias a la SF, las cuales, en algunos casos, eran similares entre sí. Así, cuando la estrategia aún no estaba lo suficientemente explícita, se esbozó un dibujo que permitiera algunas primeras manipulaciones sobre sus "ideas" haciendo factible la construcción de ciertas conclusiones en la SV. También durante estos casos dada la participación de múltiples individuos, la SV tomó más tiempo del esperado.

Por otro lado, cuando alguien propuso un esquema convincente que explicara el problema, la interacción cesaba. Lo anterior sucedía incluso si había diversas maneras de abordar el problema. Esto pareciera indicar que las estrategias generadas a nivel individual influyen en gran medida en la discusión durante este tipo de situaciones, lo que genera algunas interrogantes ¿En qué momento es conveniente agrupar a personas con estrategias similares? ¿Es conveniente conformar equipos en donde ningún miembro haya generado estrategias similares? ¿Qué efecto tiene lo anterior en la fase de formulación y validación en la generación de estrategias? Tener información sobre lo anterior podría ayudar en la toma de decisiones en función de los objetivos de una intervención cotidiana.

Así, la progresión de SA, SF y SV permitió estructurar la información construida por el profesorado. En la SA se generaron primeras "ideas" que al ser codificadas con la intención de comunicarse durante la SF pudieron ser esquematizadas. La SV exigía que dichos esquemas fueran presentados como conclusiones, por lo que generaron la necesidad de transitar a un lenguaje matemático más específico. Por ello, buscaron transformar esas "ideas" esquematizadas en una afirmación que pudiese interpretarse como un primer intento de conceptualizar dicha idea. De manera general, podemos apreciar que idealmente, dada la organización con base en la TSD, fue posible observar la evolución de la situación, a través del lenguaje matemático cada vez más formal a medida que transitaron de la SA a la SV.

En cuanto a las estrategias no exitosas

Posterior a la intervención se realizó un análisis de las estrategias no exitosas y exitosas reportadas, con el objetivo de encontrar puntos centrales que permitieron o impidieron la evolución de la situación.

En la estrategia mostrada en la figura 6, la división del trapecio isósceles en múltiples triángulos, la premisa consistió en dividir el rectángulo central en varios triángulos iguales al triángulo formado en las laterales (figura 10).

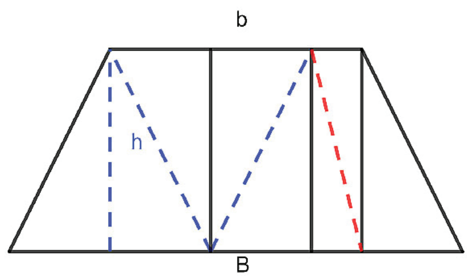


Figura 10. Trapecio isósceles dividido en múltiples triángulos.

La primera dificultad durante el desarrollo de esta estrategia fue: cómo saber el valor de la longitud de los triángulos con un área menor a la de los triángulos laterales. Para solventarla, se puede observar que las alturas de todos los triángulos es la misma. Esto genera que el área de los triángulos con área menor sea proporcional a la parte no entera de la división de b entre el valor del cateto del triángulo lateral $(\frac{B-b}{2})$. De tal manera que:

$$Área = \frac{b}{\frac{B-b}{2}} \cdot \frac{(B-b)h}{2} + \frac{B-b}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{B-b}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

En donde $\frac{b}{\frac{B-b}{2}}$ es la cantidad de triángulos con base igual al cateto del triángulo lateral que hay en el rectángulo central. Y $\frac{B-b}{2}$ es la medida del cateto del triángulo lateral. Al simplificar el primer término de la anterior expresión y luego sumar el segundo con el tercero:

$$\frac{b}{\frac{B-b}{2}} \cdot \frac{(B-b)h}{2} = \frac{2b}{B-b} \cdot \frac{(B-b)h}{2} = bh$$

$$\frac{B-b}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{B-b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{(B-b) \cdot h}{2}$$

Dado que el área total de los triángulos que caben en el rectángulo central debe ser igual al área de dicho rectángulo, este procedimiento nos lleva a un planteamiento similar que el encontrado en la estrategia exitosa mostrada en la figura 8. Por lo que este planteamiento genera un algoritmo válido para calcular el área de un trapecio isósceles.

$$Área = \frac{(B-b) \cdot h}{2} + (b \cdot h)$$

Entonces, la dificultad principal en el desarrollo de esta estrategia fue la visualización de que el área de los triángulos es proporcional a la base, dado que la altura era la misma para todos. Esto a su vez no permitió concretar un enunciado matemático que posibilitara la manipulación de elementos geométricos en un plano más abstracto.

En la segunda estrategia no exitosa (plantear la división del trapecio isósceles en tres triángulos mostrada en la figura 7), es posible que el lograr representar simbólicamente que las bases de los triángulos laterales pueden tener un valor de $\frac{B}{2}$, habría permitido plantear lo siguiente:

$$\frac{B}{2}(h)+\frac{(b)(h)}{2}+\frac{B}{2}(h)=Bh+\frac{bh}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}h(B+b)=\acute{A}rea\ del\ trapecio\ is\acute{o}sceles$$

Lo anterior implica un algoritmo válido para el cálculo del área del trapecio isósceles. En este caso el dibujo propuesto por el equipo, no fue suficiente para que lograran esquematizar la colocación del vértice de los triángulos a la mitad de B, lo cual podría haber facilitado la escritura de una expresión matemática manipulable.

Los equipos que propusieron estas estrategias no exitosas tuvieron dos dificultades, la primera, relativa a la visualización de relaciones geométricas para generar "ideas" en forma de esquemas y la segunda, con el tránsito de estas "ideas" a una formalización mediante lenguaje matemático. La primera puede estar interconectada a lo que Eschenburg (2022) denomina intuición geométrica, relacionada con percibir las formas espaciales presentes y sus relaciones explícitas e implícitas. Esta intuición geométrica, es parte de las razones por las que el estudio de la geometría es relevante en la educación primaria, ya que puede ser el punto de partida para manipulaciones cada vez más abstractas de los objetos geométricos, que debería ser considerado durante la formación del profesorado.

La segunda dificultad en términos de la TSD, podría implicar dificultades durante la situación de formulación, la cual hace referencia a intercambios de información codificada en algún lenguaje, en este caso lenguaje matemático. Es decir, aunque el profesor en formación tenía una cierta idea de cómo proceder, le fue difícil expresarla en lenguaje matemático de tal manera que le permitiera continuar interactuando con el medio. Se podría decir que estas dificultades no se manifiestan al entender y reconocer propiedades de las figuras, sino durante el proceso de concientización de las relaciones entre ellas y el lenguaje técnico que permita el afianzamiento de la deducción lógica.

En cuanto a las estrategias exitosas

La posibilidad de plantear una generalización permitió a la estrategia enmarcada en la figura 8 (cuadrilátero central más triángulos laterales) un mayor desarrollo. En concreto, la escritura de una igualdad que incluyera la base del triángulo lateral hizo posible la concreción de una fórmula propia que diera respuesta a la primera parte del problema. De aquí, podemos observar la importancia que tuvo sustituir las variables del problema por diversos valores, antes de percibir la generalidad de la igualdad. Estas múltiples sustituciones permitieron dar una fuerza intuitiva al razonamiento general, facilitando la escritura simbólica al encontrar un comportamiento constante en las operaciones numéricas.

Asimismo, como se previó durante el análisis del potencial a-didáctico inciso g), la estrategia de la figura 7, la construcción con los dos trapecios isósceles iguales fue aceptada inmediatamente. Esto posiblemente se deba a la potencia que tiene el trazo para la percepción de relaciones ocultas de figuras ideales como menciona Eschenburg (2022). En este caso la simpleza de la esquematización con el uso de líneas auxiliares, permite percibir una explicación intuitiva sobre la división entre dos y la multiplicación de h por la suma de B y b. De aquí es posible generar una restricción adicional a la situación, trabajar con un solo trapecio para que desde allí se deduzca la relación entre la fórmula encontrada de manera individual y la fórmula convencional.

CONCLUSIONES

Con base en este documento, puede observarse que las condiciones de análisis *a priori*, derivadas de la TSD, fueron fundamentales para la construcción de la situación didáctica, pues permitieron anticipar interacciones clave entre el profesorado en formación y el *milieu* diseñado. No obstante, el análisis mostró que también surgieron estrategias no previstas inicialmente, las cuales resultaron viables para la resolución del problema y evidencian la riqueza del proceso de adaptación independiente. Este hallazgo invita a matizar la condición g) de la TSD, según la cual dentro de las soluciones empíricas aceptables existe una que puede refutar cualquier objeción, ya que en la práctica parece más apropiado considerar que *al menos* puede emerger una estrategia con ese potencial. En este sentido, mientras la condición g) se fundamenta en la noción de adaptación óptima propuesta por Brousseau (2007), los resultados de esta investigación ponen de relieve que la diversidad de estrategias, incluso no anticipadas en el diseño, puede aportar vías legítimas de resolución y enriquecer el tránsito de las ideas a los conceptos matemáticos.

Por ejemplo, Skovsmose y Valero (2012) señalan que, en general y desde un punto de vista lógico, las ideas matemáticas poderosas, son aquellas que permiten resignificar conceptos previamente construidos, particularmente aquellas que pueden asociarse a la abstracción. En este sentido, los puntos medulares del desarrollo de la situación pueden entenderse en ese marco: I) el paso de un dibujo a una "prueba" –concebida, siguiendo a Eschenburg (2022), como una esquematización de estructuras ideales (fig. 2)–, y II) la transición de la "prueba" al lenguaje matemático. Esto implica, por un lado, la capacidad de generar y validar nuevas perspectivas de análisis a través de un esquema, y por otro, la posibilidad de plasmar dichas perspectivas en un lenguaje formal que permita su manipulación matemática.

