Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

Educación Matemática *vol. 31 • núm. 1 • abril de 2019*

Editora responsable: Avenilde Romo Vázquez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 30 de marzo de 2019.

www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

 DOI: 10.24844/EM3101.00

Editorial

Joven, con apenas 31 años, la revista *Educación Matemática* celebra su aniversario dispuesta a alcanzar nuevos horizontes y sabiéndose reconocida por su calidad tanto de la comunidad de lectores como de diferentes índices nacionales e internaciones. Lograr que un proyecto editorial se mantenga vivo durante tantos años implica la reunión de varios elementos; el primero de ellos es una razón de ser, el segundo una comunidad de lectores y el tercero un comité editorial que la sustente.

La razón de ser de esta revista es ofrecer un espacio de difusión de resultados de investigaciones desarrolladas en el marco de la disciplina de la Educación Matemática, principalmente en la región iberoamericana. Esto permite que la comunidad pueda producir nuevas investigaciones, conocer resultados que se han generado en torno a cierto tema, preguntas que siguen abiertas y propuestas para innovar la enseñanza. Difundir estos elementos es una contribución sumamente importante —aunque a veces parezca limitada— para incidir en la sociedad y en la forma en que ésta se manifiesta en torno a la enseñanza de las matemáticas. Pero, ¿estamos haciendo lo necesario?

Cada vez que aparecen los resultados de exámenes nacionales o internacionales, como es el caso de la evaluación Pisa, los medios de comunicación y la sociedad misma se vuelcan para encontrar explicaciones sobre el bajo rendimiento de los estudiantes. ¿Qué elementos tienen unos y otros para generar dichas explicaciones? Me parece que hasta ahora todavía son pocos, y que la difusión generada por este órgano editorial debiera llegar a infiltrarse en la cultura popular. Este objetivo es, sin duda, muy ambicioso y además cuestionaría la especialización que como proyecto editorial hemos alcanzado. A pesar de ello, considero que es un momento de reflexión y de cambio, es necesario generar nuevas secciones dentro de la revista que estén orientadas a otros sectores que participan en las decisiones, grandes y pequeñas, que afectan la forma en que la enseñanza de las matemáticas tiene lugar en la aulas e incluso fuera de ellas.

Existen diferentes investigaciones e incluso teorías, como es la Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Etnomatemáticas, que muestran que las sociedades influyen de manera determinante en la forma en que se enseñan las matemáticas y viceversa. ¿No es acaso una responsabilidad nuestra incidir en la sociedad para alcanzar una relación más positiva en la forma de organizar la enseñanza de las matemáticas? Desde este espacio invito a la comunidad a hacerse parte de esta iniciativa y a generar ideas, sugerencias y propuestas de una nueva sección que nos permita llegar a un público que tiene interés en –o necesidad de– comprender la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas y las formas en que ésta pueda alcanzar mayor calidad. Una sociedad sin elementos de reflexión sobre lo que cree, enseña y pretende, está condenada a sobrellevar un destino en lugar de generarlo.

Avenilde Romo Vázquez
Editora en jefe

DOI: 10.24844/EM3101.01

Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas

Dynamic geometry and scientific reasoning: Duo to solve problems

Camilo Sua Flórez[1]
Leonor Camargo Uribe[2]

Resumen: En este artículo presentamos la resolución de un problema de geometría por parte de una pareja de estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria, que está relacionado con el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que contienen dos puntos dados. Para su desarrollo los estudiantes contaron con el apoyo de un programa de geometría dinámica. Apoyados en indicadores de génesis instrumental y razonamiento científico, analizamos el proceso llevado a cabo por estos estudiantes con miras a destacar la sinergia que se produce entre el uso de herramientas y funciones de un programa computacional (específicamente GeoGebra) y el razonamiento científico que ponen en juego los estudiantes al enfrentar el problema. Con base en el análisis realizado, mostramos cómo esta sinergia lleva a la conformación de un dúo que impulsa procesos propios de la actividad matemática esperada en la escuela.

Palabras clave: *Razonamiento científico, Resolución de problemas, Geometría dinámica, Génesis instrumental, GeoGebra.*

Fecha de recepción: 31 de octubre de 2017. **Fecha de aceptación:** 10 de noviembre de 2018.

[1] Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, jcsuaf@pedagogica.edu.co orcid.org/0000-0002-5700-4999

[2] Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, lcamargo@pedagogica.edu.co, orcid.org/0000-0002-2237-7306

Abstract: In this article we present the resolution of a geometry problem by students of ninth grade of secondary basic education, which is related to the locus of the centers of the circumferences that contain two given points. For the development of the solving process, the students were supported by a dynamic geometry program. Supported by theoretical elements framed in instrumental genesis and scientific reasoning, we analyze the process carried out by these students with the aim of highlighting the synergy between the use of tools and functions of a computational program of this nature (specifically GeoGebra), and the scientific reasoning that the students manifest when confronting the problem. Based on the analysis carried out, we show how this synergy leads to the conformation of a duo that drives processes of the mathematical activity expected in the school.

Keywords: *Scientific reasoning, Problem solving, Dynamic geometry, Instrumental genesis, GeoGebra.*

INTRODUCCIÓN

En Colombia, desde la promulgación de los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (1998), se insiste en que la resolución de problemas sea la actividad matemática central en la que se involucren los estudiantes de educación básica y media. Solo así podrán poner en funcionamiento procesos como el razonamiento, la representación y la comunicación de ideas, base para la competencia matemática con la cual enfrentar situaciones cotidianas, profesionales o científicas a lo largo de la vida. Sin embargo, en observaciones de clases de profesores en ejercicio y en descripciones hechas en trabajos de grado de nivel de maestría (v.g. Martínez, 2016), vemos que esta orientación aún no es una práctica usual en las clases de matemáticas y subsiste desorientación sobre cómo organizar currículos alrededor de problemas.

En 2015 y 2016 profesores del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ • G)*, de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) trabajamos en colaboración con profesores del área de matemáticas del Instituto Pedagógico Nacional, escuela laboratorio de la Universidad, en la preparación y experimentación de secuencias de enseñanza para los grados sexto a noveno, diseñando clases de geometría alrededor de problemas. El objetivo era promover en los estudiantes experiencias académicas de indagación propias de las ciencias, pero no exclusivas de ellas pues pueden estar presentes en situaciones de la vida cotidiana y profesional.

En el marco del trabajo descrito, uno de nuestros focos de interés fue identificar el papel de un software de geometría dinámica (SGD) para apoyar el razonamiento científico de estudiantes y promover por esa vía la actividad matemática. Entendemos esta como el conjunto de acciones, procesos, lenguajes, problemas que se valen de herramientas, técnicas y lenguajes matemáticos.

El interés investigativo surge de estudios que muestran que el uso de SGD favorece procesos de argumentación y demostración (v.g. Samper y Toro, 2017). Lo anterior nos motivó a pensar que este recurso podría apoyar el razonamiento científico y a analizar la actividad matemática de parejas de estudiantes de grado noveno usando indicadores de génesis instrumental y de razonamiento científico. En este artículo pretendemos aportar a la comprensión de la sinergia, o acción conjunta, que se produce entre el razonamiento científico y el uso de un SGD mediante un estudio de caso de una pareja de estudiantes. El estudio muestra que estos dos elementos conforman un dúo útil para la resolución de problemas, que debería explotarse de manera más decidida en las clases de geometría.

REFERENTES CONCEPTUALES

Presentamos los fundamentos teóricos que sirvieron de base para el análisis: la génesis instrumental y el razonamiento científico. Sobre cada elemento adelantamos una revisión de literatura no exhaustiva, con la intención de configurar dispositivos analíticos para el ejercicio.

Esquemas de utilización y actividad instrumentada

Coincidimos con Samper, Perry, Camargo, Molina y Echeverry (2010) al señalar que la presencia de tecnologías informáticas en la enseñanza no garantiza su influencia positiva en el aprendizaje. Se requieren diseños cuidadosos de tareas, basados en la comprensión del proceso de apropiación de las tecnologías, para generar ambientes de indagación que propicien la construcción de conocimiento. Para ello se requieren estudios analíticos que adopten marcos de referencia que favorezcan la interpretación de la interacción entre los individuos y las tecnologías informáticas. Autores como White (2008), Leung, Chan y López-Real (2006) y Trouche (2014) resaltan que la *génesis instrumental* es un constructo analítico adecuado para examinar el aprendizaje mediado por ambientes tecnológicos.

La *génesis instrumental*, constructo elaborado por Rabardel (1995), caracteriza el proceso a través del cual los individuos interactúan con artefactos que median su actividad al resolver tareas, los dotan de significado y los incorporan en su labor bajo secuencias de acciones realizadas de manera regular. Los artefactos permiten amplificar o modificar las habilidades humanas para transformar el entorno; están concebidos de forma tal que permiten "materializar", a través de representaciones, imágenes mentales. El uso de artefactos hace que los usuarios les atribuya funciones, desarrollando formas de uso personales. Cuando esto ocurre, se dice que cada individuo ha construido un *instrumento* a partir del artefacto (Pérez, 2014). Por ello su valor es inseparable de quien lo usa y específicamente de cómo lo usa (Leung *et al.*, 2006).

Con base en lo anterior, decimos que un artefacto que interviene en la generación de conocimiento matemático se puede convertir en un instrumento que media el aprendizaje (Samper, Camargo, Molina y Perry, 2013; Trouche, 2014). En este proceso los estudiantes interactúan con artefactos materiales o simbólicos desarrollados con fines determinados, educativos o no, para resolver tareas matemáticas y eventualmente les asignan funciones específicas, haciendo de ellos instrumentos de aprendizaje. Según Rabardel (1995) convertir un artefacto en instrumento requiere de dos procesos interrelacionados, producto de una relación entre el individuo y el artefacto: instrumentalización e instrumentación. En la figura 1 representamos la relación entre los procesos mencionados.

Figura 1: Instrumentalización-instrumentación (tomada de Trouche, 2005)

La *instrumentalización* es el proceso de identificar los componentes de un artefacto y reconocer sus limitaciones y posibilidades para resolver un problema o realizar una tarea. En términos de Verillon y Rabardel (1995, citado en Trouche, 2014) y Alqahtani y Powell (2016), es un proceso en el que el individuo dirige la atención hacia el artefacto y enriquece o modifica las propiedades de este para utilizarlo a favor de sus fines. Tres etapas pueden reconocerse: descubrir y seleccionar funciones relevantes, personalizar/ajustar el artefacto a rasgos característicos personales y transformar el artefacto (Trouche, 2014). A modo de ejemplo, consideremos una cuerda (artefacto) creada por el hombre con el fin de amarrar objetos. El individuo puede aplicarle polvo de color y tensionarla sobre una superficie plana, realizar una pulsación sobre esta y ver cómo queda un rastro sobre la superficie que podría representar una línea recta. En este caso el usuario desarrolla modos de usar la cuerda con un propósito determinado (representar una recta) y este propósito es distinto de aquel con el que fue concebida originalmente (amarrar objetos); en consecuencia, tiene lugar una modificación del significado del artefacto para el usuario.

Por su parte, la *instrumentación* corresponde al proceso de aparición, desarrollo y adaptación de *esquemas de utilización* con los que el individuo incorpora el artefacto en la resolución de tareas o problemas. Este proceso señala la influencia del artefacto en el individuo (Trouche, 2014). Entendemos por *esquema de utilización*, en consonancia con Leung *et al.* (2006) y Samper *et al.* (2013), un procedimiento esquemático de acciones que se realizan regularmente al usar un artefacto para un determinado fin. Retomando el ejemplo, la cuerda (artefacto) se pone en funcionamiento con un esquema de utilización (aplicar polvo de color, tensionar y pulsar sobre una superficie plana) y se identifica una vía para trazar rectas cuando no se cuenta con una regla; probablemente así se usará en futuras oportunidades. En este proceso el individuo asocia el artefacto a un esquema particular (Alqahtani y Powell, 2016), deja atrás su utilidad convencional y adopta un nuevo uso de acuerdo con sus necesidades.

Concebimos el instrumento como el conjunto de un artefacto y las formas en que este es usado por un individuo al resolver una tarea (Pérez, 2014). El instrumento existe siempre y cuando haya una relación significativa entre el artefacto y el usuario, en el marco de una actividad específica; de ahí que el instrumento sea una entidad dual. Aclaramos que la relación de un usuario con un artefacto es de carácter subjetivo; en consecuencia, dos individuos pueden enfocar de diferente manera el uso del mismo artefacto, desarrollar distintos esquemas y crear actividades e instrumentos diferentes (Alqahtani y Powell, 2016).

Para efectos del análisis que presentamos, los esquemas de utilización pueden ser vistos como señales de la actividad matemática de los estudiantes cuando resuelven problemas con apoyo en algún SGD (Samper *et al*., 2013); esto debido a que los SGD están configurados para reproducir lo más cercanamente posible, atributos y propiedades matemáticas, que se constituyen en invariantes al arrastre de los elementos construidos. Pero ¿cuál es el artefacto en ese caso? Según Pérez (2014), el artefacto podría ser el ambiente computacional en sí mismo, o cada herramienta de este (v.g., rectas paralelas, punto medio). En nuestro trabajo, asumimos artefacto como cada uno de los comandos o funciones provistos por GeoGebra.

Las acciones de los estudiantes guían lo que ocurre en pantalla y esto a su vez los guía a realizar nuevas acciones, produciendo *esquemas de utilización,* propios de los artefactos de GeoGebra empleados. Al ir convirtiéndolos en instrumentos, los estudiantes pueden utilizar el SGD para resolver problemas. Estudiar la génesis instrumental requiere, en términos de White (2008), no centrarse en los artefactos en sí mismos, sino en el proceso de génesis para usuarios particulares y usos específicos.

Razonamiento científico

Lawson (2004) y Alshamali y Daher (2015) conciben el razonamiento científico como el proceso cognitivo y de procesamiento de información, que se manifiesta en las actuaciones de los individuos, por medio del cual se formulan enunciados condicionales, se construyen explicaciones argumentadas sobre estos, y se realizan inferencias que van más allá de la experiencia directa. Según Morris, Croker, Masnick y Zimmermann (2012), el razonamiento científico efectivo tiene lugar cuando de manera simultánea intervienen formas de pensar inductivas y deductivas. Para ello, los individuos deben comprender cómo evaluar lo que es conocido o creído en la actualidad, desarrollar preguntas comprobables, testar hipótesis, procesar datos y trazar conclusiones apropiadas al coordinar evidencia empírica y teórica. Este razonamiento exige además tratar información sistemáticamente, trazar inferencias razonables a partir de patrones observados y reflexionar sobre el proceso de adquisición y cambio del propio conocimiento que resulta de la actividad de investigar.

Hogan, Nastasi y Pressley (1999) concretan, para el ámbito educativo, el razonamiento científico considerándolo como la construcción conjunta de explicaciones, argumentos y modelos, a partir de observaciones propias y datos obtenidos en contextos de clase. Esta concepción está orientada por la perspectiva social adoptada por algunos educadores matemáticos (Yackel y Hanna, 2003) que se enfocan en los aspectos comunales del razonamiento y la actividad matemática. Desde esa perspectiva, describen el razonamiento matemático como "una actividad comunal en la que los aprendices participan al interactuar entre ellos para resolver problemas matemáticos" (Yackel y Hanna, 2003, p. 228).

Con base en las ideas expuestas entendemos el razonamiento científico como un proceso cognitivo y social mediante el cual se aborda un fenómeno del campo de las ciencias (o un hecho del campo de las matemáticas) con miras a entenderlo, explicarlo y hacerlo parte del bagaje teórico propio. En este se conjuga la exploración sistemática de un problema, la formulación y testeo de hipótesis, la manipulación de variables aisladas y la observación y evaluación de consecuencias (Bao *et al.*, 2009), obteniendo como resultado enunciados relativos al hecho abordado en el problema.

Las ideas presentadas anteriormente nos permiten destacar como relevantes: la valoración del razonamiento científico como recurso para enfrentar la resolución de problemas y el apoyo que puede brindar un artefacto, en la medida que se haga instrumento. Particularmente, nos enfocamos en los esquemas de utilización de los estudiantes al abordar el problema en GeoGebra y en los vestigios del razonamiento científico que se puede evidenciar en su trabajo.

METODOLOGÍA

Nuestro estudio es una investigación de diseño (Bakker y van Eerde, 2015), motivada por el interés de promover procesos de desarrollo curricular. Organizamos la presentación de la metodología de acuerdo con las fases propias de esta metodología. Por motivos de espacio, incluimos solo información relacionada con el análisis específico presentado.

Fase de planeación

Partiendo del interés de profundizar en la posible sinergia entre la génesis instrumental y el desarrollo del razonamiento científico, diseñamos secuencias de enseñanza para los grados 6° a 9° (12-16 años), a partir de problemas de conjeturación en donde los resultados obtenidos al resolver un problema determinan el cuerpo base de conocimiento construido socialmente en la clase para enfrentar la resolución de sucesivos problemas. Las secuencias ofrecen a los estudiantes la posibilidad de formular definiciones de objetos geométricos, establecer relaciones de dependencia, proponer conjeturas y justificarlas.