En síntesis, el tránsito de las "ideas" a los conceptos mediante "pruebas" e interacciones puede leerse de manera complementaria desde ambos marcos: como construcción de ideas matemáticas poderosas (Skovsmose y Valero, 2012) y, como procesos de tratamiento y conversión entre registros semióticos (Duval, 2006). Esta doble lectura permite concluir que las "pruebas" no son simples recursos auxiliares, sino medios esenciales para establecer relaciones, generar nuevas perspectivas y facilitar el progreso del profesorado en formación en tareas geométricas cada vez más abstractas y significativas.

De esta manera, además de reconocer la relevancia de las representaciones y las interacciones en el tránsito de las "ideas" a los conceptos, se vuelve pertinente considerar que, tras una experiencia como la aquí descrita, resulta necesario promover una discusión con el profesorado en formación acerca de cómo la organización de la situación y las condiciones de análisis a priori contribuyeron a crear el marco para dicho tránsito en los casos exitosos. Al mismo tiempo, esta reflexión permitiría explorar cómo, en los casos donde las estrategias no prosperaron, la intervención del docente podría haber apoyado de manera más efectiva la construcción de vínculos entre las ideas iniciales y su formalización matemática. De este modo, el análisis evidencia que el diseño didáctico fundamentado en la TSD no solo anticipa posibles desarrollos, sino que también abre espacio a la emergencia de estrategias no previstas, las cuales constituyen oportunidades valiosas de aprendizaje.

REFERENCIAS

Angulo, V., Arteaga, V., y Carmenates, B. (2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática. *Revista Conrado, 16*(74), 298–305.

Artigue, M., Haspekian, M., y Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the Theory of Didactical Situations (TDS). En A. Bikner-Ahsbahs y S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 47–65). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_4

Baldor, J. (1983). *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural.

Brousseau, G. (2007*). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Zorzal.

Clements, D. H., y Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eschenburg, J.-H. (2022). *Geometry - intuition and concepts*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-38640-5

García, S., y López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Instituto nacional para la evaluación de la educación.

Gutiérrez, A. (1996). *Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework*. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20)* (Vol. 1, pp. 3–19). Universidad de Valencia.

Gutiérrez-Rubio, D., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., y Jiménez-Fanjul, N. (2018). Estudio de la percepción de la utilidad de la geometría en futuros profesores de educación primaria. En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 261-269). Universidad de Oviedo.

Hershkowitz, R. (1990). *Psychological aspects of learning geometry*. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70–95). Cambridge University Press.

Pasani, C. (2019). Analyzing elementary school student's geometry comprehension based on Van Hiele's theory. *Journal of Southwest Jiaotong University, 54*(5). https://doi.org/10.35741/issn.0258-2724.54.5.31

Skovsmose O. y Valero P. (2012). Acceso democrático a ideas matemáticas poderosas. En P. Valero, y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 25-61). Universidad de los Andes.

Autor de correspondencia
Ismael Cuevas-Morales,
Dirección postal: Av. Xalapa SN, Unidad Magisterial, 91017
Xalapa-Enríquez, Veracruz, México
ismaelbenv@gmail.com

 https://doi.org/10.24844/EM3703.10

Construcciones euclidianas con GeoGebra en tiempos de COVID-19: Reflexiones desde la experiencia

Euclidean constructions with GeoGebra in times of COVID-19: Reflections from experience.

Irene Victoria Sánchez Noroño[1]

Resumen: El manuscrito ofrece algunas reflexiones extraídas de la implementación de una actividad referida a construcciones euclidianas con GeoGebra durante la pandemia de COVID-19. Esta actividad se llevó a cabo como parte del curso de geometría dirigido a profesores en formación inicial de la carrera Pedagogía en Matemática y Física de una universidad del norte de Chile. El desarrollo de la actividad tuvo una duración de diez sesiones de trabajo, en las cuales la formadora y las y los profesores en formación inicial, laboraban juntos para responder a la tarea de construcción que se abordaba en cada sesión, brindando condiciones que permitían la movilización de saberes geométricos. En la sesión examinada, luego que se comunica el proceso de construcción, se analiza la consistencia geométrica del dibujo dinámico producido y su argumentación como respuesta a la tarea.

Palabras clave: *formación de profesores, profesores en formación, geometría, GeoGebra, construcción geométrica, COVID-19*

Fecha de recepción: 17 de mayo de 2024. **Fecha de aceptación:** 12 de agosto de 2025.

[1] Universidad Arturo Prat, Iquique-Casa central, Facultad de Ciencias Humanas, Carrera Pedagogía en Matemática y Física, irsanchez@unap.cl, https://orcid.org/0000-0001-9176-0125.

Abstract: In the manuscript, we offers some reflections taken from the implementation of an activity related to Euclidean constructions with GeoGebra during the COVID-19 pandemic. This activity was carried out as part of the geometry course aimed at pre-service teachers of the Mathematics and Physics Pedagogy degree at a university in northern Chile. The development of the activity lasted ten work sessions, in which the trainer and the pre-service teachers worked together to respond to the construction task addressed in each session, providing conditions that allowed the mobilization of geometric knowledge. In the session examined, after the construction process is communicated, the geometric consistency of the dynamic drawing produced and its argumentation as a response to the task are analyzed.

Keywords: *teacher training, teachers in training, geometry, GeoGebra, Geometric construction*

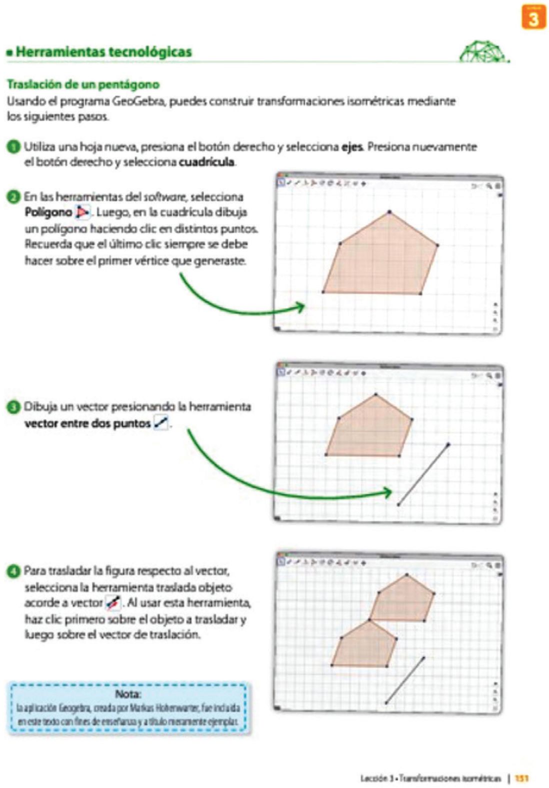
INTRODUCCIÓN

La formación de profesores de matemáticas es una práctica que se enfrenta a diversas tensiones como las institucionales, las académicas, las personales, las sociales, entre otras (Da Ponte, 2012; Llinares, 2021). En este contexto las y los formadores de profesores de matemáticas tienen el deber –moral– de cumplir tres roles inherentes a su propia práctica, como son: (i) formadores, (ii) investigadores y (iii) diseñadores de tareas y formas de usarlas en los programas de formación. La confluencia de estos roles, puede permitir que las y los formadores reflexionen sobre su propia práctica identificando oportunidades de aprendizaje que conlleven a potenciar la formación de las y los futuros profesores de matemáticas. Una articulación efectiva de los roles posibilita escenarios beneficiosos donde el diseño, ejecución y análisis de una tarea y/o actividad, deriven en productos que merecen ser compartidos con otros actores del campo de la Educación Matemática.

Para ello, el/la formador/a en su rol de diseñador, debe considerar ciertos principios teóricos, metodológicos y el *saber* que será movilizado, en términos de la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2015, 2016, 2017a, 2017b) para la actividad. Adicional a lo anterior, es relevante que responda a las necesidades formativas de las y los profesores de matemáticas (Cameron *et al.*, 2013; Goos, 2013; Ribeiro y Da Ponte, 2019; Towers, 2010). En particular, en la experiencia que se comparte en este manuscrito, los principios teóricos y metodológicos provienen de la TO y el saber es de tipo geométrico (Sánchez Noroño y Prieto-G., 2022). El saber geométrico, al igual que otro saber, ha sido transformado, modificado y desarrollado a lo largo del tiempo según las demandas históricas y culturales. Para recordar un poco, en el antiguo Egipto el trabajo geométrico estuvo vinculado a la medición de terrenos, debido a las inundaciones del rio Nilo, lo cual se asentó como geometría práctica. Con el paso del tiempo, las demandas sociales y culturales hicieron que el trabajo geométrico evolucionara y estableciese dos formas válidas, que continúan vigentes, para su movilización, estas son: el modelo axiomático y las construcciones geométricas, cuyos fundamentos se encuentran en la obra *Elementos* producida por Euclides.

Estas construcciones geométricas, que demandan el uso de regla y compás (R y C), asumidos como artefactos propios de la actividad, para movilizar y materializar el saber geométrico, en este manuscrito las llamamos *construcciones euclidianas*. Una situación inevitable con los artefactos es su evolución, en función de los requerimientos y avances sociales, lo cual deriva en modificaciones en las actividades que los utilizan. Tal es el caso de las construcciones euclidianas, que utilizan R y C, con la llegada de los softwares de geometría dinámica (SGD), que muestran formas novedosas y potentes para el trabajo geométrico. Un SGD, ampliamente utilizado para las actividades de enseñanza-aprendizaje de la geometría es el GeoGebra, el cual presenta a través de herramientas y funciones el saber geométrico.

En la actualidad, el GeoGebra es sugerido en algunos textos escolares, por ejemplo, en Chile los textos oficiales que entrega el Ministerio de Educación proponen el uso del GeoGebra en el eje de Geometría (figura 1). Es notorio que el trabajo con el software no transciende de la mera aplicación de la(s) herramienta(s). Es por ello que, desde la formación inicial de profesores de matemáticas, debe promoverse el uso de la tecnología digital (TD) para la enseñanza y el aprendizaje. La demanda de fomentar el uso de la TD, no es de reciente data (Rojano, 2014), y en particular el trabajo geométrico con TD, continúa siendo deficiente a pesar de que las instituciones educativas cuenten con las condiciones para su implementación, las y los profesores prefieren no utilizar TD (Acosta Gempeler, 2007; Acosta Gempeler y Fiallo Leal, 2017). Entre las razones por las cuales un profesor o profesora decide no emplear TD, aunque reconocen sus beneficios, se debe a que no saben cómo ni cuándo usarlos (Corrales-Jaar, 2021).



3

Herramientas tecnológicas

Traslación de un pentágono

Usando el programa GeoGebra, puedes construir transformaciones isométricas mediante los siguientes pasos.

1. Utiliza una hoja nueva, presiona el botón derecho y selecciona **ejes**. Presiona nuevamente el botón derecho y selecciona **cuadrícula**.
2. En las herramientas del software, selecciona **Polígono**. Luego, en la cuadrícula dibuja un polígono haciendo clic en distintos puntos. Recuerda que el último clic siempre se debe hacer sobre el primer vértice que generaste.
3. Dibuja un vector presionando la herramienta **vector entre dos puntos**.
4. Para trasladar la figura respecto al vector, selecciona la herramienta traslada objeto acorde a vector. Al usar esta herramienta, haz clic primero sobre el objeto a trasladar y luego sobre el vector de traslación.

Nota:
La aplicación Geogebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

Lección 3 • Transformaciones isométricas | 151

Figura 1: Sugerencia del uso de GeoGebra, p. 181.
Fuente: Texto de Matemática Nivel 8vo Básico.

Lo anteriormente descrito, invita a las y los formadores a fomentar experiencias de aprendizaje que puedan dar cuenta del uso de la TD para el aprendizaje de la geometría. En pro de contribuir con las reflexiones en torno a las implicaciones de utilizar GeoGebra para el aprendizaje de la geometría, en el presente manuscrito se comentan algunas reflexiones de la implementación de una actividad de enseñanza-aprendizaje de construcciones euclidianas con GeoGebra, con profesores de matemática en formación inicial, reportada en Sánchez Noroño y Prieto-G. (2022). Una particularidad de la experiencia es que fue desarrollada en el periodo de la pandemia, donde las sesiones de trabajo fueron realizadas en contextos de enseñanza remota de emergencia (Borgobello y Espinosa, 2020).

CONSTRUCCIONES EUCLIDIANAS CON GEOGEBRA. UNA PERSPECTIVA EVOLUTIVA E HISTÓRICO-CULTURAL

La geometría, en su devenir histórico, ha estado ligada a la dinámica de las actividades humanas, sociales y culturales. En cada una de estas esferas, se han empleado artefactos (ya sean materiales o simbólicos) que se vinculan con las experiencias individuales y grupales. Estos artefactos varían en su nivel de sofisticación y han sido utilizados de acuerdo a sus necesidades (Camargo y Acosta, 2012). En las experiencias humanas que han utilizado geometría para dar respuesta a situaciones puntuales o generales, es posible reconocer dos formas utilizadas, por un lado, la práctica vinculada a la solución de las necesidades del mundo y la cotidianidad. Para este propósito, los métodos empíricos y los algoritmos fueron la base esencial. Y, por otro lado, la teórica, donde los pensadores y sabios de la antigüedad se dedicaban a reflexionar sobre la abstracción de la geometría y los posibles aportes que podrían realizar (Sánchez-B, 2012).

Los saberes de origen práctico y concreto fueron pasando de cultura en cultura, de los babilonios a los egipcios, hasta llegar a la cultura griega (siglo VI al III a.n.e.), considerada la época dorada de la geometría. En ese momento de la historia, Euclides recopila los saberes que habían sido producidos meticulosamente por las culturas anteriores y los organiza en su famosa obra *Elementos*, cimentando en ella las bases de la geometría como disciplina científica, separándola definitivamente de la forma práctica. Esta obra fue considerada como una guía de enseñanza de la geometría durante aproximadamente dos milenios (Sánchez-B, 2012). Un rasgo bastante distintivo de los Elementos es su organización, en ella, se proponen dos tipos de problemas (demostraciones y construcciones con R y C), para el estudio de la geometría, a partir de los cuales se instaura el método axiomático y/o pensamiento hipotético-deductivo conocido hoy en día.

En los problemas de construcción propuestos en los *Elementos*, es posible diferenciar tres partes. La primera es el "enunciado" del problema, y "explicación" de la proposición, en la cual presenta el objeto geométrico demandado y el objeto dado para ello (hipótesis y tesis). La segunda parte, denominada "operación", abarca la solución del problema, es decir, la construcción del objeto geométrico que se demanda. Y, la tercera parte, llamada "demostración", consiste en–el discurso oral o escrito con– la argumentación que justifica la validez del objeto construido (Sánchez Noroño y Prieto-G., 2022). En estos tipos de problemas, el uso de artefactos como la regla (sin marcas) y el compás euclídeo (colapsable) fueron fundamentales, ya que permitían visualizar de forma tangible las ideas abstractas de recta y círculo, dado que portaban su conceptualización. Permitiendo a los geómetras griegos trazar segmentos −de recta− a partir de dos puntos cualesquiera con la regla, y círculos dado su centro y un radio con el compás colapsable, el cual se cerraba automáticamente al despegarse de la superficie (Euclides, 1991; Simson, 1774; Tosca, 1707).

Una cualidad que han tenido los artefactos (R y C), es su leve evolución, por ejemplo, el compás euclídeo o colapsable, refinó su diseño integrando una característica como el ajuste y mantener su abertura. Pero la llegada de la TD a la educación matemática permitió el fomento de formas novedosas para acercase a los saberes geométricos, derivando en la demanda de cambios sustanciales de la actividad de enseñanza-aprendizaje (en algunos de sus aspectos) de las construcciones euclideanas. Algunas de las trasformaciones que ha experimentado la geometría euclidiana, se deben al uso de los SGD en el aula (Artigue, 2002, 2012; Laborde, 1997). Un SGD es un artefacto semiótico que muestra su potencial en la forma como este permite diferenciar entre objeto geométrico (representado) y dibujo (representante), mediante la manipulación directa que se puede hacer sobre el dibujo, lo que permite comprobar que las invariantes geométricas se conservan (Sandoval Cáceres y Moreno-Armella, 2012). Cuando ello ocurre, se está en presencia de un dibujo dinámico.

Al emplear un SGD, los usuarios pueden pensar y actuar en términos geométricos según la configuración del software, lo que conlleva una lógica de funcionamiento específica para cada software. Además, el SGD fomenta interacciones humanas que influyen en los modos y formas de producción (Radford, 2017a, 2017b, 2023a). Específicamente, el GeoGebra, un tipo de SGD, ofrece herramientas y funciones que permiten al usuario pensar en términos geométricos, encapsulando el contenido conceptual (Sánchez y Prieto, 2019). Para que el saber geométrico sea evidente, es necesario incorporar el GeoGebra a una actividad que permita movilizar dichas conceptualizaciones.

CONSTRUCCIONES EUCLIDEANAS CON GEOGEBRA. UNA ACTIVIDAD CONTEMPORÁNEA NECESARIA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

El presente trabajo se enmarca en una teoría contemporánea histórico-cultural de la Educación Matemática, conocida como la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2016, 2023b, 2023a). La TO inicia formalizando el concepto de aprendizaje, entendido como el encuentro progresivo de los individuos con el saber histórico y cultural, a su vez plantea que el aprendizaje no se limita a la esfera del saber; por su parte, considera la formación del ser, como ejes que se nutren (Radford y Empaey, 2017). Para que los saberes se movilicen y puedan ser objeto de conciencia para el individuo, debe movilizarse en una actividad. La actividad, en la TO, se conceptualiza como labor conjunta, para diferenciar esta categoría humana de otras de tipo funcional y técnicas que se limitan a un conjunto de acciones para el logro de un objetivo (Radford, 2023a). De esta manera, la labor conjunta es definida como "una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una búsqueda común –es decir una búsqueda con otros– de la solución a un problema planteado, búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética" (Radford, 2017a, p. 15). De esta manera, se asume el encuentro que tienen formadores y profesores de matemática en formación inicial cuando resuelven problemas de construcciones euclidianas con GeoGebra como una labor conjunta.

El GeoGebra, como se mencionó, expone el contenido conceptual mediante herramientas y funcionalidades que encarnan conceptos inherentes a la geometría (construidos a lo largo de la historia). Además, proporciona al usuario un sistema de representación y un ámbito de exploración que enriquecen la actividad y que son poco viables en medios estáticos como el papel y lápiz (P y L) (Sandoval-C y Moreno-Armella, 2012). Una característica distintiva de este software está en mantener en las representaciones de los objetos geométricos, sus propiedades y/o invariantes geométricas incluso al intentar deformarlos mediante el arrastre (Laborde, 1997). Esto posibilita que la percepción dinámica que adquiere un estudiante al realizar construcciones difiera de la obtenida con otras realizadas en P y L. Estas potencialidades, quizás, lo llevaron a convertirse en el software más utilizado entre los años 2011 y 2022, para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en los niveles de media y superior (Morales Chicana *et al.*, 2023).