Los estudiantes de grado noveno conocían herramientas básicas de GeoGebra (v.g. construir puntos, rectas y segmentos, determinar distancias), lo cual, desde nuestro punto de vista, propiciaba la variedad y riqueza de las exploraciones. El enunciado del problema cuya resolución analizamos en este artículo es el siguiente:

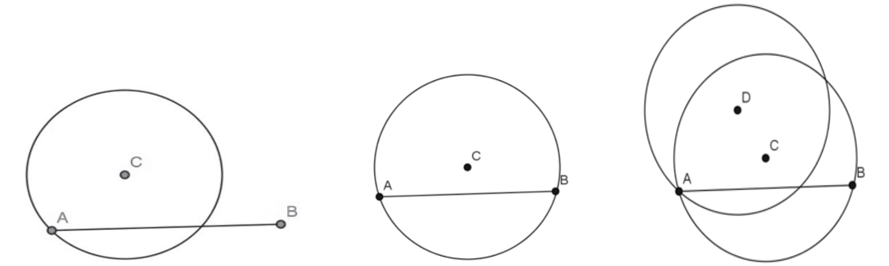
> Problema de los dos puntos: dados dos puntos *A* y *B*, ¿existe una circunferencia que los contiene? ¿Existe otra? ¿Existen más? Si es el caso, ¿dónde se encuentran los centros de las circunferencias que contienen los puntos *A* y *B*?

El objetivo del problema es que los estudiantes descubran que los centros de las circunferencias que contienen a los puntos y pertenecen a la mediatriz del segmento . Anticipamos que ellos pueden llegar a dos posibles conjeturas al usar GeoGebra en la resolución del problema:

> Conjetura 1 [C1]. Dados dos puntos *A* y *B*. Si *A* y *B* pertenecen a una circunferencia, entonces, el centro de la circunferencia pertenece a la mediatriz del segmento *AB* (o cuerda *AB*).

> Conjetura 2 [C2]. Dados dos puntos *A* y *B*. Si un punto *C* pertenece a la mediatriz del segmento *AB*, entonces *C* es centro de una circunferencia que contiene los puntos dados.

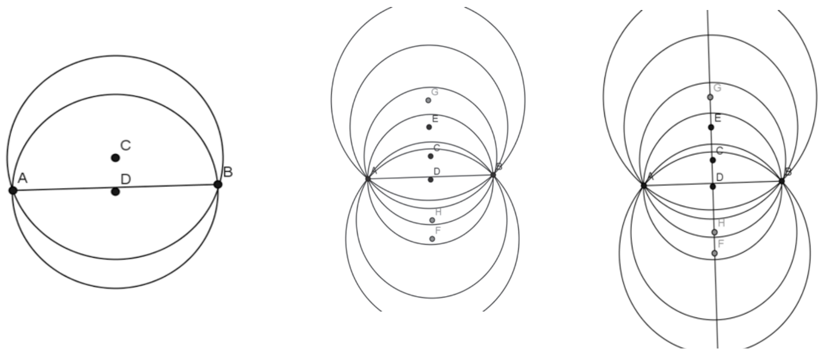
Contemplamos que C1 podía derivarse de una exploración en la que los estudiantes construyeran distintas circunferencias no congruentes y las ajustaran, manipulando su centro, por ejemplo, para que la condición del enunciado del problema se satisficiera. Un número considerable de circunferencias construidas bajo esta condición permitiría evidenciar que los centros pertenecen a la mediatriz del segmento *AB* (Figura 2).



Construyen el segmento y una circunferencia tal que pertenece a ella.

Mueven el centro de la circunferencia para que también contenga al punto.

Construyen una circunferencia distinta que contenga al punto.



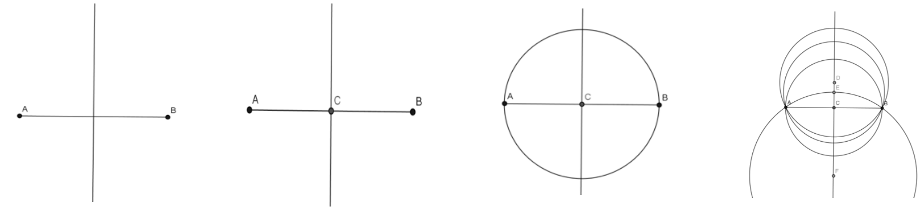
Mueven el centro de la segunda circunferencia para que contenga al punto.

El proceso mencionado se repite unas cuantas veces más.

Construyen la recta que contiene los centros de las circunferencias.

Figura 2: Proceso de exploración para obtener C1

C2 podía darse cuando los estudiantes construyeran el segmento *AB* y su mediatriz con el fin de obtener el punto medio del segmento, construyendo así la circunferencia para la cual el segmento *AB* es diámetro. Luego sobre esta recta ubicarían los centros de las otras circunferencias (Figura 3).



Construyen el segmento y su mediatriz

Ubican el punto medio del segmento, dado por la intersección de estos objetos.

Construyen la circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento.

Construyen circunferencias cuyos centros son puntos de la mediatriz y contienen los puntos *A* y *B*.

Figura 3: Proceso de exploración para obtener C2

Fase de experimentación

La implementación de la secuencia en grado 9° tuvo lugar en un curso de 30 estudiantes, con edades comprendidas entre 14 y 16 años, una vez por semana, durante seis semanas, en sesiones de 90 minutos. Previa la realización de esta, los estudiantes no habían tenido una experiencia similar pues en la clase de geometría no se favorecía la construcción de conocimiento vía realización de experimentos.

En la mayoría de sesiones los estudiantes contaban con computadores que tenían instalado el SGD GeoGebra, que podían emplear a su voluntad. El problema de los dos puntos se propuso en la segunda sesión, después de haber resuelto otro problema que tenía la intención de institucionalizar la definición de circunferencia.[3]

Video grabamos la interacción de varias parejas de estudiantes con ocasionales intervenciones del profesor que se desplazaba de una pareja a otra para hacer preguntas, atender inquietudes y favorecer la exploración de ideas. Para ello ubicamos una cámara de video atrás de los estudiantes, que registraba su interacción, y las construcciones realizadas en la pantalla del computador. Adicionalmente usamos con una grabadora de audio que

[3] Circunferencia: una circunferencia con centro en el punto *C* es el lugar geométrico de puntos que equidistan de *C*.

registraba el diálogo. Acopiamos las hojas de trabajo en donde los estudiantes consignaron exploraciones y hallazgos. Tres miembros del equipo de investigación (P2, P3) y un auxiliar (A1) actuaron como observadores participantes, apoyando al profesor (P1) del curso en la gestión de la clase y tomando notas de campo.

Fase de análisis retrospectivo

La información recogida durante la implementación nos permitió transcribir el proceso de resolución desarrollado por las parejas video grabadas. Enriquecimos la información con anotaciones de los observadores y las producciones escritas. Luego, cada transcripción fue fragmentada según identificábamos el surgimiento y desarrollo de una idea para resolver el problema.

El análisis de los fragmentos se hizo a partir de la caracterización de las acciones e intervenciones de los estudiantes usando los indicadores previstos en los siguientes dispositivos analíticos.

Para estudiar la génesis instrumental, particularmente la forma en que algunos comandos de GeoGebra llegan a convertirse en instrumentos para los estudiantes, construimos los indicadores que se encuentran en la primera columna de las Tablas 1 y 2. Estos surgen de las caracterizaciones dadas a cada proceso de génesis instrumental por los autores referenciados, aunque no descartamos que otras caracterizaciones pudieran dar lugar a otros indicadores. Describimos y ejemplificamos cada indicador en la tercera columna. Como lo señalan Rabardel (1995) y Pérez (2014), si los individuos manifiestan acciones ligadas a ambos procesos, podemos considerar que tiene lugar una apropiación de los artefactos y estos se comienzan a convertir (o se convierten) en instrumentos.

Tabla 1: Indicadores de instrumentalización y ejemplos

Isa1	Descubrimiento de posibilidades de un comando	Se descubre, para un comando (o conjunto de estos), nuevas posibilidades y funciones que permiten resolver la tarea y que anteriormente no se conocían. Por ejemplo, al reconocer que el comando *simetría central* sirve para construir, a partir de los puntos *A* y *B*, un punto *C* de tal forma que *B* es punto medio de *A* y *C*.
Isa2	Identificación de limitaciones de un comando o herramienta	Se identifica que un comando que se quiere usar con un propósito definido o con una idea tentativa no ofrece un resultado afortunado y, en consecuencia, se descarta la posibilidad de asignar esta función al comando. Por ejemplo, ante la necesidad de construir una recta que pase por dos puntos dados, un estudiante construye la recta por uno de ellos y luego arrastra al segundo punto, dejándolo sobre la recta, esperando que esto garantice la solución de la tarea.
Isa3	Personalización y ajuste del artefacto a los intereses personales	Se identifica la diversidad de usos de un comando asociados a intereses específicos. El comando es utilizado según distintos esquemas de acuerdo a los requerimientos de la tarea. Por ejemplo, la función de arrastre, las marcas de ángulo y las marcas de segmento pueden ser usadas con diferentes propósitos.
Isa4	Transformación del artefacto	Se reconoce un artefacto como medio para la obtención de un fin particular en un contexto específico y se usa con un fin igual o distinto a aquel con el que fue concebido. La experiencia del individuo al usar el comando bajo un nuevo esquema le ofrece un nuevo significado del mismo. Por ejemplo, el comando rotación se puede usar para construir ángulos a partir de su medida.

Tabla 2: Indicadores de instrumentación y ejemplos

Ias1	Aparición de un esquema asociado a un conjunto de comandos	Se reconoce un determinado conjunto de pasos, sobre un comando (o conjunto de estos) como efectivo para la obtención de un resultado particular y este es aceptado por el estudiante. Por ejemplo, la construcción de un triángulo equilátero a partir de un segmento *AB* y dos circunferencias congruentes de radio *AB* con centros en *A* y *B*.
Ias2	Desarrollo de un esquema para la obtención de un resultado particular	Una vez se acepta el resultado de un conjunto de pasos, el estudiante identifica un procedimiento para su uso, con miras a obtener el mismo resultado al incorporar el esquema. Por ejemplo, el estudiante puede reconocer el procedimiento para la obtención de un triángulo equilátero. Cuando quiera este resultado, procederá de la misma forma, descartando otros procedimientos que lleven al mismo resultado.

Ias3	Adaptación de un esquema al resolver un problema	Sucede al modificar un procedimiento, bien sea para incluir algunas acciones a las ya presupuestadas y dar mayor alcance a este o para reducir y refinar el procedimiento inicialmente considerado. Por ejemplo, el estudiante puede ampliar el procedimiento involucrado hasta ahora para construir un rombo, de tal forma que sus lados sean congruentes al segmento *AB*, o a la mediatriz de este segmento.
Ias4	Uso del comando, en distintas tareas, bajo el mismo esquema	Sucede cuando, de manera rutinaria, en distintos problemas, el estudiante involucra un esquema desarrollado en algún momento. En este punto se puede decir que el artefacto ha sido apropiado bajo un esquema particular y se ha atribuido un papel al mismo en la obtención de un resultado específico.

Para rastrear el razonamiento científico exhibido por los estudiantes, nos valemos de los indicadores propuestos en la Tabla 3. Los agrupamos de acuerdo a las fases del razonamiento científico sugeridas por Bao *et al.* (2009).

Tabla 3: Indicadores de razonamiento científico en la resolución de problemas

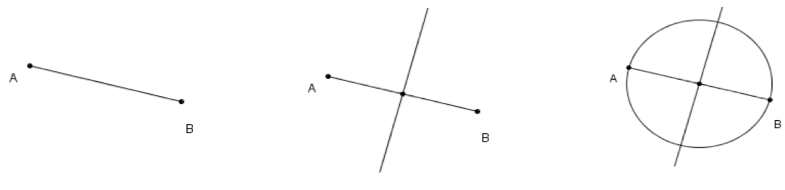
Explorar de manera sistemática un problema [ESP]	Procura comprender el enunciado de un problema antes de proceder a resolverlo. Identifica el objetivo general de un problema antes de proceder a resolverlo. Identifica las condiciones que el enunciado del problema provee. Traza un plan de acción para abordar el problema. Ejecuta acciones en correspondencia con el plan delineado.
Formular y testar hipótesis [FTH]	Anticipa resultados a las acciones a realizar. Elabora preguntas sobre posibles resultados. Ejecuta acciones con miras a validar o descartar hipótesis formuladas. Utiliza ejemplos concretos con miras a establecer regularidades o resultados. Ejecuta acciones para determinar la generalidad o particularidad de un resultado. Revisa el proceso realizado para contar con certeza de los resultados obtenidos.
Manipular variables aisladas [MVA]	Opera datos que provienen de distintas fuentes. Combina distintos datos en búsqueda de relaciones y diferencias. Opera de distintas formas los datos disponibles para solucionar el problema. Utiliza representaciones gráficas que apoyan la comprensión del problema. Establece un orden para operar los datos.
Observar y evaluar consecuencias [OEC]	Contrasta resultados obtenidos con hipótesis formuladas. Analiza resultados y provee explicaciones a estos. Revisa el resultado de las acciones ejecutadas para evaluar su pertinencia. Provee una justificacion a alguna propiedad obtenida antes de usarla de nuevo. Revisa la consistencia de los resultados obtenidos y las condiciones del problema. Formula conjeturas/propiedades, sobre la observación de los resultados obtenidos.

Por dificultades de espacio no presentamos el análisis realizado al trabajo de cada pareja. Nos enfocamos en los fragmentos de interacción entre los miembros de uno de los casos, escogido porque exhibe de mejor manera la sinergia que queremos presentar. Presentamos ahora los fragmentos de interacción entre los miembros, EA y EB, al resolver el problema de los dos puntos. Utilizamos la denotación dada, en la primera columna de las tablas 1 y 2 o la expresada en paréntesis cuadrado en la tabla 3, para mencionar los indicadores. Cuando se presenten pausas prolongadas en la interacción se utilizará (...).

ANÁLISIS

Construcción de circunferencias

Al inicio los estudiantes hablan muy poco. EA utiliza GeoGebra y construye una circunferencia en la que los puntos *A* y *B* determinan uno de sus diámetros. El proceso desarrollado involucra determinar el segmento *AB* y su mediatriz, obteniendo así su punto medio, luego utilizar el comando *Compás* para construir la circunferencia (Figura 4).



(i) (ii) (iii)

Figura 4. Protocolo de construcción circunferencia inicial

EA construye la primera circunferencia haciendo uso de un procedimiento que parece conocer con anterioridad [Ias1], pues no se entrevé descubrimiento de este ni discusión sobre su efectividad. Luego propone ver si existen otras circunferencias, tratando de construirlas. Oculta el segmento y la mediatriz. Después, construye un punto en la circunferencia distinto a *A* y *B* (llamémoslo *C* y usa la herramienta *Circunferencia por tres puntos* [C3P] tomando los puntos *A* y *C*. Al tomar como tercer punto a *B* y ver que coincide con la circunferencia que ya tiene, aborta su estrategia. Luego, usa de nuevo el comando C3P, toma los puntos *A* y *B* y determina el tercer punto [*D*] de manera que este no pertenezca a la primera circunferencia (Figura 5). Reitera el proceso, tomando otros puntos exteriores [*F* y *G*] y construyendo tres circunferencias (Figura 6).

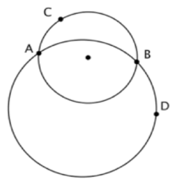


Figura 5

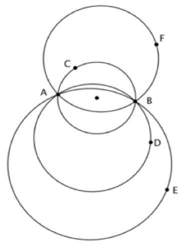


Figura 6

1 EA Bueno, en este demostramos que existen, (...) pueden existir infinitas circunferencias...

[Utiliza nuevamente la herramienta *Circunferencia por tres puntos*, mueve el mouse mientras la pantalla presenta distintas circunferencias (Figura 7) y al final determina una cuarta circunferencia que hemos dejado en línea continua].

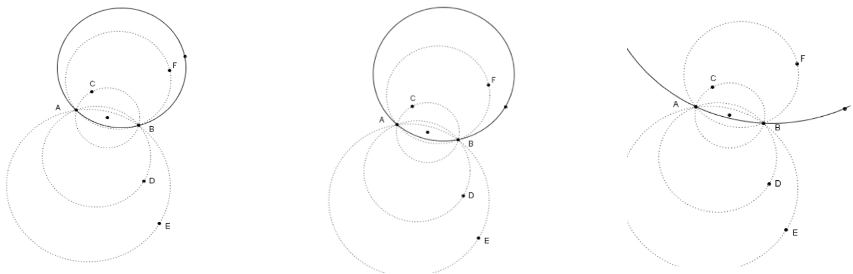


Figura 7

Para EA tiene lugar la adopción de un procedimiento de construcción de circunferencias bajo las condiciones establecidas [las2]. Este involucra el comando C3P y la observación de la variación de la circunferencia, dado el arrastre del tercer punto; lo anterior le permite garantizar que las circunferencias pueden ser infinitas [OEC]. El interés de EA por encontrar "infinitas circunferencias" se evidencia en la ejecución de acciones para determinar la generalidad del resultado

[FTH]. En este punto no observamos que los estudiantes reconozcan alguna función nueva para los comandos involucrados; en consecuencia, no hay indicio de instrumentalización.

Determinación de los centros de las circunferencias

Una vez han construido en GeoGebra lo solicitado, P1 les pide determinar la ubicación de los centros de las circunferencias construidas. Los estudiantes tienen en pantalla la construcción realizada (Figura 7) mientras conversan.

2 EA Pues igual que lo hicimos ahorita, con la mediatriz.

3 EB Digamos, para mostrar esto podemos escoger cualquier circunferencia… por ejemplo, esta [con el mouse recorren la circunferencia que contiene a los puntos *A*, *B* y *D*].

4 EA Bueno, borremos las otras y dejemos solo una [con la opción *ocultar objeto*, oculta todas las circunferencias distintas a la seleccionada [Figura 8].

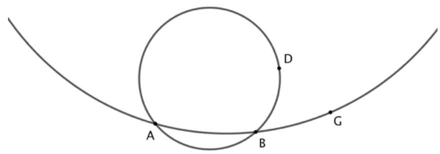


Figura 8

[Pasan unos minutos mientras piensan cómo abordar el problema. Al parecer no saben cómo determinar el centro vía la mediatriz, idea sugerida por EA al inicio de la conversación].

5 EA O sea, (…), el medio lo determinamos con (…). Con los segmentos (…) al inicio para formar la [primera] circunferencia [construida].

[EB pide a EA "devolver los pasos", para hacer visibles todas las construcciones que previamente habían ocultado hasta llegar al primer paso de la construcción realizado, esto es, el segmento *AB*].

Los estudiantes plantean la posibilidad de usar parte del procedimiento que los llevó a construir la primera circunferencia [2] para hallar los centros [ESP]. Sin embargo, aunque dejan visible solamente una circunferencia [4] [MVA] para efectuar el procedimiento sobre esta [ESP], no ejecutan el plan fluidamente, hacen varias pausas. Esto puede ser porque las condiciones son distintas a las que se tenían al momento de construir la primera circunferencia, bien sea por el objeto a construir o por la ubicación de los puntos *A*, *B* y *C*. Surge un limitante al procedimiento [Isa2] que les dificulta su uso. Por eso deciden retomar el proceso desde el inicio.

Retoma de propuestas antiguas

Teniendo únicamente los puntos *A* y *B* en pantalla EA comenta a su compañero:

> Trazamos el segmento (...) *AB*. La mediatriz (...) y ubicamos la intersección [la mediatriz y el segmento se ocultan]. Teniendo el punto medio del segmento *AB* [que llamaron *C*], podemos utilizar la herramienta *Compás* para poder ubicar la circunferencia que contenga los dos puntos [realiza la acción seleccionando primero el punto *A*, el punto *B* y finalmente el punto medio de nuevo] (Figura 9). Como ya tenemos la circunferencia, y para demostrar[4] que el punto (...) *C* [nombra así el punto resultante] es el punto, ¿ah? Para demostrar que este punto [*C*] es el punto medio de la circunferencia podemos hacer cualquier segmento [construye un segmento con extremos en el punto *C* y un punto *D* sobre la circunferencia distinto a *A* y *B*] hasta cualquier punto de la circunferencia [construye el segmento *CE* de la misma forma] y hallar la distancia, entonces podemos demostrar que la distancia es 3,2 y este otro 3,2 [son valores mostrados en pantalla al utilizar la herramienta distancia en los dos segmentos construidos]. Igual podemos hacer cualquier punto [construye el punto *F* sobre la circunferencia y lo arrastra sobre esta] y trazar el segmento [*CF*] y pues también podemos aquí hallar la distancia de este punto a acá [refiriéndose a los puntos *C* y *F*] (...) pues lo podemos mover [punto *F*] y uno se da cuenta que siempre es la misma distancia [idea apoyada en la conservación de la medida], así uno se da cuenta que es el punto medio.

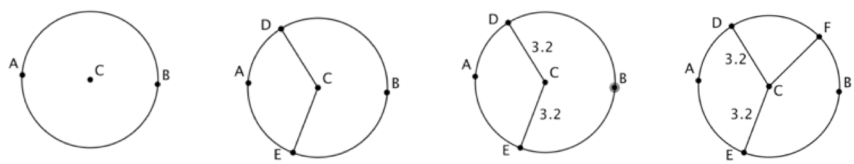


Figura 9

[4] En Colombia los estudiantes utilizan esta palabra coloquialmente para mostrar algo. La palabra está incorporada al lenguaje en contextos amplios y no necesariamente académicos.

Los estudiantes usan de nuevo el procedimiento para construir la circunferencia para la cual el segmento *AB* es diámetro. Al parecer, reconocen este procedimiento como efectivo en esta situación [Isa4] y sobre el mismo establecen un orden [Ias2]. A diferencia de la primera vez que lo usaron, involucran un procedimiento adicional para corroborar que el punto *C* es centro de la circunferencia [Ias3]. Esto último lleva a elaborar una estrategia para corroborar tal propiedad [FTH], apoyados en las herramientas *Segmento* y *Distancia o longitud*, acompañado de un discurso que justifica la forma de proceder y el resultado obtenido [Ias1], es decir, que el punto *C* es efectivamente centro de la circunferencia [OEC]. Luego, EA relee el enunciado del problema donde está la pregunta y EB sugiere reportar los pasos de construcción para responder [ESP], pero su iniciativa no tiene mayores avances y nuevamente quedan sin saber qué hacer. Esto último se debe a la forma en que han sido construidas las otras circunferencias.

Descubrimiento de un nuevo procedimiento

Después de haber manifestado un estado de incertidumbre reiterado, EA encuentra la forma de determinar los centros de las circunferencias construidas con el comando C3P y así se lo comunica al profesor.

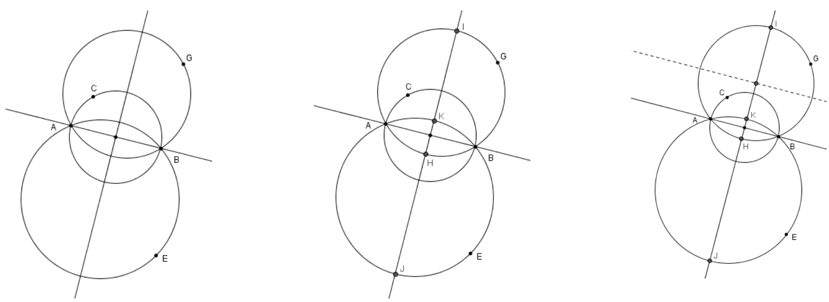


Figura 10

24 EA Pues hacemos lo mismo que hicimos ahorita. Trazamos una recta [*AB*], el segmento AB y la mediatriz [del segmento]. Entonces uno se da cuenta que la mediatriz del segmento *AB* [con el mouse la señala y recorre] tiene varias intersecciones con las distintas circunferencias que hay (Figura 10). Entonces, pues, ubicamos los puntos de las intersecciones [determina los puntos *H* e *I* de intersección de la circunferencia que pasa por los puntos *A*, *B* y *G*] y trazamos el segmento [*IH*]. Entonces así podemos sacar la mediatriz de este punto [*I*], (...), de este segmento que acabamos de hacer [*IH*] y ahí ubicamos el punto medio [determina la intersección del segmento *IH* y su mediatriz], entonces el punto medio sería este [intersección determinada], de la circunferencia [es decir, el centro de la circunferencia]. Se puede hacer [el procedimiento] con todas [las circunferencias] porque (...) porque las circunferencias que van a resultar siempre van a estar, o sea siempre van a estar ubicadas en línea recta. Porque como ya tenemos los puntos dados [refiriéndose a *A* y *B*], digamos, acá [utiliza la herramienta C3P señalando a los puntos *A* y *B* y un nuevo punto sobre la pantalla] uno se da cuenta que la circunferencia [manipula la circunferencia que se está determinando por *A*, *B* y el puntero del mouse] siempre está ubicada en (...) así [muestran distintas posiciones de la circunferencia].

25 EA Estoy intentando decir que la mediatriz del segmento *AB* está dividiendo la circunferencia, que siempre la divide de la misma forma, así esté más grande, la circunferencia siempre va a abrir de modo que la mediatriz la divide en dos partes iguales. Entonces así se puede hallar que, utilizando la mediatriz del segmento [*AB*] para hallar el punto medio [el centro de cada circunferencia], siempre puedo utilizar la mediatriz. Ubicamos las intersecciones acá [determina las intersecciones entre la mediatriz y una de las circunferencias], trazamos el segmento [determinado por estos puntos de intersección] (...) ubicamos las intersecciones. Bueno, trazamos las intersecciones, tenemos el segmento (...)

26 A1 ¿Cuál segmento?

27 EA El segmento (...) es que por medio de la mediatriz ubicamos los dos puntos que intersecan con la circunferencia, con cualquiera de la que estemos utilizando; en este caso utilizamos esta [seleccionan una de las circunferencias ya construidas] y trazamos el segmento [con extremos en las intersecciones con la mediatriz de *AB*] para poder establecer el punto medio [el centro] pero utilizando la mediatriz [del nuevo segmento]. Ahora del segmento que acabamos de hacer y nos damos cuenta de cuál es el punto medio (...). Ubicamos el punto medio y si lo queremos comprobar hacemos lo mismo que ahorita, con cualquier segmento. Ubicamos cualquier segmento y miramos su longitud.

[Reproduce el procedimiento para corroborar si el punto de intersección del segmento *IH* y su mediatriz es centro de la circunferencia].

28 EA Nos damos cuenta que efectivamente es el punto medio de la circunferencia que acabamos de estudiar. Ahora dice (...) [Lee] con base en lo realizado escribe la conjetura.

El procedimiento sugerido por EA consiste en determinar, para cada circunferencia, sus puntos de intersección con la mediatriz del segmento *AB*. Estos puntos determinan un segmento, al cual le construyen su mediatriz (que no es la misma mediatriz del segmento *AB*), lo que lleva a obtener el centro de la circunferencia. EA afirma dos hechos para este procedimiento: (1) la mediatriz del segmento *AB* interseca a cada circunferencia en dos puntos [24] y (2) el punto de intersección entre el segmento cuyos extremos son las intersecciones obtenidas en (1) y su mediatriz es el centro de la circunferencia [27].

Los estudiantes descubren un nuevo procedimiento, que les permite determinar el centro de las circunferencias construidas con el comando C3P [Ias1]. Explicitan en su diálogo el esquema asociado a este procedimiento [Ias2] para involucrarlo en adelante. Al mismo tiempo, descubren una función adicional [Isa3] para la mediatriz del segmento[5] *AB*, particularmente la obtención de puntos de intersección con cada circunferencia; con ello pueden determinar sus centros [Isa1]. Además, reconocen el procedimiento señalado al final de [27] como medio de verificar la propiedad *ser centro de la circunferencia* en este contexto [Isa4], mencionando además la forma en que este procedimiento se ejecutaría [27], lo que nos lleva a asegurar que han reconocido un procedimiento para usarlo en adelante [Ias2]. La forma en que construyen las circunferencias que contienen a los puntos y involucra nuevamente el comando C3P, lo que da evidencia de que ese comando ha sido asociado a ese producto y lo reconocen, por lo menos EA, como medio para alcanzar ese fin [Isa4].

En términos del proceso de resolución, EA traza y ejecuta un plan [ESP], suministrando una explicación empírica a su proceder [24] que se apoya en el uso de la función de arrastre de GeoGebra para determinar la generalidad de su hipótesis [FTH]. En esa misma intervención EA anticipa los resultados que obtendrá al replicar el procedimiento usado y ejecuta acciones para validar su hipótesis. Además, en [25] utiliza ejemplos concretos con miras a establecer resultados [FTH]. El proceso que EA describe en [24] goza de un orden en su formulación; esto es, EA opera de manera ordenada los datos que provienen de distintas fuentes [MVA] y finalmente suministra una justificación al cumplimiento de la propiedad [OEC] con base en otro procedimiento elaborado previamente [27], [28].

Aun cuando los estudiantes no replican el procedimiento con una nueva circunferencia, aseguran que se obtendrá un resultado similar en las otras

5 Antes la usaban para determinar el punto medio del segmento *AB* y en consecuencia el centro de la circunferencia para la cual este segmento es diámetro.

circunferencias, construidas con el comando C3P, dada la relación de estas con la mediatriz del segmento *AB* y su comprobación a través de la función de arrastre de GeoGebra [Isa4].

Establecimiento de una propiedad

Hasta el momento, los estudiantes solo se han enfocado en determinar los centros de cada circunferencia y su construcción es compleja por la cantidad de objetos involucrados (Figura 11; hemos punteado las mediatrices construidas hasta el momento y la recta *AB* para distinguirlas en la construcción). P2 ahora cuestiona a los estudiantes sobre la propiedad de los centros de las circunferencias:

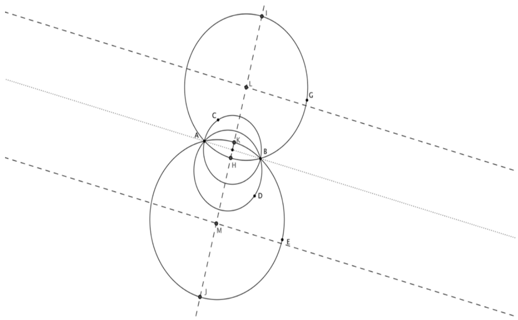


Figura 11

37	P2	Bueno, ¿pero dónde están esos centros?
38	EB	En la mediatriz del segmento *AB*. Es que mira [señala la pantalla].
39	P2	Listo, [...]. Pero mira que lo que tu acabas de decir está bien (...) ¿por qué no lo escribes? [dirigiéndose a EB], ¿qué es lo que acabas de decir? [dirigiéndose a EA], es que se me olvidó. Estaba concentrada en lo que dice tu compañero [EB]; vuélvelo a decir.
40	EA	Yo dije que siempre hay intersección (...) es que lo puedo decir de otra forma. Digamos que el centro es la intersección del diámetro con la mediatriz.
41	P2	La intersección del diámetro. Pero mira que, acá en esta circunferencia [refiriéndose a la circunferencia cuyo centro es el punto *M*] este [segmento *AB*] no es el diámetro [EA y EB guardan silencio]. Vuélvelo a decir a ver si te entiendo.
43	EA	Tengo los puntos *A* y *B* que están en (...), que pertenecen a la circunferencia (...) el centro es (...) la intersección (...) la intersección del diámetro [con su mano recorre el diámetro de la circunferencia con centro *M* que es perpendicular al segmento *JK*] y la mediatriz [mueve su mano de arriba abajo recorriendo la mediatriz del segmento *AB*].

P2 les pide a los estudiantes que se concentren en los puntos *A* y *B*. Les pregunta cómo construirían los centros de las circunferencias que contienen a los puntos *A* y *B*. Para responder, los estudiantes reconstruyen el procedimiento en GeoGebra, a partir únicamente de los puntos *A* y *B*, pasando por la circunferencia para la cual el segmento *AB* es diámetro y algunas circunferencias que contienen a los puntos *A*, *B* y un tercer punto cualquiera. Al final EA menciona:

44	EA	Es que cuando uno utiliza (...) cuando uno construye la circunferencia (...) lo que quería decir es que la mediatriz del segmento [*AB*] siempre divide la circunferencia [todas las que se han construido] en dos.

En este punto termina el trabajo realizado por esta pareja. Hay cuatro asuntos para resaltar:

- El proceso de construcción empleado para determinar los centros de las circunferencias que contienen los puntos *A* y *B* es válido. Es un procedimiento que efectivamente provee los centros de las circunferencias. Aun cuando los estudiantes no dicen el motivo por el cual el procedimiento funciona (en términos teóricos), logran proveer una justificación al resultado de este y verifican que los puntos son centros de las circunferencias, valiéndose de la definición de circunferencia, conocida con anterioridad, a través de un mecanismo que involucra los comandos *Segmento* y *Distancia o longitud*.
- Lo que en cada circunferencia construida (distinta a la primera) era para los estudiantes su diámetro, era el segmento determinado por los puntos de intersección entre esa circunferencia y la mediatriz del segmento *AB*. Los estudiantes no involucraron algún comando para corroborar esto y no suministraron alguna explicación. Esto nos lleva a cuestionar si ellos reconocían este segmento como el diámetro a partir de alguna propiedad conocida o simplemente porque en la representación así lo parecía. Dada la ausencia de una justificación verbal o del uso de las herramientas de GeoGebra para corroborarlo, tenemos inclinación por la segunda opción.
- Destacamos la formulación de cuatro conjeturas durante la conversación que se presentó. Solo una de estas reporta la propiedad de los centros de las circunferencias que contenían tanto al punto *A* como al punto *B* [38]. En otra, EA comunica una propiedad que no tiene relación con lo que el enunciado del problema solicitaba [44], aunque retoma una idea que en

otro momento permitió garantizar la validez del procedimiento para determinar los centros de las circunferencias construidas con el comando C3P. Aun así, debemos mencionar que esta propiedad reportada por EA es fruto de la observación realizada anteriormente y los resultados corroborados a través de la función de arrastre [OEC]. En las otras dos, EA establece una relación similar entre un segmento y una mediatriz [40, 43]. En las intervenciones afirma que el centro de las circunferencias es la intersección entre estos dos objetos geométricos.