Por ejemplo, consideremos la tarea de dibujar una recta en el GeoGebra. Para ello, el primer paso consiste en seleccionar la herramienta adecuada que permita llevar a cabo la construcción. En este caso, la herramienta *recta* se presenta como la opción ideal, guiando al usuario sobre cómo construir esta figura al solicitar los puntos (creados o no) por los cuales la recta debe pasar (figura 2). Además, cada herramienta y funcionalidad del GeoGebra sigue una lógica operativa particular, requiriendo que el usuario proporcione ciertas condiciones al software. Estas condiciones, como enfatizan Sandoval y Moreno-Armella (2012), no son neutrales ni simples, sino que constituyen una parte esencial de los saberes matemáticos incorporados en los artefactos.

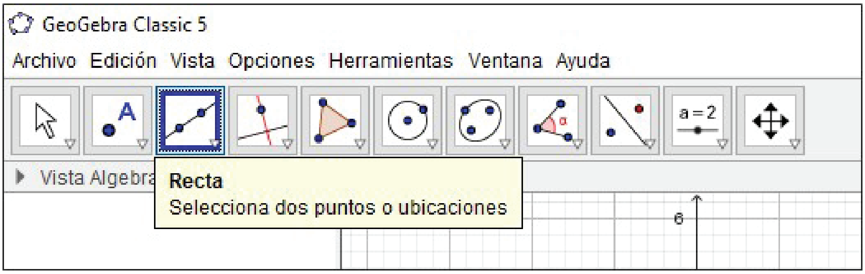


Figura 2. Conceptualización de la recta mediante la herramienta correspondiente.

CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA

La experiencia que se comenta en el manuscrito se realizó durante la pandemia de Covid-19 (Cucinotta y Vanelli, 2020), en el marco del desarrollo de la Actividad Curricular (A.C.) Geometría (semestre 1) de la carrera de Pedagogía en Matemática y Física. Esta asignatura se desarrolló completamente en modalidad remota, mediante la utilización de la plataforma proporcionada por la Universidad para tal fin. La información fue recolectada por medio de:

- Videograbaciones: provienen de las grabaciones en formato audiovisual de todas las sesiones de trabajo, previa obtención del consentimiento de las y los profesores en formación inicial. Es fundamental destacar que los nombres utilizados son seudónimos asignados para preservar la identidad de los sujetos.
- Informes: corresponden a los documentos entregados por las y los profesores en formación inicial, donde debían (i) comunicar el proceso de

construcción llevado a cabo y (ii) respaldar la argumentación de su validez y coherencia respecto al dibujo dinámico generado, para cada tarea de construcción.
- Archivos .ggb: para cada tarea de construcción se entregaba una hoja de trabajo en formato .ggb, el cual debían retornar con el dibujo dinámico realizado como respuesta.

En las sesiones, las y los profesores en formación inicial mantenían su cámara apagada (aceptado por la normativa de la Universidad), lo cual impedía acceder a otro tipo de registros como los semióticos (y particularmente los gestos), para el análisis. Es importante destacar que no todos se conectaban a las sesiones desde un computador, una parte del grupo, lo hacía desde su teléfono celular. Esto derivó en una disminución de la visibilidad de los rótulos de los objetos geométricos de la interfaz del GeoGebra, por una parte del grupo, por lo cual, la formadora asignó colores a los objetos. Dicho contexto virtual implicó que la voz fuese fundamental para expresar los procesos realizados dentro de sus posibilidades, y para subsanar las limitaciones ofrecidas por los mecanismos y dispositivos del momento. Aunado a lo anterior, el cursor del mouse en pantalla, proporcionó la posibilidad de señalar, emular formas, y otros, al funcionar como una extensión del cuerpo.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

La actividad se desarrolló en 10 sesiones de trabajo, respondiendo al diseño reportado en Sánchez Noroño y Prieto-G. (2022). Para la actividad la formadora hizo entrega a las y los profesores en formación inicial de un documento con las orientaciones de las tareas de construcción y un archivo .ggb (hoja de trabajo) por cada tarea de construcción con las condiciones iniciales. El desarrollo de la actividad se organizó en tres etapas. En la primera, la formadora entregó las orientaciones y las hojas de trabajo a las y los profesores en formación inicial, indicando las tareas que debían ser atendidas en la sesión, enfatizando que debían entregar (i) la hoja de trabajo con el dibujo dinámico que daba respuesta a la tarea y (ii) un documento que comunicara el proceso de construcción realizado para dar respuesta a la tarea de construcción y la justificación que el dibujo dinámico responde a la tarea. En la segunda, se realizó la puesta en común de la respuesta de la tarea, considerando un caso para ello, un análisis conjunto de la consistencia geométrica del dibujo, proceso y justificación, permitiendo a las y los profesores en formación inicial realizar una evaluación de la respuesta producida por ellos, y la de sus pares, aportando ideas en el proceso. En la tercera, las y los profesores en formación inicial tuvieron la oportunidad de refinar sus respuestas para la entrega final. Para ello, agregaron un texto con los cambios realizados comentando cómo la puesta en común permitió potenciar su respuesta.

REFLEXIONES ACERCA DEL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD: DISCUSIONES Y ANÁLISIS

La sesión de trabajo que se comenta en el manuscrito, es la cuarta. En esta se realiza la puesta en común de dos tareas de construcción atendidas por las y los profesores en formación inicial (segunda etapa). En la sesión, es posible identificar cuatro momentos: en el primero, se realiza la evaluación de la respuesta de Darío, para ello, se analiza la consistencia geométrica; en el segundo, se construye el dibujo dinámico de la tarea analizada en conjunto; en el tercero, se dialoga en torno a la justificación de la respuesta de la tarea; y en el cuarto momento, la formadora realiza un recuento de la sesión de trabajo. Las reflexiones se organizan en dos apartados, el primero presenta una combinación de factores y circunstancias vinculadas a comprobar la consistencia geométrica del dibujo dinámico y la argumentación del dibujo dinámico. Y el segundo, un análisis de la consistencia geométrica.

La tarea de construcción que se aborda para la puesta en común en la sesión de trabajo consiste en dividir en dos partes iguales un ángulo dado. Para resolver la tarea, se hace entrega de la hoja de trabajo (figura 3-a) en la cual las y los profesores en formación inicial encuentran las condiciones iniciales para atender a la tarea como se mencionó. Una característica particular que tiene la tarea es la presencia de un deslizador de ángulo el cual permite modificar el ángulo en $P(\beta)$. Este se construye para acotar y modificar el valor del ángulo entre 0^{o} y 180^{o}, siendo esta la única forma de modificarlo (figura 3-b).

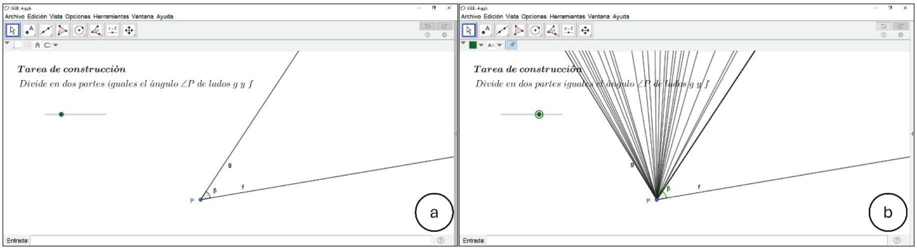


Figura 3. Hoja de trabajo de la tarea.

COMPROBAR LA CONSISTENCIA GEOMÉTRICA DEL DIBUJO DINÁMICO

En la sesión, la formadora inicia compartiendo en pantalla con las y los profesores en formación inicial, donde se muestra un archivo .ggb con la respuesta producida por Darío, a quien la formadora solicita comunique a sus pares el proceso de construcción que realizó. La formadora, para contribuir con la fluidez de la comunicación y atención de los objetos geométricos, les designa colores, principalmente porque algunos de los profesores en formación inicial utilizaron su teléfono celular para las aulas (sesión) y manifestaron poca visibilidad de los rótulos dado el tamaño de sus pantallas. En el diálogo, Darío da indicios de no recordar, pero luego comunica lo solicitado, sin realizar referencia a comprobar la consistencia del dibujo.

Formadora: Hola, ¿cómo éstas? Vamos a ver Darío. Aquí está tu tarea de construcción [puesta en la pantalla]. Darío ¿en qué consistía la tarea?

Darío: Eeee (exclamación que se emplea cuando se intenta recordar algo). En tener que dividir en dos partes igual[es] el ángulo.

Formadora: Muy bien, ¿cómo lo hiciste?

Darío: Primero hice la circunferencia [c, con centro] en el punto P, y donde, de cualquier tipo de radio y donde interceptará, ..., con la recta que va en el ángulo [g y f] (lados del ángulo), ahí [en los puntos de intercección B y D] volví hacer otras circunferencias, ahí se ven [en la interfaz] la [circunferencia e, en tono] azul y la [circunferencia d, en tono] morado, esas son las otras dos circunferencias que hice en la intersección de la primera [la circunferencia c]. Y en tanto la circunferencia [e, en tono] azul, como la [circunferencia d, en tono] morado, ahí se crea una intersección [dando lugar al punto G], y ahí trazo una recta [que pasa por los puntos P y G] que determina cuál es laaaa [recta], para que se divida en partes iguales en ángulo.