– En una conjetura EA menciona que "el centro es la intersección del diámetro con la mediatriz" [40]. Nos llama la atención la generalidad con la que se refiere a esta propiedad. Da lugar a pensar que está evocando el resultado del procedimiento planteado para determinar los centros de las circunferencias. En consecuencia, EA propone una propiedad en función de las acciones realizadas y corroboradas por él en algún momento; es decir, formula resultados, fruto de la observación [OEC]. Sin embargo, no tenemos evidencia clara para dar peso a esta interpretación debido a que P2 creyó que EA se refería al segmento *AB* y la mediatriz de ese segmento. Una forma de haber profundizado en la idea reportada por EA hubiera sido solicitar que él explicitara los objetos a los que hacía mención o que explicara el motivo por el cual proponía esta propiedad.

DISCUSIÓN

La descripción del proceso de resolución del problema por parte de esta pareja nos brinda elementos para interpretar su comportamiento y reconocer la sinergia entre el SGD y el razonamiento científico.

El dúo razonamiento científico y uso de GeoGebra en la resolución del problema

En términos generales, esta pareja involucró comandos de GeoGebra de manera novedosa para abordar el problema propuesto y movilizó aspectos del razonamiento científico. Estos elementos constituyeron un dúo que permitió a los estudiantes llevar a cabo la actividad matemática de resolución de un problema. Presentamos un análisis del dúo generado en esta pareja.

En la Tabla 4 resumimos las acciones realizadas, en correspondencia con los indicadores adoptados para rastrear el razonamiento científico.

Tabla 4. Momentos de resolución

Acción **Momento**	**Explorar de manera sistemática un problema [ESP]**	**Formular y testar hipótesis [FTH]**	**Manipular variables aisladas [MVA]**	**Observar y evaluar consecuencias [OEC]**
Construcción de las circunferencias		Cuestionamiento y ejecución de acciones para saber si hay distintas circunferencias que contienen a los puntos *A* y *B*.		Se formula una propiedad sobre la existencia de infinitas circunferencias que contienen a los puntos *A* y *B*.
Determinación de los centros	Se establece y ejecuta un plan para determinar centros de circunferencias construidas con C3P.		En pantalla solamente se deja una circunferencia sobe la cual implementar el plan trazado.	
Retoma de propuestas antiguas	Se listan los pasos de un procedimiento para obtener un resultado particular.			Se provee justificación al hecho de que la intersección de un segmento y su mediatriz es centro de la circunferencia.
Descubrimiento de un nuevo procedimiento	Se traza y ejecuta un plan para determinar un segmento en cada circunferencia que sea diámetro de la misma.	Se involucra la función de arrastre para verificar la validez de una hipótesis: la mediatriz del segmento *AB* divide todas las circunferencias en dos. Se usan ejemplos particulares.	Las construcciones realizadas atienden a una estructura organizada observada en el discurso de los estudiantes.	Se involucra un procedimiento conocido, sobre el que conoce su validez, para justificar que el resultado obtenido en esta oportunidad es efectivamente el deseado.
Establecimiento de una propiedad				Se formulan como propiedades: (i) la mediatriz siempre divide la circunferencia en dos y (ii) el centro es la intersección del segmento y su mediatriz.

Podemos reconocer cuatro momentos en los que tuvieron lugar acciones correspondientes con al menos un indicador del razonamiento científico. En un primer momento, se formularon hipótesis sobre la existencia de infinitas circunferencias que contuvieran a los puntos *A* y *B*. El ejercicio de corroborar esta idea se favoreció por el uso de la función de arrastre de GeoGebra. En un segundo momento, GeoGebra permitió manipular los objetos construidos con el fin de ejecutar el plan trazado, infortunadamente sin resultados favorables para el grupo. En un tercer momento, los comandos *Segmento* y *longitud o Distancia* permitieron establecer una estrategia para tener la certeza de un procedimiento que se conocía con anterioridad, lo cual llevó a proponer una justificación empírica sobre su validez. En el cuarto momento, se propuso un plan de acción y este se ejecutó organizadamente, permitiendo que la función de arrastre diera lugar a la observación y formulación de un invariante que conllevaría al establecimiento de un procedimiento para solucionar el problema. Al final, las propiedades que se reportan como solución al problema atienden al proceso realizado con ayuda de GeoGebra. Este recorrido permite apreciar cómo se presentaron aspectos del razonamiento científico, donde el SGD dio elementos para descubrir, verificar y formular propiedades que en conjunto permitieron solucionar el problema.

A lo largo del análisis pudimos evidenciar que los estudiantes desplegaron cuatro procedimientos de acuerdo con sus necesidades: (1) la construcción de una circunferencia para la cual un segmento se convierte en diámetro; (2) la construcción de circunferencias que contengan a dos puntos *A* y *B* y un tercer punto tomado al azar; (3) la verificación de que un punto es centro de una circunferencia; (4) la construcción del diámetro de una circunferencia para determinar su centro. La interacción oral no permitió evidenciar que ellos llevaran a cabo un proceso de experimentación; más bien apreciamos un conocimiento previo sobre la forma de utilizar el comando C3P. Sin embargo, cuando los estudiantes tuvieron que afrontar el reto de determinar el centro de las circunferencias construidas con C3P, emergió un procedimiento desconocido por ellos. En esta emergencia, la función de arrastre fue determinante al permitir a los estudiantes experimentar con una de estas circunferencias vista como una representante de una familia, para corroborar su hipótesis. Este resultado fue útil para los estudiantes: pudieron involucrar nuevamente los procedimientos que conocían, modificaron esquemas que habían desarrollado, determinaron los centros de las circunferencias construidas y corroboraron que estos efectivamente satisfacían tal propiedad. Lo anterior muestra que la exploración realizada por los estudiantes con el apoyo de GeoGebra les permitió obtener evidencia empírica de la generalidad de una propiedad y apropiarse de la misma como parte de su conocimiento para poder establecer conexiones con otros resultados conocidos con anterioridad, aspecto característico del razonamiento científico (Klahr y Dunbar, 1988).

El razonamiento científico exhibido en el reconocimiento y uso de las herramientas de GeoGebra nos permitió determinar el grado en que los procesos de instrumentación e instrumentalización tuvieron presencia. En la Tabla 5 se recoge, para cada herramienta involucrada, los aspectos observados de cada proceso.

En términos generales, los estudiantes reconocieron la forma de utilizar los comandos y procedimientos involucrados al abordar el problema o la posibilidad de conectarlos con otros ya conocidos. Este reconocimiento involucró aspectos del razonamiento científico como la planeación de una estrategia, la formulación de hipótesis sobre sus resultados, la operación de las variables involucradas y la observación de resultados con miras a validar o rechazar hipótesis, permitiendo así el reconocimiento de posibilidades para resolver el problema.

Encontramos evidencias del reconocimiento de posibilidades y limitaciones de algunos comandos al involucrarlos para resolver la tarea, asunto que permite asegurar que se dan indicios de instrumentalización. Particularmente, podemos mencionar que tiene lugar la modificación de funciones originales del artefacto mediatriz, utilizado para poder determinar diámetros en las circunferencias. En los otros casos, aun cuando los estudiantes descubren y reconocen artefactos como medios para la obtención de fines, no tuvo lugar una modificación en el uso de estos. De acuerdo con Alqahtani y Powell (2016), creemos que el artefacto se utiliza con el mismo fin para el cual se construyó, lo que no demanda enriquecer o modificar sus propiedades al incorporarlo. Este asunto es motivado por el tipo de problema propuesto, donde se debía repetir el uso del mismo artefacto varias veces. No hicimos observaciones en situaciones donde por limitaciones en el uso de algún artefacto se hubieran buscado otras formas de incorporarlo o de apropiarse de otro que permitiera resolver el problema. Considérese, por ejemplo, que se debiera construir una circunferencia que contuviera dos puntos y que además fuera tangente a una recta. En este caso el comando C3P no podría involucrarse de la forma que se hizo en esta oportunidad.

Tabla 5. Vestigios de instrumentación e instrumentalización

Comando		C3P	Segmento y longitud o distancia	Segmento, mediatriz y compás	Mediatriz segmento
Función		Construir circunferencias que contengan puntos *A* y *B*.	Corroborar si un punto es centro de circunferencia.	Construir circunferencia donde un segmento es diámetro y el punto medio es centro.	Determinar diámetro de circunferencia.
Instrumentalización	Isa1	No. La función del comando se conoce con anterioridad.		No. La función de los comandos se conoce con anterioridad.	Sí. La mediatriz es usada para descubrir puntos que determinan diámetros.
	Isa2	No. No se presentaron limitaciones en su uso.		Sí. Determinar centro de circunferencia dada por C3P.	No. No se reconocen limitaciones en su uso.
	Isa3	No. Solo se reconoció un propósito para su uso.		No. Solo se reconoció un propósito para su uso.	Sí. Se reconocen 2 usos: construir circunferencia donde segmento *AB* es diámetro y determinar intersección con circunferencias.
	Isa4	Sí. C3P se utilizó siempre con esa función.	Sí. El procedimiento que involucraba estas herramientas se reconoció como apropiado en ese contexto para su función.	Sí. Cuando se contaba con los puntos *A* y *B* la primera circunferencia se construía de la misma forma.	Sí. Se reconoce que siempre será posible involucrar el procedimiento para las circunferencias dadas por C3P.
Instrumentación	Ias1	Sí. Se reconoce la posibilidad de involucrar C3P bajo un esquema determinado y obtener circunferencias distintas.	Sí. Se implementa un esquema para corroborar la propiedad "ser centro de circunferencia".	Sí. Se reconoce un esquema para determinar los diámetros de las circunferencias.	Sí. Se reconoce un esquema para construir una circunferencia para la cual un segmento sea su diámetro.
	Ias2	Sí. Se adopta un esquema para involucrar el comando en adelante.	Sí. Se establece un esquema para involucrar el procedimiento en reiteradas oportunidades.	Sí. Es explícito el esquema involucrado para construir la circunferencia.	Sí. Se establece un esquema para incorporar el procedimiento, aunque solo se involucra una vez.
	Ias3	No. El esquema no se modifica.	No. El esquema no se modifica.	Sí. El esquema se adapta con el fin de corroborar que el punto es efectivamente centro.	No. El esquema no se modifica.
	Ias4	No. Situación poco analizada. Habría que ver el comportamiento al abordar otros problemas.			

Respecto a la instrumentación, podemos decir que aparecieron esquemas de utilización de los comandos involucrados y que esto se favoreció por el desconocimiento de muchas herramientas de GeoGebra. Sin embargo, los esquemas desarrollados no se modificaron, salvo en el esquema desarrollado por la pareja para determinar los centros de las circunferencias construidas con C3P y en las afirmaciones realizadas para respaldar su validez. Al procedimiento que los estudiantes conocían para construir una circunferencia a partir de su diámetro y determinar su centro ellos adhirieron otros pasos que permitieron ampliar su alcance para determinar el centro de otras circunferencias. Es un esquema que tiene validez en casos muy particulares. Sin embargo, a la luz de las ideas propuestas por Samper *et al.* (2013), este resultado brinda evidencia sobre la actividad matemática exhibida por los estudiantes y el papel que el recurso tecnológico y el razonamiento desempeñaron.

CONCLUSIONES

Nuestro objetivo al presentar el análisis es aportar a la comprensión de la sinergia que se produce entre el razonamiento científico y el uso de un SGD, mediante el estudio de caso de una pareja de estudiantes. En lo que sigue ilustramos esta idea, apoyados en los resultados del estudio realizado.

Con base en las ideas de Samper *et al.* (2013) y Trouche (2014), sobre la interacción de un individuo con artefactos y la mediación de estos en la generación de conocimiento, mostramos la forma en que una pareja de estudiantes involucró el SGD GeoGebra en la resolución de un problema. Resaltamos que la relación artefactos-individuos se estimula por los procesos de razonamiento ejecutados por los estudiantes, que son promovidos por la tarea propuesta. La naturaleza de la tarea y el desconocimiento de muchas herramientas del SGD los llevó a contemplar estrategias de solución como parte de su actividad matemática involucrando el recurso del que disponían.

Reconocemos en la situación presentada el rol protagónico asumido por GeoGebra para afrontar el problema y la emergencia de esquemas asociados a algunos comandos del software. Las acciones y modos de proceder de la pareja examinada dejan ver el efecto de la sinergia entre el uso de los recursos y acciones propias del razonamiento científico que permitieron a los estudiantes reconocer en algunos comandos, de manera individual o en conjunto, formas para alcanzar propósitos específicos. Este ejercicio permitió identificar artefactos que evolucionaron en instrumentos para los estudiantes. Aun así, resaltamos el carácter subjetivo de la relación artefactos-individuos (Alqahtani y Powell, 2016), asunto evidente en la forma en que la pareja analizada involucró los artefactos y desarrolló para estos esquemas particulares.

La resolución del problema brindó a los estudiantes, gracias al uso del SGD, la oportunidad de experimentar e indagar, apoyándose en objetos y relaciones geométricas no todas conocidas anteriormente por ellos. El abanico de posibilidades que el software ofrece les permite experimentar y someter a prueba ideas, en función de los alcances y limitaciones de los comandos usados, lo cual da evidencia empírica para poder validar o rechazar las ideas y, en consecuencia, ampliar el conjunto de conocimientos que tienen. Uno de los aspectos característicos del razonamiento científico, es la conexión que se establece entre el conocimiento de los individuos y los resultados obtenidos en un proceso de experimentación (Klahr y Dunbar, 1988) y en esta vía, se reconoce al SGD como un promotor de acciones ligadas a este proceso cognitivo.

Las ideas mencionadas anteriormente permiten comprender la sinergia surgida entre el razonamiento científico desplegado por los estudiantes y el uso de GeoGebra, lo que lleva a la conformación de un dúo que impulsa procesos propios de la actividad matemática esperada en la escuela. Como ilustramos, cada proceso de vio favorecido por la actuación conjunta de estos dos elementos. De ahí que se considere la necesidad de explotar dicho dúo de manera más decidida el nivel escolar. Además, el análisis presentado deja ver la necesidad de herramientas apropiadas de las que se pueda disponer para que acciones propias del razonamiento científico puedan emerger, dada la demanda que impone realizar acciones de esta naturaleza. Lo anterior se apoya en la naturaleza de los indicadores propuestos para analizar el proceso de resolución de la pareja de estudiantes y la forma en que el SGD se involucró en este.

REFERENCIAS

Alqahtani, M., y Powell, A. (2016). Instrumental appropriation of a collaborative, dynamic-geometry environment and geometrical understanding. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 4*(2), 72–83. doi: 10.18404/ijemst.38054

Alshamali, M., y Daher, W. (2015). Scientific reasoning and its relationship with problem solving: The case of upper primary science teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(6), 1003–1019. doi: 10.1007/s10763-015-9646-1

Bakker, A., y van Eerde, D. (2015). An Introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner-Ashbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 429–466). Países Bajos: Springer. doi: 10.1007/978-94-017-9181-6

Bao, L., Cai, T., Koenig, K., Fang, K., Han, J., Wang, J., ... Wu, N. (2009). Learning and scientific reasoning. *Science*, *323*(5914), 586-587. doi: 10.1126/science.1167740

Dunbar, K., y Klahr, D. (2012). Scientific thinking and reasoning. En K. Holyoak y R. Morrison (Eds.), *The Oxford Handbook of Thinking and Reasoning* (pp. 701–718). Nueva York, EUA: Oxford University Press.