Darío al comunicar su proceso de construcción lo realiza con la secuencialidad en que los objetos fueron construidos. El joven expresa un proceso detallado, aludiendo a cada objeto geométrico, por su tonalidad, esto quizás debido a que la formadora le otorgó colores a los objetos geométricos, ya que algunos de sus compañeros manifestaron que no eran visibles para ellos los rótulos, llevando a que no comprendieran el discurso y la coherencia entre la explicación y el dibujo producido. Durante la comunicación de Darío la formadora apoyó señalando los objetos geométricos en pantalla con el cursor en forma rítmica (figura 4). El profesor en formación inicial omite algunos objetos geométricos que están en la interfaz construidos.

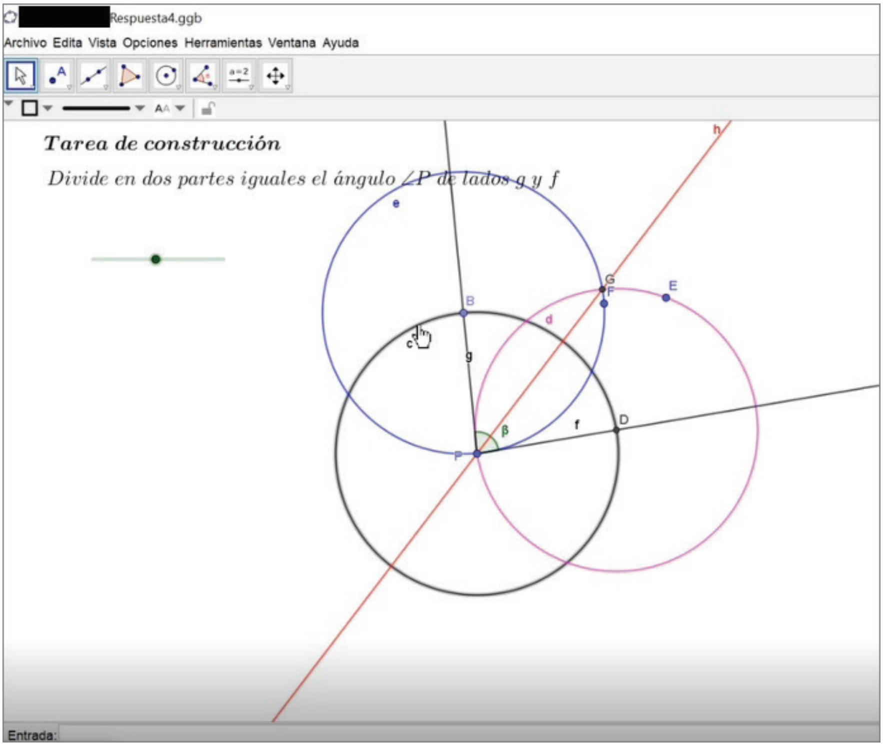


Figura 4. Sincronía entre discurso y cursor.

Formadora: (...) OK. Lo primero, ¿cuál es la primera acción que debemos realizar una vez que hacemos la construcción? (...) ¿Qué debo hacer una vez que tengo la construcción lista?

Martha: Eee (pensando lo que va a decir a continuación), si está correcto que cumple con los criterios que no se deforma.

Formadora: Aja, que no se deforme, (...). Tú dices para que no se deforme. En otras palabras, ¿puedo decir que la construcción es consistente? ¿Qué significa que una construcción es consistente?

Martha: Este, eeee, aaaaa, (risa), sabe, los tengo en mi cabeza, pero no sé cómo explicarlo.

Formadora: ¿Qué no debe pasar? Explícamelo así.

Martha: Lo que no tiene que pasar, es que no sé, es que al momento de abrir y cerrar un poco más el ángulo las circunferencias se..., una se vaya para allá, otra para allá, es decir las intersecciones [se] muevan, cosas así.

La formadora hace propicio el momento para pasar a la comprobación de la consistencia geométrica del dibujo dinámico realizado por Darío. En ese instante interviene Martha para intentar explicar qué es la consistencia geométrica, al indicar que el dibujo no debe deformarse. Dado que su intervención no fue muy clara, para ayudar a Martha la formadora plantea una pregunta puntual, ya que la joven manifiesta que no puede comunicar con claridad sus ideas, brindando como respuesta aquello que no debería ocurrir con el dibujo dinámico, aludiendo a que las invariantes geométricas deberían mantenerse al momento de modificar el valor del ángulo.

Formadora: [risa] Entonces cuando yo compruebo o intento comprobar que mi construcción es consistente o como decía Martha, muy bien, que no se deforma. (...). Yo les coloqué que es este deslizador que ven acá [mueve el cursor sobre la interfaz] que está en tono verde. Y yo lo voy a mover, al moverlo [la recta] h debe mantenerse [bisecando al ángulo]. ¿¡Qué está pasando allí!?

Victoria: Se está deformando porque crece un solo círculo y deberían crecer los dos al abrir o cerrar el ángulo.

Martha: Porque si yo abro más, el ángulo todo debería moverse [la recta h], en el sentido que se abre o se cierra.

Formadora: Siii, pero fíjense lo que está pasando aquí [moviendo el deslizador que permite realizar el barrido de un ángulo de 0° a 180°], en este punto (deslizador en una posición que permite trabajar con un ángulo obtuso) ¿la recta h sigue bisecando al ángulo? (...) ¿iqué está pasando ahí!?

Martha: Se pierde la recta.

La formadora, utiliza el deslizador modificando el valor del ángulo en un barrido entre 0° y 180° (figura 4a), para comprobar la consistencia geométrica del dibujo dinámico, formulando una pregunta que invita a las y los profesores en formación inicial a dialogar. La primera que interviene es Victoria, quien afirma que la construcción se deforma, argumentando que solo uno de los objetos (círculo) se modifica con el valor del ángulo, y el otro (círculo) no. La segunda en intervenir es Martha, expresando que al modificar el valor del ángulo la recta que lo biseca debería mantener su relación geométrica (bisecar el ángulo). La formadora para finalizar con la comprobación de la consistencia del dibujo dinámico, muestra en pantalla lo que ocurre con el dibujo cuando el ángulo es agudo (figura 4c) u obtuso (figura 4b) consultando por lo que pasaba con la construcción. Martha interviene para indicar que la recta desaparece.

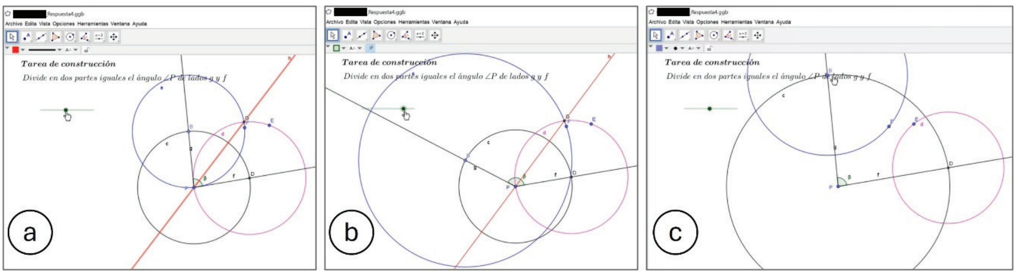


Figura 4: Modificación del ángulo.

Formadora: Muy bien, ¿cómo comprobaste que esta construcción responde a la demanda de la pregunta?

Darío: Primero yo lo hice porque así me acordaba que se hacía y creo que está correcto porque todos los radios [de las circunferencias] son iguales. Desde el punto P al punto B, y desde el punto D al punto G.

Formadora: ¿Cómo compruebas o justificas que efectivamente esa recta que trazaste y que está en color rojo, y se llama h divide en dos partes iguales al ángulo en P?

Darío: Bueno, esa era mi justificación la de los radios.

Darío: Que todos los radios son iguales, esa era mi justificación la que dije recién. No sé cuál podía ser la correcta.

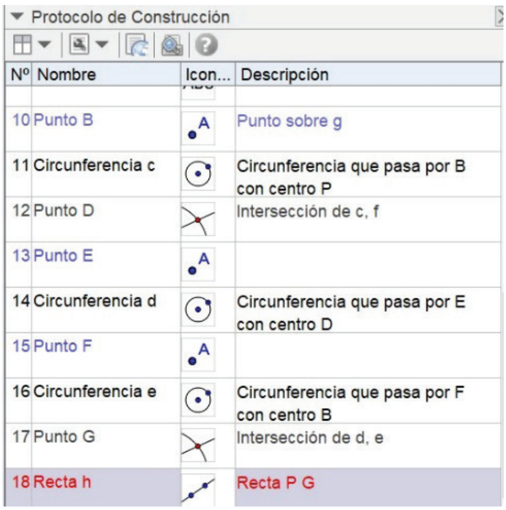
La formadora preguntó a Darío por la argumentación que da validez a su dibujo dinámico. El joven, responde que realizó la construcción como lo recordaba, es decir, la tarea presentada (o una similar) no eran nuevas para el joven. A lo anterior, añade que es correcto porque los radios de las circunferencias $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{d}$ son iguales. La formadora parece no comprender lo comunicado por Darío y refina su pregunta, a lo que Darío le afirma que su justificación se sustenta en el valor de los radios de las circunferencias, mencionando que desconoce cuál podía ser la correcta.

ANÁLISIS DE LA CONSISTENCIA GEOMÉTRICA DEL DIBUJO DINÁMICO

El proceso seguido por Darío para construir el dibujo dinámico (representante), resulta inconsistente cuando se realiza la prueba de arrastre, debido a que no conserva las invariantes geométricas en el GeoGebra. Sin embargo, al detallar el proceso que el joven realiza, el objeto geométrico (representado) es adecuado. Un aspecto que parece emerger es que Darío realizó una transferencia del proceso de construcción con otros artefactos, como la R y C, para dar respuesta a la tarea en el GeoGebra. Sin considerar que el GeoGebra por su configuración y potencial demanda que los objetos geométricos construidos conserven la relación entre ellos. Es posible que Darío desconocía cómo establecer dicha relación o no le dio atención.