Hogan, K., Nastasi, B., y Pressley, M. (1999). Discourse patterns and collaborative scientific reasoning in peer and teacher-guided discussions. *Cognition and Instruction*, *17*(4), 379–432. doi: 10.1207/S1532690XCI1704_2

Klahr, D., y Dunbar, K. (1988). Dual space search during scientific reasoning. *Cognitive Science*, *12*(1), 1–48. doi: 10.1207/s15516709cog1201_1

Lawson, A. (2004). The nature and development of scientific reasoning: A synthetic view. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*(3), 307–338. doi: https://doi.org/10.1007/s10763-004-3224-2

Leung, A., Chan, Y., y López-Real, F. (2006). Instrumental genesis in dynamic geometry environments. En C. Hoyles, J.-B. Lagrange, L. H. Son y N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference: "Technology Revisited"*, *17*, (parte 2, pp. 346–353). Hanoi, Vietnam: Hanoi University of Technology. Recuperado de http://ims.mii.lt/ims/konferenciju_medziaga/TechnologyRevisited/c65.pdf

Martínez, E., (2016). *Hacia un ambiente de indagación en una clase de geometría* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. Colombia

Morris, B., Croker, S., Masnick, A., y Zimmerman, C. (2012). The emergence of scientific reasoning. En H. Kloos, B. J. Morris y J. L. Amaral (Eds.), *Current Topics in Children's Learning and Cognition* (pp. 61–82). IntechOpen. doi: 10.5772/53885

Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional: Formación de Profesores*, *53*(2), 129–150. Recuperado de http://www.perspectivaeducacional.cl/index.php/peducacional/article/view/200

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies, Approche Cognitive des Instruments Contemporains*. Paris: U. Série Psychologie.

Samper, C., Camargo, L., Molina, Ó., y Perry, P. (2013). Instrumented activity and semiotic mediation: Two frames to describe the conjecture construction process as curricular organizer. En A. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 145–152). Kiel, Alemania: PME.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, Ó., y Echeverry, A. (2010). Geometría dinámica: Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces. *Educación Matemática*, 22(3), 119–142.

Samper, C. y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *50*, 367–382. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/828/1346

Trouche L. (2005) An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. In: Guin D., Ruthven K., Trouche L. (eds) The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Mathematics Education Library, vol 36. Springer, Boston, MA

Trouche, L. (2014). Instrumentation in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 307–313). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

White, T. (2008). Debugging an artifact, instrumenting a bug: Dialectics of instrumentation and design in technology-rich learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(1), 1–26. doi: 10.1007/s10758-007-9119-x

Yackel, E. y Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227–236). Reston, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

Camilo Sua Flórez

Domicilio: Oficina 110, Edificio B. Calle 72, Núm. 11-86,
Código Postal 110711, Bogotá, Colombia

Teléfono: (57-1) 594 1894 Ext. 387.

 DOI: 10.24844/EM3101.02

El aprendizaje autónomo, favorecedor de la experiencia adaptativa en alumnos y docentes: la división con números decimales

Autonomous learning helps out adaptive expertise of students and teachers: the division with decimal numbers

Mercedes María Eugenia Ramírez Esperón[1]
David Alfonso Páez[2]
Daniel Eudave Muñoz[3]
Felipe Martínez Rizo[4]

Resumen: El estudio presente tiene el propósito de explorar cómo el aprendizaje autónomo favorece la experiencia adaptativa en alumnos y maestros de educación primaria. En la investigación participaron 30 alumnos de sexto grado y 12 maestros de 1er. a 6to. grados, ambas poblaciones de distintas escuelas ubicadas en México. Los participantes trabajaron fichas didácticas diseñadas para promover el aprendizaje autónomo mediante la creación de diferentes procedimientos no convencionales al resolver problemas de división. En estas fichas se pide estimar el cociente antes de efectuar operaciones aritméticas, esto como una forma de iniciar la comprensión del problema. En los diversos procedimientos generados por los participantes encontramos la estrategia de colocar las restas en los dividendos decimales parciales, la cual,

Fecha de recepción: 13 de noviembre de 2017. **Fecha de aceptación:** 27 de enero de 2019.

1 Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. mmramiremx@yahoo.com.mx orcid.org/0000-0003-4260-4884

2 Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. dapaez@correo.uaa.mx orcid.org/0000-0002-4499-4452

3 Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. deudave@correo.uaa.mx orcid.org/0000-0003-4070-3109

4 Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. felipemartinezrizo@gmail.com orcid.org/0000-0002-7519-4247

consideramos es una contribución a la docencia, debido a que les resultó eficaz para comprender el algoritmo estándar de la división con punto decimal. Para los maestros fue relevante analizar videograbaciones de sus clases y reflexionar sobre los procedimientos creados por sus alumnos.

Palabras clave: *desarrollar la autonomía del aprendiz, procedimientos significativos, restas en los dividendos decimales parciales, reflexión docente.*

Abstract: The present study has the purpose of exploring how the autonomous learning helps out adaptive expertise in elementary school students and teachers. The research involved 30 students of 6th grade and 12 teachers of 1st to 6th degrees, both populations of different schools located in Mexico. Participants solved worksheets designed to promote autonomous learning by creating different unconventional procedures to solve division problems. On these worksheets is requested to estimate the quotient before performing arithmetic operations, in order to start understanding the problem. In various procedures generated by the participants, we find the strategy of placing subtractions in the decimal partial dividends. We think this strategy is a contribution to teaching because it was effective in understanding division with decimal point. The teachers considered important to analyze their teaching practice through videotaping and reflect on solution procedures of their students.

Keywords: *developing learner autonomy, significant procedures, subtractions in the decimal partial dividends, teacher reflection.*

INTRODUCCIÓN

En diversas investigaciones (Brousseau, 2002; Brousseau, Brousseau, y Warfield, 2014; Graeber y Tirosh, 1990; Hiebert, 1992; entre otras) se ha mostrado que los alumnos tienen dificultad de resolver divisiones con números decimales, pues, por ejemplo, multiplican por potencias de diez tanto las cantidades del divisor como las del dividendo sin saber por qué, de modo que se vuelve complejo para ellos trabajar el algoritmo de la división. Ésta es una de las causas por las cuales nos parece pertinente tratar este contenido con alumnos y maestros desde un aprendizaje autónomo, pues de esta forma los participantes pueden mostrar procedimientos diferentes del canónico y poner en práctica su capacidad de reconocer y emplear diversos procedimientos que le sean significativos (experiencia adaptativa).

En adhesión con lo precedente, vinculamos la autonomía al aprendizaje de la división con números decimales en el divisor, porque existe un vacío en el tratamiento de este contenido en los libros de texto vigentes para el maestro de educación primaria en México, editados por la Secretaría de Educación Pública (SEP). En ellos se inicia el algoritmo en la galera en tercer grado (8 años) con base en ir seccionando el dividendo y dividiendo de manera parcial con un dígito en el divisor, manteniendo la resta en los dividendos parciales. Se continúa en cuarto grado (9 años) con este procedimiento, llamado "algoritmo desarrollado", con dos dígitos en el divisor, y observamos que en lecciones posteriores del libro de texto se les muestra el algoritmo convencional a través del valor posicional de la cantidad del dividendo y sin la resta incluida, lo cual consideramos no guarda relación con lo que se ha trabajado en lecciones precedentes (véase SEP, 2014a, 2014b, pp. 138-144 y 233-246, respectivamente).

En relación con las cantidades decimales, éstas se trabajan en el dividendo propuesto para tratarse en quinto grado (10 años), donde se explican mediante las anotaciones "décimos" o "centésimos" en los dividendos parciales del algoritmo convencional para indicar el porqué del punto decimal en el cociente, lo cual puede no ser significativo para comprender la cantidad decimal obtenida (SEP, 2014c, pp. 88, 91 y 92). Finalmente, en sexto grado (11 años) se les pide a los alumnos tratar problemas como la conversión entre euros y dólares (SEP, 2014d, p. 97) y a los maestros se les menciona que los estudiantes pueden recurrir a dividir dos cantidades decimales, por ejemplo, \$17.51 entre \$13.63 (SEP, 2014e, p. 152), pero no hay orientaciones precisas de cómo guiarlos en el tratamiento de la división con estas características, sólo se presenta el contenido "Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural" (SEP, 2011, p. 79).

Para conocer cómo se había trabajado la división con decimales buscamos libros de texto de épocas recientes anteriores y encontramos que el tratamiento didáctico de este tipo de división se iniciaba en los últimos grados (cuarto, quinto o sexto grados), teniendo en común la memorización de reglas para convertir la cantidad decimal del divisor en cantidad entera, multiplicando por potencias de diez, tanto del divisor como del dividendo. Además, si éste último quedaba con fracción decimal se les indicaba que sólo "subieran" el punto en el cociente

(SEP, 1960, 1969, 1974). Esta manera de suprimir el punto en el divisor a través de un razonamiento proporcional conlleva varios procesos cognitivos interrelacionados que pocos estudiantes alcanzan a comprender y por ello sólo memorizan la regla "se recorre el punto decimal tantas cifras..." y terminan operando con números enteros una situación que involucra cantidades decimales, donde puede existir la posibilidad de distanciar la situación planteada con las cantidades que se operan (Hiebert, 1992).

De acuerdo con lo anterior, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación: *¿qué papel juega el aprendizaje autónomo de la división para que el alumno llegue a comprender y emplear el algoritmo convencional de la división con números decimales?*, *¿qué procedimientos alternativos al algoritmo canónico muestran los alumnos al resolver problemas de división con números decimales?, y ¿qué opinan los maestros acerca de lo que puede surgir en su grupo mediante un aprendizaje autónomo de sus alumnos?* Esta última interrogante nos parece conveniente, porque nuestro interés es que el docente se observe y reflexione[5] en y sobre su práctica docente, de modo que planee de acuerdo con lo que puede manifestarse en su grupo de alumnos.

MARCO CONCEPTUAL

Iniciaremos mencionando que en el contexto de la educación, Carter y Fleener (2002), Kamii (1994) y Piaget e Inhelder (1993), entre otros, señalan que la autonomía significa que los aprendices gobiernan sus propias acciones sin depender de otros, al mismo tiempo que se autorregulan conforme a un núcleo de conocimientos y valores (respeto mutuo, cooperación, libertad de elección y toma de decisiones), lo cual amplía su potencial creativo en un ambiente social (Aebli, 1991; Solé, 1999). Estos aprendices elaboran razonamientos propios, empleando estrategias de manera flexible y favoreciendo su reflexión respecto de qué procedimientos parecen funcionar mejor en los distintos problemas tratados (Berk, Taber, Carrino, y Poetzl, 2009; NCTM, 2015).

Es importante subrayar que la autonomía se puede dar mediante un trabajo colaborativo, donde los aprendices comparten, comunican y evalúan diferentes maneras de resolver un mismo problema, y con ello promueven el conocimiento

[5] La reflexión le proporciona al profesor el conocimiento de saber cómo actúa en sus clases y cómo aprender de su práctica docente y del aprendizaje de sus alumnos (Bruno, Galuppo, y Gilardi, 2011; Lerman, 2001).

desde diversos puntos de vista, con lo que se favorece la independencia de los educandos, además de explorar los algoritmos generados por los propios alumnos (Ambrose, Baek, y Carpenter, 2003; Brousseau, 2000; Carter y Fleener, 2002; Rubenstein, 1998), y donde el papel del docente es transferir al escolar el control de su aprendizaje por medio del uso de estrategias o instrumentos de autoevaluación como el portafolios (Airasian, 2002; Martínez-Rizo, 2012). Además que el maestro debe crear las condiciones para devolver al alumno la necesidad de aprender, para lo cual requiere que el escolar haga anticipaciones y verifique sus conclusiones. Al final, el docente institucionaliza el conocimiento adquirido por la dinámica de la situación (Brousseau, 1988).

Coincidimos con Fagginger, Hickendorff y Van Putten (2016), quienes advierten que no basta con dar ejemplos, sino que se requiere que el escolar explore las características del problema y el docente observe este desempeño. En esta dirección Carrol y Poster (1998, p. 112) señalan que cuando se consideran separadamente los dígitos del dividendo, por ejemplo, "847 entre 9, los alumnos preguntan, ¿cuántas veces cabe el 9 en el 84?" dejan de lado el valor posicional de cada dígito. En relación con esto, Ramírez (2012) investigó sobre el aprendizaje autónomo de la división con dos dígitos en el divisor y encontró que en la mayoría de los *algoritmos alternativos* se consideraba la cantidad total del dividendo a través de resultados parciales, y ningún alumno separó los dígitos del divisor.

Respecto de la división con decimales, los docentes desean que sus estudiantes lleguen a comprender la división con decimales por su cuenta a través de la exploración, pero consideran que el tiempo es una dificultad a la que se enfrentan y por eso piden que los alumnos que resuelven primero los problemas correctamente expliquen a sus compañeros cómo lograron llegar al resultado, así la mayoría de los escolares están poco tiempo en un conflicto productivo (Hooper, 2015); sin embargo, no consideran que estas estrategias dan lugar a ideas significativas para el escolar, además que este tiempo se compensa al no tener que volver a enseñar y remediar algunos errores sistemáticos a los que se incurre por un algoritmo convencional que no se ha comprendido (Hierbert, 1992).

Por ello, consideramos fundamentales los procedimientos generados de manera autónoma, a través de la experiencia adaptativa personal, definida como la capacidad de reconocer y emplear múltiples procedimientos significativos de manera apropiada y creativa (Fagginger *et al.*, 2016; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, y Van Dooren, 2009). Complementando esta misma línea de ideas, Verschaffel *et al.* (2009) señalan que por medio de la dualidad flexibilidad-adaptabilidad se selecciona, consciente o inconscientemente, la estrategia de solución más apropiada en un contexto sociocultural dado; también Mercier y Higgings (2013) destacan la importancia de que el docente potencie esta dualidad estimulando y reconociendo la variedad de procedimientos autoconstruidos por los alumnos de educación elemental y dé oportunidades de reflexionar sobre los diversos procedimientos con el fin de que cada uno escoja alguno.

La precedente concepción acerca de reflexionar en su actividad tiene también cabida en el docente, la cual Schön (1987) define como un proceso de *reflexión en la acción*, donde el profesor debe analizar y buscar estrategias o soluciones que satisfagan las necesidades reales de sus alumnos de forma eficaz. Él presenta un modelo con tres fases: *conocimiento en la acción*, *reflexión en y durante la acción,* y *reflexión sobre la acción y sobre la reflexión en la acción.* Shön propone la cultura de aprender del otro, quien puede aportar ideas e iniciativas que sirvan para encontrar soluciones innovadoras a los problemas de la práctica y a ello llama *desacuerdos productivos*, los cuales son fuente de ideas creativas. Conjuntamente, investigadores como Cheng (2015) menciona que el uso del vídeo, como un recurso, ayuda al profesor a analizar en colegiado lo que acontece dentro del aula y, con ello, promover la reflexión tanto de su práctica como la de otros docentes. En esta línea de ideas, Murray (2015) formula un ciclo colaborativo de enseñanza reflexiva que comprende planear, enseñar y reflexionar.

DISEÑO METODOLÓGICO

La investigación aquí reportada es de corte cualitativo (Taylor y Bogdan, 1990). Se llevó a cabo con dos poblaciones diferentes en dos escuelas primarias públicas del estado de Aguascalientes (México) y en un ambiente de resolución de problemas: en una de ellas, con 30 alumnos de sexto grado (11-12 años) con intervención didáctica y en la otra con 12 maestros (de 1er. a 6to. grados) en la modalidad de curso-taller. En ambas poblaciones se usó el procedimiento "de resultados parciales" (Ramírez, 2012) para mostrar las operaciones subsumidas en la operación de dividir (suma, resta y multiplicación) sintetizadas en el algoritmo convencional. Ello con la finalidad de posteriormente dotar de sentido al algoritmo de división con decimales.

La toma de datos con los alumnos fue durante 25 sesiones y usamos cuestionarios (inicial y final) y 15 fichas didácticas[6] (10 de trabajo y cinco de

[6] Algunas de ellas fueron adaptadas de Ramírez (2012), véase Apéndice A.

autoevaluación) diseñadas con base en las fases de Polya (1965/2001): comprender el problema, trazar un plan con base en las relaciones entre los elementos que intervienen en el problema, implementar el plan y una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla para validar la respuesta con una visión retrospectiva.

En las fichas didácticas planteamos problemas relacionados con la vida cotidiana, evitando incluir datos irrelevantes, con un vocabulario comprensible para los alumnos y con tareas orientadas hacia un aprendizaje autónomo. Antes de resolver cada ficha didáctica se pedía a varios alumnos que leyeran en voz alta la situación y después a otros se les solicitaba que explicaran con sus palabras de qué trataba el problema, esto con la finalidad de contar con la certeza de que habían entendido la actividad, pues coincidimos con Aebli (1991, p. 154), quien señala: "una tarea especial de la lectura [es] que los alumnos aprendan a manejar de manera autónoma los textos y que aprendan a contemplar y comprender por sí mismos el asunto". Además en algunas fichas se pedía a los participantes re-escribir el problema, incluyendo la solución encontrada, esto lo usamos como una manera de regresar al problema para repensarlo y verificar si la solución encontrada correspondía a la situación planteada (última fase de Polya), y poner de manifiesto cómo fue entendida.