El GeoGebra posee una función de *Protocolo de Construcción*, la cual entrega información de la secuencia de los objetos construidos, y brinda al usuario la posibilidad de recrearlos. El protocolo muestra la información al usuario por medio de columnas y filas. En las columnas, la información está asociada a los objetos construidos como: el nombre del objeto geométrico, la herramienta utilizada, descripción del objeto construido y los elementos de construcción (puntos, distancias u otros). Las columnas, indican el orden en que fueron construidos los objetos geométricos.

El protocolo de construcción de dibujo del dinámico realizado por Darío (figura 5), ayuda a comprender qué causa la inconsistencia geométrica ya que su descripción verbal del proceso seguido es adecuada. Al detallar la secuencia, se observa que el punto B pertenece al lado g del ángulo β, lado que por las condiciones establecidas en la hoja de trabajo tiene movimiento. El punto B, puede moverse sobre g, posteriormente es utilizado como centro de la circunferencia e, lo que produce que esta modifique su tamaño al variar el valor del ángulo en P.


Protocolo de Construcción

Nº	Nombre	Icon...	Descripción
10	Punto B		Punto sobre g
11	Circunferencia c		Circunferencia que pasa por B con centro P
12	Punto D		Intersección de c, f
13	Punto E		
14	Circunferencia d		Circunferencia que pasa por E con centro D
15	Punto F		
16	Circunferencia e		Circunferencia que pasa por F con centro B
17	Punto G		Intersección de d, e
18	Recta h		Recta P G

Figura 5: Protocolo de construcción del dibujo dinámico producido por Darío.

Adicional, las circunferencias e y d, pasan por puntos libres (E y F), es decir puntos realizados por percepción visual o que posteriormente de su construcción fueron ajustados al tamaño deseado. Las circunferencias e y d, luego se interceptan determinando el punto G, por donde pasa la bisectriz del ángulo (recta h). La forma de proceder pone de manifiesto lo comentado anteriormente, sobre la poca comprensión del GeoGebra para producir un dibujo dinámico y la conservación de las invariantes geométricas en cada objeto geométrico construido.

Al contrastar el proceso comunicado por Darío con el protocolo de construcción, se observó que el joven omite el valor del radio de las circunferencias e y d. La circunferencia d, tiene centro en D y pasa por el punto E. que es un punto libre. Es posible que Darío al utilizar la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*, por percepción visual, concibió que la circunferencia pasaba por el punto P, haciendo un clic sobre la interfaz, dando lugar al punto E. Dicho procedimiento lo repitió con la circunferencia e, dando lugar al punto F (un punto libre), lo cual derivó en un dibujo dinámico inconsistente ya que las circunferencias e y d no guardaban relación con otros objetos. Cuando se realiza un dibujo dinámico, las invariantes geométricas se otorgan durante la construcción de todos los objetos, procurando que sean dependientes entre sí y cumplan la propiedad geométrica demandada, en el caso de la producción.

REFLEXIONES FINALES

En la experiencia reportada se presentan algunas situaciones que merecen colocar en debate con otros trabajos, y también otorgarles sentido. La formadora y las y los profesores en formación inicial se involucraron en el análisis y resolución de una forma cultural de acción y reflexión sobre las construcciones euclidianas con GeoGebra. En el devenir de la sesión que se analiza, la formadora, luego de que el profesor en formación inicial comunica el procedimiento seguido, promueve su discusión y se realiza la prueba de arrastre (comprobar la inconsistencia geométrica). Seguido, no se produce un diálogo orientado a explorar qué causó la inconsistencia, es decir, adoleció de tiempo dedicado a desentrañar las razones que originaron la inconsistencia, si fue de tipo conceptual o del uso del artefacto.

En ese instante se puede pensar que el artefacto no fue suficiente para ayudar a las y los profesores en formación inicial a revelar la razón de la inconsistencia. El uso del GeoGebra se distanció de la posibilidad de desplegar el contenido conceptual geométrico. La ausencia de un diálogo reflexivo que permitiera comprender hasta qué parte de la secuencia realizada fue geométricamente correcto, cuál fue el momento de inflexión que termina causando las invariantes geométricas en el dibujo dinámico producido, porqué deja de funcionar el proceso en el GeoGebra y cómo las potencialidades del software pueden contribuir en la movilización del saber geométrico en escena.

Un diálogo orientado a la diferencia entre objeto y representante pudo ser interesante para comprender a lo menos una causa de la inconsistencia. El GeoGebra permite establecer relaciones dinámicas entre objetos geométricos, tal como señalan Sandoval-C y Moreno-Armella (2012), representa una ventaja significativa frente al uso del P y L. Dado que permite a los usuarios que manipulen y exploren las construcciones de forma interactiva, facilitando la visualización de propiedades (invariantes geométricas). Es posible, que en el caso de Darío, ocurrió una trasferencia hacia el GeoGebra del proceso que suele llevarse en P y L para tareas de construcción; lo cual da indicios de los desafíos. A su vez, permite comprender la complejidad de introducir un SGD como el GeoGebra, para la resolución de tareas de construcción y la necesidad de diálogos más profundos sobre sus implicaciones.

La experiencia proporcionada a los profesores en formación inicial al realizar construcciones euclidianas con GeoGebra, muestra un espacio de trabajo geométrico que expone riqueza de los entornos dinámicos mediante la experimentación y/o ejecutabilidad de los objetos geométricos, a su vez asigna la cualidad de poder corroborar las relaciones establecidas (consistencia), mediante la prueba de arrastre. El software proporciona herramientas para llegar a conocer el objeto o relación geométrica que se trabaja, al momento de realizar una construcción fundamentada en las propiedades geométricas estructurales. Tal cualidad resulta más compleja en un entorno de P y L.

El contexto de la pandemia, fue relevante al momento de realizar la sesión, ya que, desde una perspectiva histórico-cultural, el aprendizaje es un encuentro con el saber, en el marco de un trabajo colectivo sensible de pensamiento y acciones realizadas por el cuerpo (signos, gestos, táctil, kinestésica y otros), los artefactos y el habla entrelazados. Durante el encuentro en modalidad virtual, no fue posible acceder a todas las posibilidades materiales y cognitivas que ofrecen los individuos. Solo se tuvo como registro el habla, y una combinación de lo kinestésico y gestual, emulado por el cursor del mouse en pantalla, principalmente por parte de la formadora. Dicha ausencia, eventualmente implicó la forma de hacer/reflexionar de la formadora al momento del análisis de la resolución de la tarea.

Para cerrar, es importante que se formulen actividades que puedan permitir hacer objeto de conciencia los saberes geométricos, en particular las construcciones euclidianas, que siempre se han considerado un contenido difícil por la necesidad de integrar diferentes ideas de la geometría (González-C., 2014). Así mismo, es imperativo que las actividades destinadas a la enseñanza-aprendizaje de la Geometría involucren más verbos que impliquen conjeturar y validar (Muñoz-Escolano, 2016). Aunado a lo anterior, la necesidad de indagar la toma de decisión en tiempo real de las y los formadores de profesores.

RECONOCIMIENTO

"Financiado por el Fondo de Adquisición de bienes y equipamiento menor, para proyectos de investigación educativa, 2023". Proyecto "Fortalecimiento de la investigación y la formación avanzada en Educación en el sistema de Universidades Estatales" RED 21995, PFUE 2021".

REFERENCIAS

Acosta Gempeler, M. E. (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Higueras, A. Castro, y García.F. (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 85–100). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Acosta Gempeler, M. E., y Fiallo Leal, J. E. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://doi.org/10.14483/9789585434462

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Artigue, M. (2012). Mathematics education and literacy. En M. Artigue (Ed.), *Challenges in basic mathematics education* (pp. 13–18). UNESCO. https://doi.org/10.1080/14794802.2011.585835

Borgobello, A., y Espinosa, A. (2020). Enseñanza remota de emergencia: crisis, procesos y cambios en la educación superior. En F. Costa, y S. Garo (Comp.) *Notas de pandemia. Reflexiones, lecturas y experiencias escritas en tiempos de aislamiento social y virtualidad*. UNR Editora.

Camargo, L., y Acosta Gempeler, M. E. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *32*, 4–8. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1865

Cameron, S., Mulholland, J., y Branson, C. (2013). Professional learning in the lives of teachers: towards a new framework for conceptualising teacher learning. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, *41*(4), 377–397. https://doi.org/10.1080/1359866X.2013.838620

Corrales-Jaar, J. (2021). Revisión actualizada: enseñanza de las matemáticas desde los entornos virtuales de aprendizaje. *Ciencia y Educación*, *5*(2), 25–40. https://doi.org/10.22206/cyed.2021.v5i2.pp25-40

Cucinotta, D., y Vanelli, M. (2020). WHO Declares COVID-19 a Pandemic. *Acta bio medica: Atenei parmensis*, *91*(1), 157–160. https://doi.org/10.23750/abm.v91i1.9397

da Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó. http://hdl.handle.net/10451/29194

Euclides. (1991). *Elementos. Versión Traducida por María Luisa Puertas Castaños* (Editorial Gredos).

González-C., J. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de educación*, *65*, 161–172. https://doi.org/10.35362/rie650400

Goos, M. (2013). Sociocultural perspectives in research on and with mathematics teachers: a zone theory approach. *ZDM*, *45*(4), 521–533. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0477-z

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la Geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la Educación Matemática* (pp. 33–48). Una Empresa Docente" & Grupo Editorial Iberoamérica.