Las fichas eran calificadas al final de cada sesión puesto que dicha valoración servía de referencia para la escritura del diario escolar, donde anotaban sus reflexiones acerca de lo aprendido, lo que se le había dificultado, e incluso escribir algunos ejemplos de lo tratado en la sesión (Flückiger, 2005). En la sesión siguiente se realizaba la retroalimentación individual y grupal para lo cual se solicitaba a varios alumnos anotar su procedimiento en el pizarrón con la finalidad de que explicaran cómo habían resuelto el problema de división planteado en su ficha didáctica, y después se preguntaba al grupo si tenían maneras diferentes para que las mostraran a los demás y, finalmente, comparaban dichas soluciones.

Consideramos que de esta manera promovimos que los participantes conocieran diversos modos de solución para un mismo problema y favorecimos su comprensión al procurar entender las explicaciones de los demás. Concordamos con Yackel y Cobb (1996) en que en estas discusiones el maestro dota de sentido las argumentaciones de los alumnos y puede seleccionar otras situaciones más desafiantes en relación con las soluciones expuestas. Estas discusiones o normas sociomatemáticas influyen en las oportunidades de aprendizaje para que los alumnos logren ser intelectualmente autónomos.

De las 25 sesiones, con una duración aproximada de 90 minutos cada una, se eligieron cuatro de ellas para ser videograbadas[7] porque consideramos que aportan información relevante en nuestra investigación como: explicar los conocimientos producidos por otro compañero o los argumentos que dan los alumnos acerca de su aprendizaje de la división respecto de los distintos procedimientos generados por los participantes. Además de promover la comprensión conceptual a través de dar oportunidad a los estudiantes de preguntar, discutir, explicar y compartir sus estrategias (An, 2009). Las primeras cinco sesiones fueron para trabajar el sistema de numeración decimal y operaciones de suma, resta y multiplicación con cantidades decimales dadas con materiales manipulativos a través del juego "El banco". Al respecto, Brousseau, Brousseau y Warfield (2004) señalan que los números decimales se utilizan en la vida cotidiana.

La toma de datos con los maestros se realizó durante 12 sesiones, de 90 minutos cada una, aproximadamente. Los instrumentos usados son ocho fichas didácticas de trabajo que también fueron implementadas con los alumnos pero con algunas modificaciones; estas fichas se trataron durante la primera fase del curso-taller, y en la segunda recurrimos a tres guías de retroalimentación[8] para analizar en colegiado la actuación de cada profesor en dos clases grabadas en vídeo, las cuales fueron editadas para que cada una durará como máximo 15 minutos. Las retroalimentaciones se efectuaron a nivel grupal (Apéndice B), entre pares (Apéndice C) e individual (Apéndice D). Como apoyo para sus reflexiones cada docente contó con un cuaderno de notas y en la última sesión incluimos a un Observador para que registrara lo que considerara más relevante en dicha sesión.

Esta toma de datos la llevamos a cabo mediante un curso-taller, con la finalidad de que los participantes reflexionaran y establecieran estrategias para enriquecer su práctica docente y fortalecer el aprendizaje autónomo de sus alumnos. El curso-taller se efectuó en dos fases para que los maestros *reflexionaran antes, durante y después* de realizar intervenciones didácticas con su grupo respectivo.

---

[7] Se contó con dos Observadores no participantes.

[8] Observaciones que nos sirven para que avancemos del punto en que nos encontramos y tienen un carácter formativo.

- Primera fase, cinco sesiones: (a) actividad para trabajar el enfoque didáctico de las matemáticas presente en el Programa de estudios vigente (SEP, 2011); (b) seis fichas didácticas sobre significados de la división e importancia del residuo, así como distintos procedimientos para aprender de manera autónoma la división con dos dígitos en el divisor, y (c) dos fichas didácticas para dar sentido a la división con números decimales.
- Segunda fase, siete sesiones: (a) videograbación de una clase de matemáticas de cada maestro participante y análisis en colegiado de su vídeo (editado) para aportar y recibir retroalimentación; (b) lectura del enfoque didáctico de matemáticas, enfatizando sobre los cinco desafíos mencionados; (c) videograbación de otra clase de matemáticas de cada uno de los maestros participantes y análisis entre pares del mismo grado del vídeo (editado) de cada participante para reflexionar acerca de su práctica docente y el aprendizaje autónomo de sus alumnos; (d) análisis individual de sus dos vídeos (editados), y (e) elaboración de un escrito titulado "Reflexiones sobre mi práctica docente" donde considere las retroalimentaciones recibidas, el análisis de sus vídeos y la actuación de sus alumnos.

RESULTADOS OBTENIDOS CON LOS ALUMNOS

Mostramos a continuación diversos procedimientos generados por los alumnos: suma/resta iterativa, relaciones proporcionales entre dos cantidades con la posibilidad de extender dichas relaciones a otros pares de cantidades (Lamon, 2007; Lampert, 1992), diversas representaciones de cocientes parciales y del algoritmo convencional (con restas en los dividendos parciales). Al inicio de nuestra investigación, la mayoría de los estudiantes usó el algoritmo convencional al resolver problemas de división con números decimales y presentaron algunos errores como separar la cantidad decimal, "recorrer y subir" el punto decimal sin conservar las equivalencias correspondientes o no dar sentido a las cifras decimales (figura 1). Estos equívocos pueden ser consecuencia de aprender sólo procedimientos rutinarios sin comprensión, por ejemplo: "divide, multiplica, resta y baja la cifra siguiente" (Lamb y Brooker, 2004, p. 178) limitando la creación de procedimientos propios de los alumnos de acuerdo con su experiencia adaptativa.

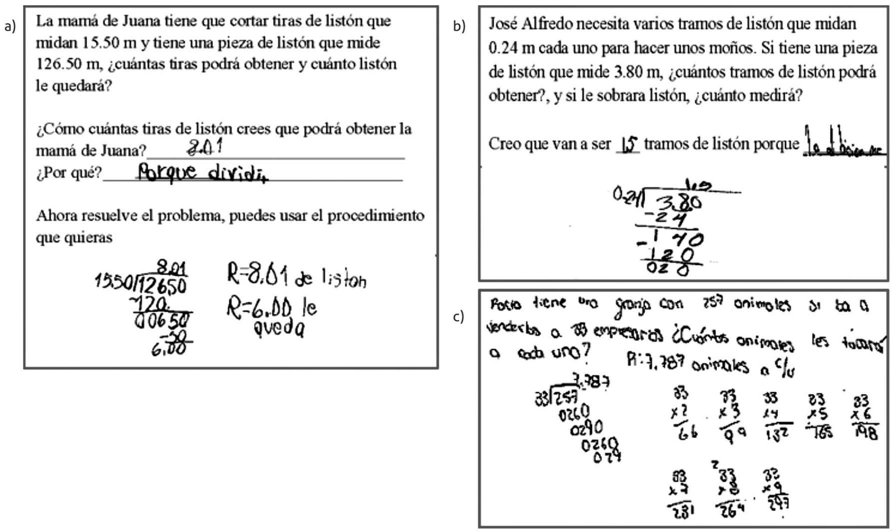


Figura 1. Dificultades de los alumnos en la división con números decimales. (a) Dividir de manera alternada la parte entera y la decimal, (b) recorrer el punto decimal de forma mecanizada y (c) no otorgar sentido a las cantidades decimales.

En los ejemplos precedentes se advierte la necesidad de otro tratamiento didáctico hacia el algoritmo de la división con decimales, por ello quisimos propiciar un pensamiento flexible entre los participantes, por lo cual les solicitamos resolver algunos problemas de división sin emplear el algoritmo estándar, con la finalidad de que produjeran procedimientos alternativos los cuales después compartirían entre ellos; además, introducimos el procedimiento "de resultados parciales"[9] para que los escolares se dieran cuenta que la sustracción en la división sirve para ir quitando a la cantidad total lo que se va repartiendo o agrupando y ello es factible porque se va descomponiendo el dividendo.

En la siguiente figura (2) podemos observar cómo dicho procedimiento potenció futuros aprendizajes como el establecer relaciones proporcionales (figura 2a) o efectuar varias divisiones usando el algoritmo estándar al implementar el

[9] Este procedimiento tiene sus antecedentes más remotos en los antiguos egipcios y se eligió porque permite que cada alumno vaya resolviendo la división con los conocimientos obtenidos en otros grados anteriores.

principio de exhaustividad (residuo menor que el divisor) mediante la sucesión de divisiones parciales (figura 2b). Al mismo tiempo promovimos que los alumnos estimaran un posible resultado y encontramos que la mayoría de ellos escriben el resultado calculado o describen el algoritmo efectuado y sólo algunos efectúan estimaciones como una forma de iniciar a comprender la situación (figura 2a). Asimismo, nos percatamos de que la re-escritura del problema fue un recurso para que los alumnos revisaran la solución hallada y mostraran si habían comprendido el problema (figura 2b).

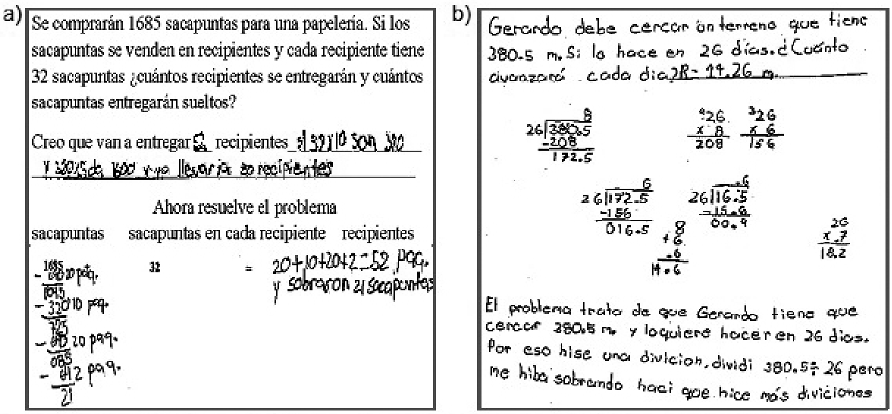


Figura 2. Distintos procedimientos que surgieron con base en el “de resultados parciales”. (a) Relaciones proporcionales y (b) división en partes.

En la figura 3 vemos que los procedimientos alternativos generados por los alumnos sirvieron de apoyo para que llegaran al algoritmo convencional e incluyeran la resta en los dividendos parciales, incluso varios escolares movieron el punto decimal hacia la derecha, lo cual puede servirle al docente para provocar la reflexión en el grupo (Hooper, 2015).

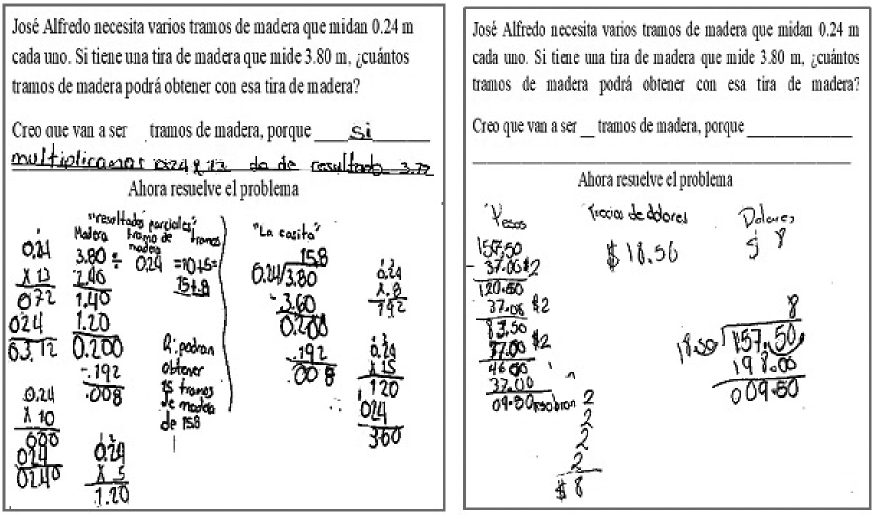


Figura 3. Importancia de anotar la resta en los dividendos parciales. Algunos alumnos llegan a recorrer el punto decimal.

Por las evidencias precedentes subrayamos que los alumnos anotan las cantidades decimales que van separando, por ello disentimos de que se eliminen las restas en los dividendos parciales del algoritmo canónico (SEP, 2014b, p. 233), pues algunos escolares anotan en su diario escolar "hoy aprendí que la división con decimales es más fácil con la resta" o "en los dos [procedimientos] se van restando las cantidades".

También hubo producciones donde se advierten equivocaciones en el algoritmo convencional, aun cuando en los procedimientos alternativos el resultado era correcto (figura 4) y creemos que se debe a la falta de reflexión acerca de la solución o soluciones obtenidas. Encontramos producciones (figura 4a), que los errores más frecuentes en el algoritmo estándar se relacionan con la multiplicación y la resta, reportado en Ramírez (2012). Igualmente, de la manera mecanizada y sin comprensión de colocar el punto decimal (figura 4b), donde notamos que el alumno no reparó que tenía tres distintos resultados (8, 0.8 y .08), los cuales pueden ser un recurso para que el docente provoque la discusión y reflexión en el grupo acerca de lo que significa el resultado decimal obtenido en cada uno de los distintos procedimientos. Además de que no basta que el alumno opere correctamente el algoritmo (figura 4c), sino que tenga la oportunidad de analizar sobre la racionalidad de sus respuestas en colaboración con otros (Hooper, 2015; Rubenstein, 1998).

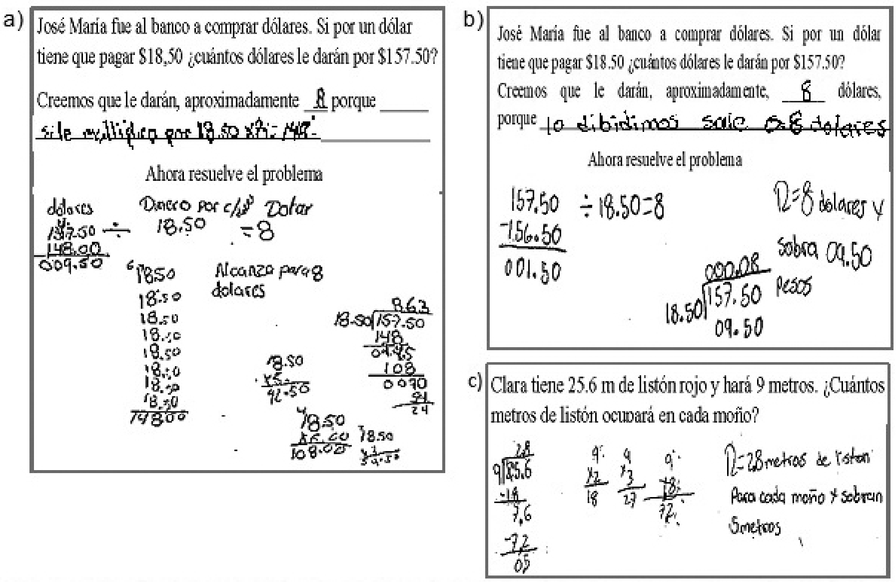


Figura 4. Resolución de problemas de división usando el algoritmo convencional. En (a) y (b) vemos diferentes procedimientos no convencionales al trabajar con el algoritmo convencional. En (c) faltó la comprensión de la cantidad decimal del residuo.

Es importante mencionar que los alumnos después de socializar sus producciones se percataron de otras maneras o "caminos" de resolver problemas de división y señalaron: "no siempre un camino es el más fácil, por eso es mejor tener otros".

RESULTADOS OBTENIDOS CON LOS MAESTROS

En este apartado reportamos lo hallado con los maestros en el curso-taller. Advertimos la creación de distintos procedimientos con sumas/restas iterativas, relaciones proporcionales, representaciones de cocientes parciales, etcétera, y de igual modo que los alumnos también incluyeron la resta en los dividendos parciales con punto decimal (figura 5).