Llinares, S. (2021, 18 de febrero). *Formar profesores de matemáticas. Retos y desafíos en la actualidad. 2do Congreso Internacional de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.* [Video] https://www.youtube.com/watch?v=TpR2xGdJyDY&t=332s

Morales Chicana, L., Zuta Velayarse, L. M., Solis Trujillo, B. P., Fernández Otoya, F. A., y García González, M. (2023). El uso del Software GeoGebra en el aprendizaje de las matemáticas: Una revisión sistemática. *Revista Referencia Pedagógica*, *11*(1), 2–13.

Muñoz-Escolano, J. (2016). Crónica del encuentro: Enseñar matemáticas con GeoGebra: retos, roles, resultados. *Revista Suma*, *81*.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18), 547–567.

Radford, L. (2016). The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. *International Journal for Research in Mathematics Education (RIPEM)*, *6*(2), 187–206.

Radford, L. (2017a). Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (Primera, pp. 115–132). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2017b). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (Primera, pp. 97–112). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2023a). *La teoría de la objetivación: una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Uniandes. https://doi.org/10.51570/Educ202312

Radford, L. (2023b). Sujeto, Objeto, Cultura y la formación del Conocimiento. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura–REMATEC*, *18*(45), e2023002. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n45.pe2023002.id541

Radford, L., y Empaey, H. (2017). Culture, Knowledge and the Self: Mathematics and The Formation of New Social Sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. *Revista Brasilera de História da Matemática, Festschirt (Ubiratan D'Ambrosio), Especial 1*, 231–254.

Ribeiro, A., y da Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae*, *21*(2). https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5002

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, *26*(Especial), 11–30.

Sánchez, I. C., y Prieto G, J. L. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con Geogebra. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *14*(1), 55–83. https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.8657

Sánchez Noroño, I. V., y Prieto G., J. L. (2022). Diseño de una actividad formativa para futuros profesores de matemáticas sobre construcciones euclidianas con GeoGebra. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *6*(24), 933–946. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i24.387

Sánchez-B, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *32*, 71–92. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1860

Sandoval Cáceres, I. T., y Moreno-Armella, L. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, *14*(1), 21–29.

Simson, R. (1774). *Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los elementos de Euclides: traducidos de nuevo sobre la versión latina de Federico Comandino conforme a la fiel, y correctísima edición de ella.* Universidad Complutense de Madrid.

Tardif, M. (2002). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional.* Narcea Editores.

Tosca, T. (1707). *Compendio Mathematico. Tomo I: en que se contienen todas las materias más principales de las ciencias que tratan de la cantidad.* Imprenta de Antonio Bordazar.

Towers, J. (2010). Learning to teach mathematics through inquiry: a focus on the relationship between describing and enacting inquiry-oriented teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(3), 243–263. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9137-9

Autor de contacto:

Irene Victoria Sánchez Noroño

Dirección: Universidad Arturo Prat, Iquique-Casa central, Facultad de Ciencias Humanas, Carrera Pedagogía en Matemática y Física.
Av. Arturo Prat Chacón 2120, Iquique, Tarapacá, Chile, 1100000
irsanchez@unap.cl

 https://doi.org/10.24844/EM3703.11

Matemáticas en la Calle Jalisco: una perspectiva lúdica para la enseñanza de las matemáticas

Matemáticas en la Calle Jalisco: A Ludic Approach to Mathematics Teaching

Carlos Valenzuela García,[1] Diego Rodríguez Guzmán[2]

Desde el año 2012, *Matemáticas en la Calle* –actividad de difusión y divulgación– ha sido parte del Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (CNSMM) como una sesión especial. En esta reseña, se toma como objeto de discusión el proyecto *Matemáticas en la calle Jalisco*, el cual surge como una adaptación de dicha iniciativa nacional. Su implementación en Jalisco marcó un hito al realizarse en el primer congreso pospandemia, el 55° CNSMM (Valenzuela *et al*., 2022); de ahí, y a partir de la necesidad de una red de profesores de matemáticas de reanimar la enseñanza y divulgación de la matemática, nació esta versión estatal. Parte del comité organizador del mencionado congreso capacitó a un grupo de alumnos y docentes, logrando más de 30 presentaciones en distintos municipios del estado de Jalisco dentro del marco del 55° CNSMM.

Una vez conformada la red, el X Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (X CIBEM), llevado a cabo en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), abrió sus puertas nuevamente a esta actividad de difusión y divulgación de las matemáticas para realizar actividades en las calles de Jalisco (Coordinación de Internacionalización, Universidad de Guadalajara, 2025).

[1] Universidad de Guadalajara, México, carlos.valenzuela@academicos.udg.mx, http://orcid.org/0000-0002-0776-5757

[2] Universidad de Guadalajara, México, diego.rodriguez@academicos.udg.mx, http://orcid.org/0009-0001-3642-9429

Se busca que esa red continúe fortaleciéndose para divulgar las matemáticas de forma lúdica y accesible, utilizando tanto espacios públicos como centros escolares, con el fin de acercar el pensamiento matemático a la comunidad en general y escolar en particular, promoviendo una cultura científica participativa. La estrategia contempla capacitar a profesores, alumnos afines a las matemáticas y actores de sus comunidades para llevar a cabo las actividades, creando espacios de discusión más horizontales y fomentando la socialización del conocimiento. Si bien, desde la primera capacitación, los diferentes grupos han reproducido la iniciativa en escuelas y espacios públicos, generando la necesidad de incorporar y actualizar el repertorio de actividades, el objetivo es consolidar la iniciativa y proporcionar ideas para que los docentes las incorporen en sus aulas.

La red de profesores que constituyen *Matemáticas en la Calle Jalisco*, en su mayoría integrantes del Sistema de Educación Media Superior de la Universidad de Guadalajara y con experiencia en olimpiadas de matemáticas, encontraron en esta actividad una herramienta valiosa que sirve para promover el interés y la comprensión de conceptos matemáticos de manera lúdica. Además de la divulgación, en las actividades identifican potencial para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula.

Como se mencionó, en esta reseña se analiza la iniciativa *Matemáticas en la Calle Jalisco*, entendida como una propuesta de divulgación y enseñanza lúdica con impacto en la cultura matemática local. A partir de la experiencia acumulada por la red de profesores, se discuten los alcances y limitaciones observadas en la implementación de las distintas actividades. Además, partiendo de la descripción de una de sus actividades de divulgación, las Torres de Hanói, se expone una reflexión sobre sus posibilidades de uso escolar, sin que ello implique una adaptación contradictoria sino un contraste entre su versión divulgativa y su potencial didáctico. De este modo, la reseña expone retos y beneficios de la iniciativa, contribuyendo a valorar su impacto actual y su proyección como recurso de divulgación y, para la enseñanza de las matemáticas.

RETOS Y BENEFICIOS AL REALIZAR LAS ACTIVIDADES DE MATEMÁTICAS EN LA CALLE JALISCO

Desde las primeras actividades de *Matemáticas en la Calle Jalisco* del año 2022, los profesores y alumnos que fueron capacitados para fungir como divulgadores, enfrentan el reto de atender a un público heterogéneo en escolaridad y edad, ya que para realizar las actividades no se requieren conocimientos curriculares específicos; esto es justo lo que permite al usuario acercarse a las matemáticas de manera más amable y desarrollar estrategias para resolver las actividades o comprender los conceptos subyacentes. Los divulgadores aprendieron a detectar y enfrentar la frustración de los participantes, sin inducirla, fortaleciendo sus habilidades de mediación educativa.

Las actividades desarrolladas durante el X CIBEM en el año 2025 permitieron compartir nuevas actividades, experiencias, problemas y soluciones entre los miembros de la red y asistentes al congreso (Canal 44 TV, 2025). Al capacitar a los estudiantes de la licenciatura en matemáticas para formar parte del grupo de divulgadores, ellos mejoraron sus estrategias de aprendizaje y su autopercepción como agentes de conocimiento.

La capacitación también tenía como fin poner en práctica nuevas actividades: una de las de mayor afluencia durante el congreso del 2025 fue *Rotar y Torcer,* propuesta por los integrantes de la red. La posibilidad de que los miembros de la red propongan y desarrollen actividades como *Rotar y Torcer* representa un beneficio para su formación, ya que desarrolla su creatividad, pensamiento crítico y comprensión sobre los conceptos matemáticos que subyacen en los juegos. Asumir el papel de diseñadores y divulgadores les permite reconocer el valor pedagógico del juego, apropiarse de estrategias de enseñanza y formar su identidad como educadores de la matemática dentro y fuera del aula.

Cada actividad de *Matemáticas en la Calle Jaslico* permite presentar ideas matemáticas, motivando la exploración intuitiva, la interacción y el pensamiento crítico, beneficiando tanto a docentes como a asistentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, el juego de las Torres de Hanói involucra recursividad y planificación de algoritmos, mostrando de manera tangible cómo un problema matemático puede ser abordado paso a paso y de forma creativa.

ACTIVIDADES DE *MATEMÁTICAS EN LA CALLE JALISCO* Y ESTRATEGIAS PARA EL AULA

Las actividades seleccionadas–como las Torres de Hanói, juegos del NIM, Sudoku, Rompecabezas Múltiple, Bandas de Möbius y Desanúdate–fueron estandarizadas por el equipo de divulgación de la Sociedad Matemática Mexicana. Estas actividades destacan por su simplicidad, accesibilidad y capacidad para despertar el interés matemático, permitiendo transitar por las cuatro fases que propone Polya (1957) para resolver problemas: comprender el problema, trazar un plan, ejecutar el plan y revisar la solución. Cada juego introduce conceptos clave de la matemática de manera intuitiva, como la recursividad y el conteo, sin necesidad de explicaciones formales.