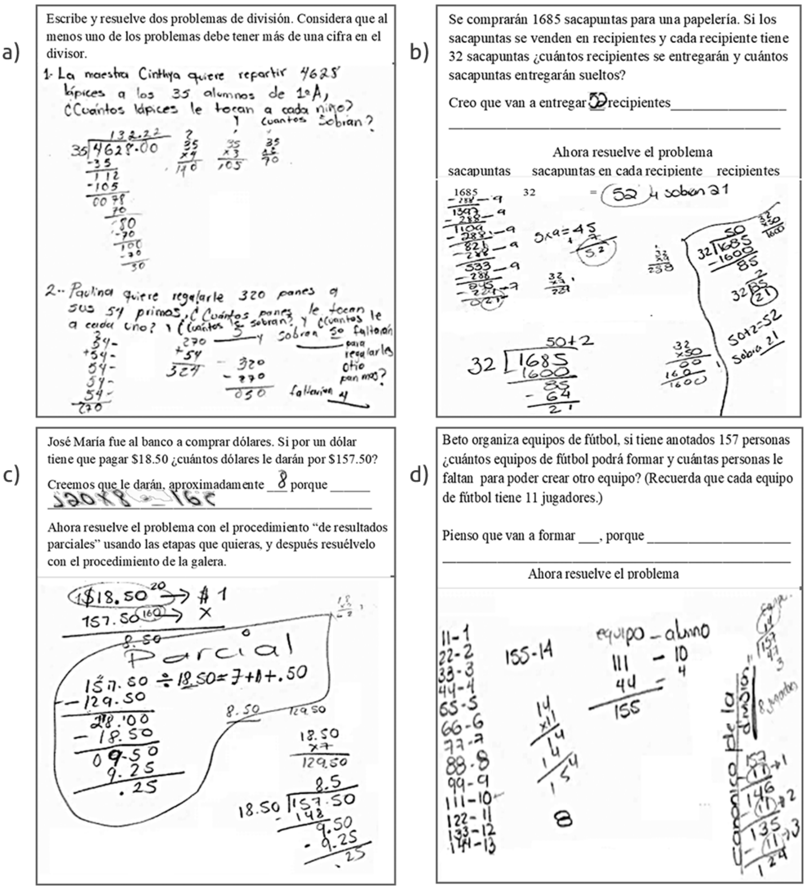


Figura 5. Distintos procedimientos producidos por los docentes. (a) Error en el cálculo decimal y falta de sentido (fragmentar los lápices), (b) procedimientos con base en cocientes parciales, (c) "regla de tres" y (d) relaciones proporcionales.

En las producciones precedentes, los maestros manifiestan cálculos más complejos que muestran mayor dominio en los números decimales, sin embargo en sus producciones observamos la falta de estimar un posible resultado, así como no escribir el resultado después de efectuar la algoritmia correspondiente. También observamos que en el algoritmo convencional (figura 5a) el docente no registra de dónde surge el cociente decimal; consideramos que podría deberse a la manera en que aprendió, pues menciona: "enseño la división de la única manera que conozco".

A continuación presentamos producciones de los maestros. Vemos en la figura 6a cómo el profesor coloca el punto decimal en el algoritmo convencional sin indicios de dónde proviene; en las figuras 6b y 6c observamos procedimientos alternativos donde los maestros anotaron los dividendos parciales decimales, lo que les dio pié a incluirlos también en el algoritmo convencional y así encontrar la cantidad decimal del cociente del mismo modo como lo habían hecho para la cantidad entera, pero ahora considerando múltiplos del divisor menores de la unidad (figura 6c). Es importante señalar que al compartir cómo hallar la cifra decimal, los maestros mostraron interés de que coincidiera la colocación del punto con la regla "recorrer el punto..."; por ello, creemos que este hallazgo puede ser un recurso para reflexionar acerca del porqué conservar las cantidades decimales en la división sin necesidad de "recorrer" el punto a la derecha de manera mecanizada.

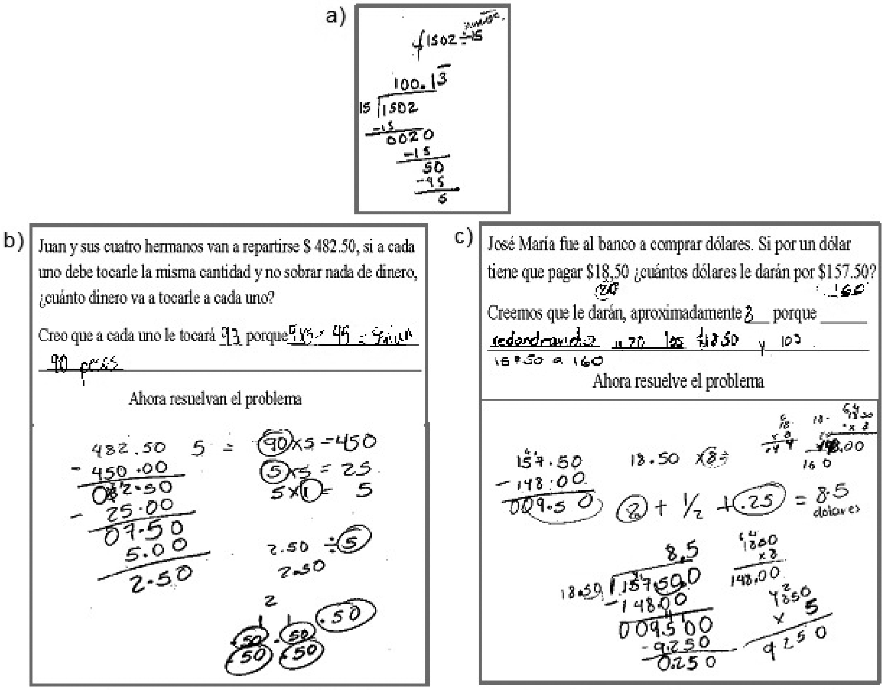
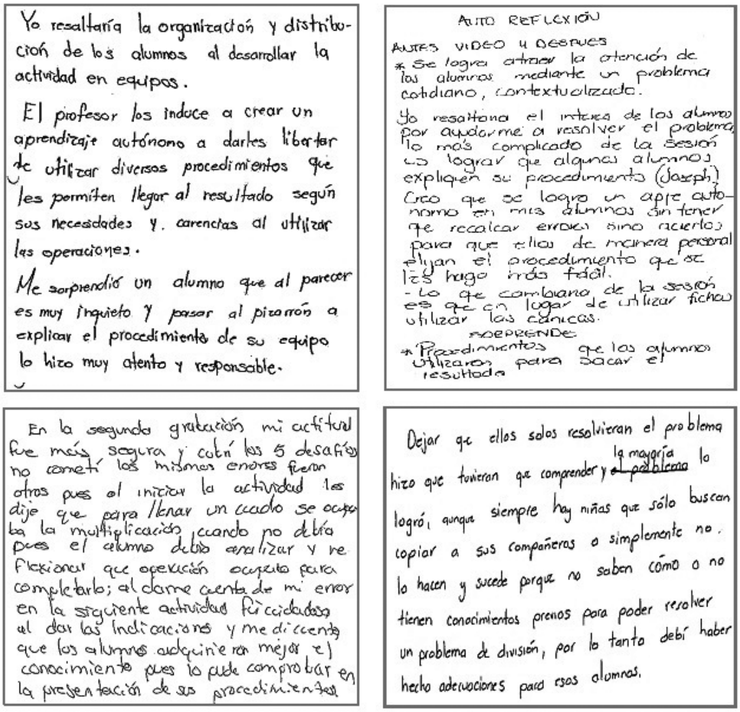


Figura 6. Diferencias entre el algoritmo convencional y los procedimientos alternativos. En (a) vemos la colocación del punto decimal en el algoritmo canónico, en (b) las operaciones subsumidas en la división y en (c) la obtención de la cifra decimal .5 del cociente.

En la figura 7 mostramos algunas reflexiones de los profesores surgidas en la segunda fase del curso-taller como consecuencia de analizar los vídeos de sus clases y observar los distintos procedimientos que surgieron en sus alumnos al darles la posibilidad de resolver problemas con sus propias estrategias con miras a fomentar aprendizaje autónomo. En el análisis de su práctica docente fueron considerados las retroalimentaciones grupales, su cuaderno de notas y las videograbaciones de sus clases.


Yo resaltaría la organización y distribución de los alumnos al desarrollar la actividad en equipos.
El profesor los induce a crear un aprendizaje autónomo a darles libertad de utilizar diversos procedimientos que les permiten llegar al resultado según sus necesidades y carencias al utilizar las operaciones.
Me sorprendió un alumno que al parecer es muy inquieto y pasar al pizarrón a explicar el procedimiento de su equipo lo hizo muy atento y responsable.

AUTO REFLEXIÓN
ANTES VIDEO Y DESPUES
* Se logra atraer la atención de los alumnos mediante un problema cotidiano, contextualizado.
Yo resaltaría el interés de los alumnos por ayudarme a resolver el problema, lo más complicado de la sesión es lograr que algunos alumnos expliquen su procedimiento (Joseph)
Creo que se logro un apje autónomo en mis alumnos sin tener que recalcar errores sino aciertos para que ellos de manera personal elijan el procedimiento que se les hago más fácil.
- Lo que cambiaría de la sesión es que en lugar de utilizar fichas utilizar las canicas.
SORPRENDE
* Procedimientos que los alumnos utilizaron para sacar el resultado

En la segunda grabación mi actitud fue más segura y cubrí los 5 desafíos no cometí los mismos errores fueron otros pues al iniciar la actividad les dije que para llenar un cuadro se ocupaba la multiplicación cuando no debía pues el alumno debió analizar y reflexionar que operación ocupaba para completarlo; al darme cuenta de mi error en la siguiente actividad fui cuidadosa al dar las indicaciones y me di cuenta que los alumnos adquirieron mejor el conocimiento pues lo pude comprobar en la presentación de sus procedimientos

Dejar que ellos solos resolvieran el problema hizo que tuvieran que comprender y ~~el problema~~ la mayoría lo logró, aunque siempre hay niñas que sólo buscan copiar a sus compañeras o simplemente no lo hacen y sucede porque no saben cómo o no tienen conocimientos previos para poder resolver un problema de división, por lo tanto debí haber hecho adecuaciones para esos alumnos.

Figura 7. Reflexiones de los maestros con base en las retroalimentaciones grupales recibidas.

De acuerdo con las reflexiones de los profesores, consideramos que ellos se dieron cuenta de la importancia de que los alumnos elaboren sus procedimientos y los socialicen para que aprendan de manera autónoma (competencia mencionada en documentos editados por la SEP para la educación básica). Es imprescindible subrayar que los docentes reconocieron que antes no daban la oportunidad a sus alumnos de usar distintos procedimientos pues esperaban sólo algoritmos convencionales y fue mediante las retroalimentaciones entre colegas que descubrieron los cambios que tuvieron en su práctica, donde reflexionaron acerca de la necesidad de transformar su manera de enseñar para dejar que el alumno también proponga su propios procedimientos de solución. Así mismo manifestaron su asombro de la forma en que llegaron a efectuar el algoritmo convencional de la división con decimales sin necesidad de transformar las cantidades, sólo teniendo en cuenta los dividendos parciales decimales.

CONCLUSIONES

En nuestra investigación encontramos que los alumnos mostraron dificultades en el significado y uso de los números decimales, por lo cual implementamos actividades complementarias donde utilizamos el sistema monetario como un recurso para el manejo comprensivo de las cifras decimales en las operaciones de suma, resta y multiplicación. Observamos que al sumar y restar lograron colocar correctamente las cantidades decimales, considerando la alineación del punto decimal. En relación con la multiplicación, la trabajamos como suma abreviada para que se dieran cuenta dónde colocar el punto decimal en el producto.

Respecto de la división con números decimales en el divisor, encontramos que, el error más frecuente entre los alumnos fue separar o alternar las cantidades decimales de los números enteros y operar el algoritmo convencional, aparte de equivocaciones en relación con las operaciones de resta y multiplicación. Es importante señalar que varios estudiantes colocaron el punto decimal "subiéndolo" en el cociente o "recorriéndolo" en el dividendo sin saber el porqué. Otras inexactitudes se refieren a las respuestas que dieron los estudiantes participantes al problema planteado, lo cual nos hace reconocer que es necesario mayor tiempo en la comprensión de los números decimales y no sólo trabajar en su cálculo. Pensamos que en los programas de la SEP se debe reflejar una educación de calidad y que implica mayor tiempo en el tratamiento de contenidos complejos para los alumnos.

En dirección al aprendizaje autónomo de la división se logró que los participantes (alumnos y maestros) elaboraran procedimientos diferentes del canónico: representaciones gráficas, sumas/restas iteradas, agrupamientos, multiplicación y distintas representaciones de cocientes parciales –como ir seccionando y dividiendo de manera parcial o establecer relaciones proporcionales entre las dos cantidades– con lo que se abrió la posibilidad de elegir uno o más procedimientos para un problema específico. Es conveniente señalar que varios alumnos usaron más de dos procedimientos diferentes, aparte del convencional, y aunque hubo escolares que no llegaron a acceder al algoritmo estándar, sí elaboraron al menos un procedimiento no convencional. Por lo anterior, consideramos que mediante el aprendizaje autónomo de la división con decimales se conjuntó la experiencia adaptativa de cada participante al elaborar procedimientos conforme sus conocimientos previos de las operaciones subsumidas en la división con decimales.

Un hallazgo interesante, al efectuar el algoritmo canónico de la división con números decimales, es que casi la totalidad de alumnos y maestros colocaron los dividendos parciales dentro de la galera para realizar las restas indicadas y considerando la cantidad total del divisor obtener el cociente entero y decimal correspondiente. Al respecto, Brousseau *et al*. (2014) anotan "el uso y comprensión de la división con números decimales se facilita por su semejanza con la división larga en los números naturales" (p. 92), lo cual asombró a los maestros, quienes repararon que el conservar en todo momento las cantidades decimales –tanto en el dividendo como en el divisor– dota de sentido el tratamiento de la situación original sin necesidad de multiplicar por potencias de diez las cantidades decimales involucradas.

En relación con la reflexión de la práctica docente, a los maestros les pareció interesante analizarla en colaboración con los otros maestros de la escuela, aunque la mayor parte de ellos se les observaba un poco nerviosos de que los demás vieran sus clases, puesto que ninguno había tenido experiencia en dar y recibir retroalimentación de sus colegas. Asimismo, reconocieron que sus alumnos usaron procedimientos que ellos no esperaban y que les había sorprendido. Señalaron, por ejemplo: "Me di cuenta que mis alumnos saben más de lo que me imagino" o "Aprendí que no todos los alumnos razonan igual, que llevan un proceso, y que en el proceso van adquiriendo aprendizajes." Al final del curso-taller expresaron: "Es necesario, como docente, detenerse para reflexionar sobre el aprendizaje de sus alumnos para saber si lo aplicado está dando buenos resultados".

REFERENCIAS

Aebli, H. (1991). Aprender a aprender. (R. Lucio, Trad.). En *Factores de enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo* (pp. 151-175). Madrid, España: Narcea.

Airasian, P. (2002). Evaluación de desempeño. En *La evaluación en el salón de clases* (pp. 126-169). Biblioteca para la Actualización del Maestro. México: SEP/McGraw-Hill.

Ambrose, R., Baek, J-M., y Carpenter, T. (2003). Children's invention of multiplication and division algorithms. En A. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptative expertise* (pp. 50-70). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

An, S. (2009). Chinese teachers' knowledge of teaching multi-digit division. *Journal of Mathematics Education, 2*(1), 27-54.

Berk, D., Taber, S., Carrino, C., y Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teacher's flexibility in the domain of proportional reasoning. *An International Journal Mathematical Thinking and Learnig, 11*(3), 113-135. doi: https://doi.org/10.1080/10986060903022714

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz (Eds.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 65-93). Barcelona, España: Paidós.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática, 12*(1), 5-38. doi: 10.24844/EM

Brousseau, G. (2002). Problems with teaching decimal numbers. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield (Eds.) *Theory of didactical situations in mathematics* (Vol. 19, pp. 120-146). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Brousseau, G., Brousseau, N., y Wargield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 2. From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 281-300. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.12.001

Brousseau, G., Brousseau, N., y Wargield, V. (2014). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment.* New York, United States of America: Springer.

Bruno, A., Galuppo, L., y Gilardi, S. (2011). Evaluating the reflexive practices in a learning experience. *European Journal of Psychology of Education*, 26, 527-543. doi: 10.1007/s10212-011-0061-x

Carrol, W., y Porter, D. (1998). Alternative algorithms for whole-number operations. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 106-114). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Carter, A., y Fleener, M. (2002). Exploring the teacher's role in developing autonomy. En D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting. North American chapter of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 819-829). Columbus, OH: Clearinghouse on Science, Mathematics and Environmental Education.

Cheng, L. (2015). Developing critical reflection through audio and video technology for some Singapore primary school mathematics teachers. En S. Fong (Ed.), *Cases of mathematics professional development in East Asian countries. Using video to support grounded analysis* (pp. 39-60). Georgia, United States of America: Springer.

Fagginger, A., Hickendorff, M., y Van Putten, C. (2016). Solution strategies and adaptivity in multidigit division in a choice/no choice experiment: Student and instructional factors. *Learning and Instruction*, 41, 52-59. doi: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.09.008

Flückiger, A. (2005). Macro-situation and numerical knowledge building: The role of pupils' didactic memory in classroom interactions. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 59-84. doi: 10.1007/s10649-005-5885-3

Graeber, A., y Tirosh, D. (1990). Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals. *Educational Studies in Mathematics 21*, 565-588.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrup (Eds.), *Analyses of arithmetics for mathematics teaching* (pp. 283-320). United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.

Hooper, S. (2015). *"Move the decimal point and divide": An exploration of students' introduction to division with decimals* (Tesis doctoral). Recuperada de http://scholarworks.gsu.edu/ece_diss/24

Kamii, C. (1994). La autonomía: el fin educativo de Piaget. En *Reinventando la aritmética II* (pp. 65-73). Madrid, España: Aprendizaje Visor.