El juego de las Torres de Hanói, propuesto en 1883 por Edouard Lucas (Mneimneh, 2019) trata la recursividad de un algoritmo a través de la búsqueda de la menor cantidad de movimientos. El juego consiste en mover una torre, conformada por discos de diferentes tamaños, de un poste a otro, utilizando un poste auxiliar (figura 1). Las reglas son las siguientes:

1. *Mover un disco a la vez*: solo se puede mover un disco por turno.
2. *Mover solo discos superiores*: un disco se puede mover si es el que está en la parte superior de la pila de discos.
3. *No colocar discos grandes sobre discos pequeños*: un disco de mayor tamaño nunca puede colocarse por encima de uno más pequeño.

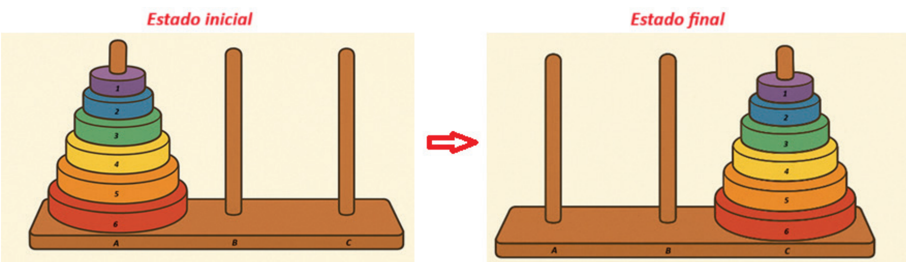


Figura 1. Representación del juego Torres de Hanói. Elaboración propia

Para implementar la actividad en el aula se puede comenzar a jugar por casos, primero el caso en el que $n = 2$, e ir aumentando el número de discos. Antes de iniciar con el primer caso, se sugiere una fase para explorar la comprensión de las reglas del juego: el alumnado debe experimentar el movimiento de los discos, verbalizar y justificar las decisiones tomadas. El profesorado puede hacer preguntas como: 1) ¿Qué disco se puede mover primero? 2) ¿Qué pasa si intentas colocar el disco grande sobre el pequeño? 3) ¿Puedes mover todos los discos de la torre al mismo tiempo? Esta exploración dejará ver si hay comprensión sobre las condiciones del problema y se identifican su estado inicial y final (hipótesis y tesis).

Para el caso en el que $n = 2$ (figura 2), el profesorado puede pedir al alumnado que registre los movimientos hechos, y realizar preguntas como ¿cuántos movimientos hiciste? En caso de que haya hecho más de tres, guiar para que deduzca que basta con mover la pieza menor dos veces y la pieza mayor solo una vez.

Figura 2. Proceso de solución del juego Torres de Hanói para el caso de 2 discos. Elaboración propia

Para el caso de $n = 3$, se busca que el alumnado reconozca patrones en la secuencia de movimientos, apoyándose del caso anterior, para ello se puede cuestionar: ¿Qué relación encuentras con el caso anterior? ¿Qué pasos del caso anterior se repiten? ¿Cómo podrías usar la solución con 2 discos dentro de esta nueva? Aquí, el estudiantado estará identificando subproblemas dentro de un problema mayor, así como la recursividad.

En el caso 4, para $n = 4$, se puede buscar la generalización y formulación de la recursividad. El profesorado puede pedir al alumnado que registre en una tabla el número de movimientos para cada caso, y lograr la notación $M(n)$ para referirse a los movimientos correspondientes en función de n (número de discos). Así, la idea es lograr completar la información de la tabla 1, y llegar a la generalización: $M(1) = 1$; $M(n) = 2[M(n-1)] + 1$ para $n \geq 2$. Es recomendable aumentar el número de discos y explorar más casos.

Tabla 1. Registro del número de movimientos para el caso de 4 discos

Número de discos	Número de movimientos	Expresión de movimientos en función de $M(n)$
$n = 1$	1	$M(n) = 1$
$n = 2$	3	$M(n) = 2(1) + 1 = 3$
$n = 3$	7	$M(n) = 6 + 1 = 2(3) + 1 = 7$
$n = 4$	15	$M(n) = 14 + 1 = 2(7) + 1$

La deducción de la fórmula de recurrencia debe apoyarse del juego y la información obtenida. Por ejemplo, analizar el caso para mover n discos desde el poste A al poste C. En este caso, se deben mover los $n-1$ discos que están encima del disco n en el poste A a otro poste, el auxiliar B; esto lleva al menos $M(n-1)$ movimientos. Mover el disco más grande n al poste C conlleva un movimiento. Mover los $n-1$ discos más pequeños que se colocaron en el poste B al poste C lleva al menos otros $M(n-1)$ movimientos. Por lo que, la expresión de recurrencia queda: $M(n) = 2[M(n-1)] + 1$. Esta deducción, puede ser apoyada de la representación gráfica de los movimientos hechos por los alumnos, tal como lo presenta Knoblock (1990), ver la figura 2.

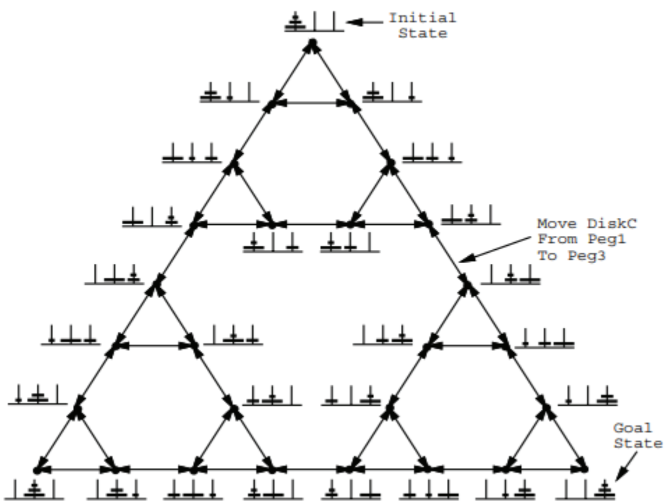


Figura 2. Representación gráfica de movimientos del juego Torres de Hanoi para tres discos. Tomado de Knoblock (1990).

Hasta aquí, con las estrategias que se proponen, puede implementarse la actividad con alumnos de educación básica y media superior. No obstante, para extender su estudio con alumnos universitarios, puede proponerse, por ejemplo, que deduzcan que $M(n) = 2^n - 1$, desarrollando:

$$
\begin{aligned}
M(n) &= 2[M(n-1)] + 1 \\
&= 2[2M(n-2) + 1] + 1 = 2^2[M(n-2)] + 2 + 1 \\
&= 2^2[2M(n-3) + 1] + 2 + 1 = 2^3[M(n-3)]\ 2^2 + 2 + 1
\end{aligned}
$$

Y así continuando hasta $M(1) = 1$, tendrían que:

$$M(n) = 2^{n-1}[M(1)] + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1)$$

Y dado que $M(1) = 1$ y la suma $\sum_{k=0}^{n-2} 2^k = 2^{n-1} - 1$ entonces resulta

$$M(n) = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

Otro método puede ser por cambio de variable y hacerse la verificación por inducción. Aunado a esto, el juego de Torres de Hanói puede emplearse para plantear problemas asociados a la programación informática, las estructuras de datos, los algoritmos y las matemáticas discretas (Mneimneh, 2019; Romik, 2006; Knoblock, 1990).

En síntesis, *Matemáticas en la Calle Jalisco* demuestra que el juego y la exploración lúdica son recursos efectivos para acercar al estudiantado y comunidad en general al pensamiento matemático. Sus actividades, como las Torres de Hanói, permiten desarrollar razonamiento lógico, conocimiento matemático, creatividad y estrategias pedagógicas, contribuyendo a la enseñanza y divulgación de las matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecemos profundamente el entusiasmo de la red de profesores de *Matemáticas en la Calle Jalisco*, quienes se muestran dispuestos a compartir su gusto por las matemáticas y promover la divulgación matemática en la comunidad.

REFERENCIAS

Canal 44 TV [@udgtv44]. (2025, 22 de septiembre). *La Rambla Cataluña se convirtió en aula lúdica con "Matemáticas en la Calle", parte del X Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* [Video]. TikTok. https://www.tiktok.com/@udgtv44/video/7559733063761153336

Coordinación de Internacionalización, Universidad de Guadalajara. (2025, 9 de julio). *"Matemáticas en la Calle" llega a la Rambla Cataluña*. https://ci.cgai.udg.mx/es/noticia/matematicas-en-la-calle-llega-la-rambla-cataluna

Knoblock, C. A. (1990). Abstracting the Tower of Hanoi. In *Proceedings of the Workshop on Automatic Generation of Approximations and Abstractions* (pp. 13-23). Boston, MA. https://usc-isi-i2.github.io/papers/knoblock90-hanoi.pdf

Mneimneh, S. (2019). Simple variations on the Tower of Hanoi: A study of recurrences and proofs by induction. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *17*(2), 131–158. https://doi.org/10.5485/TMCS.2019.0459

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton University Press.

Romik, D. (2006). Shortest paths in the Tower of Hanoi graph and finite automata. *SIAM Journal on Discrete Mathematics, 20*(3), 610-622. https://doi.org/10.1137/050628660

Valenzuela, C., García, M. S., Hernández, J. A., y Gutiérrez, H. (2022). Promoción de redes académicas para el área de matemática educativa en el 55 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. *Educación Matemática, 34*(3), 281–300. https://doi.org/10.24844/EM3403.16

www.revista-educacion-matematica.com