Lamb, J., y Booker, G. (2004). The impact of developing teacher conceptual knowledge on students' knowledge of division. En M. J. Hornes y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 177-184). Bergen, Norway: Bergen University College.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

Lampert, M. (1992). Teaching and learning long division for understanding in school. En G. Leinhardt, R. Putman y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 221-282). United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.

Lerman, S. (2001). Cultural discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 46, 87-113.

Martínez-Rizo, F. (2012). La evaluación formativa. En *La evaluación en el aula. Promesas y desafíos de la evaluación formativa* (pp. 71-146). México: Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Mercier, E., y Higgings, S. (2013). Collaborative learning with multi-touch technology: Developing adaptive expertise. *Learning and Instruction*, 25, 13-23. doi: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.10.004

Murray, E. (2015). Improving teaching through collaborative reflective. Teaching cycles. *Investigations in Mathematics Learning* 7(3), 23-29. doi: https://doi.org/10.1080/24727466.2015.11790343
National Council of Teacher of Mathematics [NCTM]. (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos.* México: Editando libros.
Piaget, J., y Inhelder, B. (1993). Sentimientos y juicios morales. En *Psicología del niño* (pp. 123-130). Madrid, España: Ediciones Morata.
Polya, G. (1965/2001). *Cómo plantear y resolver problemas* (pp. 17-53). México: Trillas.
Ramírez, M. (2012). *El aprendizaje autónomo de la división en cuarto grado de primaria.* (Tesis doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. México.
Rubenstein, R. (1998). Historical algorithms. Sources for student projects. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 99-105). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
Schön, D. A. (1987). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona, España: Paidós.
Secretaría de Educación Pública [SEP]. (1960). *Mi libro de cuarto año. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza.* México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.
Secretaría de Educación Pública (1969). *Mi libro de quinto año. Aritmética y Geometría. Estudio de la naturaleza.* México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.
Secretaría de Educación Pública (1974). *Matemáticas. Sexto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Sexto Grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
Secretaría de Educación Pública (2014a). *Desafios matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
Secretaría de Educación Pública (2014b). *Desafios matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
Secretaría de Educación Pública (2014c). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
Secretaría de Educación Pública (2014d). *Desafios matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
Secretaría de Educación Pública (2014e). *Desafios matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.

Solé, I. (1999). Disponibilidad para el aprendizaje y sentido del aprendizaje. En *El constructivismo en el aula* (pp. 25-46). Barcelona, España: Graó.

Taylor, S., y Bogdan, R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* (pp. 15-27). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., y Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, XXIV*(3), 335-359.

Yackel, E., y Cobb, P. (1996) Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(4), 458-477.

Mercedes María Eugenia Ramírez Esperón

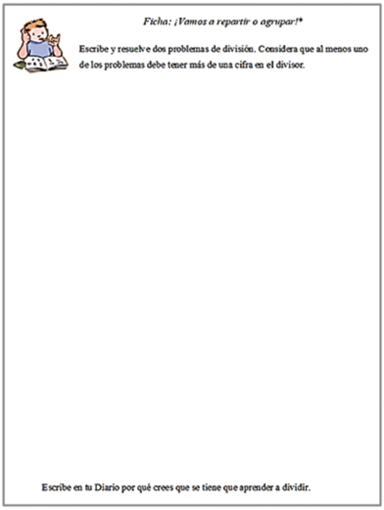
Dirección: Av. Manuel González # 150, Edif. San Luis Potosí, B-205. Col. Tlatelolco. Alcaldía Cuauhtémoc, CP. 06900

Tel. celular: 55 3109 4347

APÉNDICE A

EJEMPLOS DE FICHAS DIDÁCTICAS CON SU PROPÓSITO RESPECTIVO

Alumnos

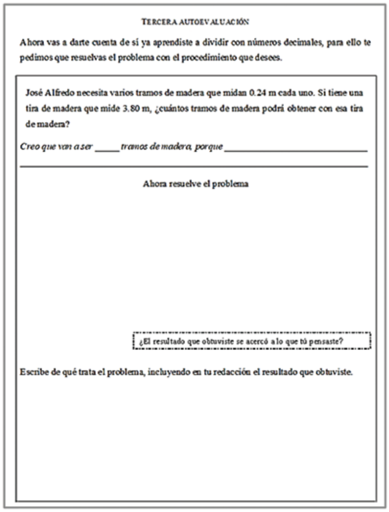


*Ficha: ¡Vamos a repartir o agrupar!**

Escribe y resuelve dos problemas de división. Considera que al menos uno de los problemas debe tener más de una cifra en el divisor.

Escribe en tu Diario por qué crees que se tiene que aprender a dividir.

Explorar qué significados da el alumno a la operación de división.



TERCERA AUTOEVALUACIÓN

Ahora vas a darte cuenta de si ya aprendiste a dividir con números decimales, para ello te pedimos que resuelvas el problema con el procedimiento que desees.

José Alfredo necesita varios tramos de madera que midan 0.24 m cada uno. Si tiene una tira de madera que mide 3.80 m, ¿cuántos tramos de madera podrá obtener con esa tira de madera?

Creo que van a ser _____ tramos de madera, porque ____________________________

Ahora resuelve el problema

¿El resultado que obtuviste se acercó a lo que tú pensaste?

Escribe de qué trata el problema, incluyendo en tu redacción el resultado que obtuviste.

Conocer qué aprendizaje ha logrado o está en proceso de adquisición.

Maestros

*Ficha: Equipos de fútbol**

Beto organiza equipos de futbol, si tiene anotados 157 personas ¿cuántos equipos de futbol podrá formar y cuántas personas le faltan para poder crear otro equipo? (Recuerda que cada equipo de futbol tiene 11 jugadores.)

Pienso que van a formar _______, porque ____________________________

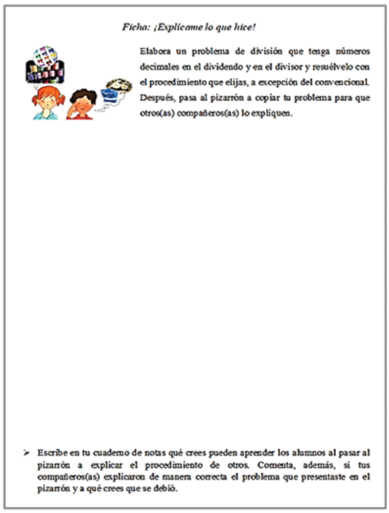
Ahora resuelve el problema

Beto podrá formar________equipos y le faltan ________________ para crear otro equipo.

Escribe de qué trata el problema, incluyendo en tu redacción el resultado que obtuviste

- Escribe en tu cuaderno de notas para qué crees que puede servir al alumno volver a escribir el problema incluyendo la solución.

Considerar la importancia del residuo y la re-escritura para la verificación de resultados



Ficha: ¡Explícame lo que hice!

Elabora un problema de división que tenga números decimales en el dividendo y en el divisor y resuélvelo con el procedimiento que elijas, a excepción del convencional. Después, pasa al pizarrón a copiar tu problema para que otros(as) compañeros(as) lo expliquen.

- Escribe en tu cuaderno de notas qué crees pueden aprender los alumnos al pasar al pizarrón a explicar el procedimiento de otros. Comenta, además, si tus compañeros(as) explicaron de manera correcta el problema que presentaste en el pizarrón y a qué crees que se debió.

Fortalecer el aprendizaje del alumno mediante las producciones elaboradas de otro compañero.

APÉNDICE B

Guía para analizar en colegiado el vídeo (editado) de su clase

Reflexión sobre su práctica docente

Escriba en su cuaderno de notas:

I. *Antes de ver el vídeo de su clase*
¿Qué aprendizajes cree haber logrado en sus alumnos durante la sesión?

II. *Después de ver el vídeo de su clase*
– ¿Qué resaltaría de su clase?
– ¿Qué fue lo que se le hizo más complicado durante la sesión?
– ¿Le sorprendió algo durante la sesión? _____, ¿por qué?
– ¿Cambiaría algo de la sesión? _____, ¿por qué?
– ¿Qué aprendizajes logró en sus alumnos?
– ¿Considera haber fomentado en sus alumnos un aprendizaje autónomo? ____, ¿por qué?

III. *Posterior a la lectura de las observaciones de sus colegas*
Escriba una reflexión que dé cuenta de la retroalimentación que recibió.

IV. *Análisis en colegiado*
Anote acerca del análisis en colegiado respecto del aprendizaje autónomo de sus alumnos.

Retroalimentación en colegiado

Escriba en las hojas proporcionadas:
I. *Después de ver el vídeo de su colega*
– Nombre del colega de quien observó la clase
– ¿Qué resaltaría de su clase?
– ¿Qué fue lo que cree se le hizo más complicado durante la sesión?
– ¿Le sorprendió algo durante la sesión? _____, ¿por qué?
– ¿Cambiaría algo de la sesión? _____, ¿por qué?

- ¿Qué aprendizajes cree que su colega logró en sus alumnos?
- ¿Considera que su colega fomentó un aprendizaje autónomo en sus alumnos?__ ¿por qué?

II. *Favor de entregarla la retroalimentación a su colega.*
Es decisión propia escribir el nombre de quien efectúo la retroalimentación.

III. *Argumentar en plenaria acerca de lo observado en los vídeos.*

APÉNDICE C

Guía para analizar entre pares el vídeo (editado) de su clase

En esta segunda fase van ustedes a recibir retroalimentación de su colega de grado, ello con la finalidad de reflexionar acerca de semejanzas y diferencias entre sus prácticas docentes de acuerdo con los criterios establecidos en el grupo. Para ello le solicitamos lo siguiente:

I. *Antes de ver el vídeo de su clase*

– Escriba en su cuaderno de notas ¿cuáles considera que son los elementos fundamentales en su práctica docente?
– Revisen el documento ENFOQUE DIDÁCTICO (de matemáticas) del Programa de Estudio 2011 de su grado correspondiente y en colegiado comenten acerca de los cinco desafíos que ahí se mencionan.

II. *Después de ver el vídeo de su clase*

Para retroalimentarse mutuamente, analicen y escriban semejanzas y diferencias que hayan encontrado entre sus prácticas docentes en relación con los cinco desafíos mencionados en su Programa de Estudios 2011.

APÉNDICE D

Guía para el escrito "Reflexiones sobre mi práctica docente"

En esta última sesión va a reflexionar acerca de su práctica docente apoyándose en la revisión de su cuaderno de notas y en los dos vídeos de los cuales ya recibió retroalimentación de sus colegas.

Elabore un escrito al que titule Reflexiones sobre mi práctica docente para lo cual:

I. *Revise su cuaderno de notas y retome sus reflexiones en relación con el objetivo general del curso-taller:*

   Se espera que los docentes participantes reflexionen antes, durante y después de realizar sus intervenciones didácticas para observar qué cambios realizaron y cómo ello se vio reflejado en el aprendizaje de sus alumnos.

II. *Después de ver los dos editados de sus clase incluya:*
   Qué diferencias encuentra en su actuación entre su primera y segunda grabación respecto de

   – elementos que haya incorporado conforme con las retroalimentaciones recibidas,
   – manejo del error,
   – decisiones tomadas en el transcurso de la clase,
   – otros aspectos que considere importantes mencionar.

III. *Muestre algún procedimiento del alumno o de los alumnos que le haya sorprendido*
   Argumente el porqué eligió este ejemplo.

IV. *Mencione en su escrito*
   Características que considera hacen valiosa su participación dentro de la comunidad escolar donde labor.

 DOI: 10.24844/EM3101.03

Adaptación y validación del MRBQ (Mathematics-Related Beliefs Questionnaire) al contexto colombiano con estudiantes de secundaria

Adaptation and validation of the Mathematics-Related Beliefs Questionnaire (MRBQ) to the Colombian context with high school students

Jose Manuel Diego-Mantecón[1]
Francisco Javier Córdoba-Gómez[2]

Resumen: Este artículo presenta la adaptación y validación del MRBQ (Mathematics-Related Beliefs Questionnaire) al contexto colombiano. El MRBQ es un instrumento, desarrollado en la Universidad de Lovaina (Bélgica), que evalúa las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y que ha sido validado en varios países. El instrumento fue administrado a 670 estudiantes de secundaria en centros públicos de la ciudad de Medellín (Colombia). Los análisis revelaron que las creencias sobre las matemáticas de estos estudiantes se representan mejor con un modelo de 10 factores, y no con uno de cuatro como sugieren estudios anteriores. Los 10 factores identificados explican más fielmente el modelo teórico original y muestran una varianza de 56.34%, mayor que la obtenida en investigaciones previas. Estos resultados no solo sugieren mejoras significativas del MRBQ, sino que proporcionan la base para el desarrollo de una herramienta fiable que evalúe las creencias en el contexto colombiano. Hasta lo que estos autores conocen no se dispone de otro instrumento

Fecha de recepción: 28 de abril de 2018. **Fecha de aceptación:** 5 de febrero de 2019.

[1] Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias, diegojm@unican.es orcid.org/0000-0002-4427-2724

[2] Instituto Tecnológico Metropolitano, Colombia (Campus Robledo, Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas) franciscocordoba@itm.edu.co orcid.org/0000-0002-3371-3643

en este contexto que permita identificar las creencias, y como consecuencia estudiar su influencia en el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: *Creencias sobre las matemáticas, Educación secundaria, Cuestionario, Análisis factorial*

Abstract: This article presents the adaptation and validation of the MRBQ (Mathematics-Related Beliefs Questionnaire) to the Colombian context. The MRBQ is an instrument for assessing student mathematics-related beliefs, originally developed at the University of Leuven (Belgium) and validated in several countries. The instrument was administered to 670 students, from public high schools in Medellín (Colombia). The analyses revealed that these student mathematics-related beliefs are better represented with a ten-factor model, rather than with a four-factor model as suggested in previous studies of the MRBQ. The 10 factors explain more faithfully the original theoretical model and account for a variance of 56.34%, higher than that obtained in previous research. These results not only suggest significant improvements of the MRBQ, but also provide the basis for developing a reliable tool to assess beliefs in the Colombian context. To what these authors know, a consistent instrument has not been designed yet in this context for identifying beliefs, and consequently studying their influence on the learning of mathematics.

Keywords: *Mathematics-related beliefs, Secondary education, Questionnaire, Factor analysis*

INTRODUCCIÓN

Este artículo se centra en investigar las creencias sobre las matemáticas que tienen los estudiantes de educación secundaria en centros públicos de la ciudad de Medellín, Colombia. En Colombia el estudio sobre el aprendizaje de las matemáticas se ha tratado generalmente desde aspectos cognitivos (López, Hederich-Martínez y Camargo, 2012; Toro-Carvajal, Ortíz-Álvarez, Jiménez-García y Agudelo-Calle, 2012; Arévalo y González, 2013), meta-cognitivos (Zambrano, 2008; Iriarte, 2011; Santos y Lozada, 2013) y curriculares (Gómez, 2002; Murcia y Henao, 2015; Ángulo, Reyes, Triana y Aristizábal, 2016), sin considerar las dimensiones afectivas, ni el papel que juegan las creencias en el aprendizaje de esta materia. El objetivo del presente estudio es adaptar y validar un cuestionario como primer paso en el análisis sistemático y riguroso de las creencias sobre las matemáticas de los estudiantes colombianos. En particular se pretende adaptar y validar la versión del MRBQ (Mathematics-Related Beliefs Questionnaire) refinada por Diego-Mantecón (2013), que ha sido evaluada en diferentes contextos socio-culturales.

El estudio de las creencias se hace necesario cuando se busca comprender las causas de ciertas acciones que pueden conducir al fracaso o al éxito escolar en una materia tan significativa, pero a la vez tan estigmatizada como las matemáticas. En los últimos años se han atribuido distintos significados al término creencias; en este estudio se definen como un sistema de conocimiento subjetivo, personal y no siempre compartido (Pajares, 1992; Pehkonen, 1999; Parra, 2005; Diego-Mantecón, 2012, 2013). Se construyen y desarrollan durante la vida como fruto de las experiencias personales y de las interacciones con el entorno (Pehkonen y Pietilä, 2003), sirviendo a su vez como filtros a través de los que se procesan nuevas experiencias e informaciones. Estas nuevas experiencias se incorporan a un sistema de creencias ya existente, ayudando a consolidar o modificar creencias previas (Beck, 1976; Knapp y Beck, 2008). Las creencias pueden además mantenerse con diferentes grados de convicción, no siendo necesariamente compartidas y por lo tanto disputables (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2015). De acuerdo con Diego-Mantecón (2012) las creencias anteceden a las actitudes, determinando y condicionando nuestras acciones en respuesta a determinadas situaciones y contextos.

CREENCIAS SOBRE LAS MATEMÁTICAS, CONCEPTUALIZACIÓN Y EVALUACIÓN

A continuación, se detalla la influencia de las creencias en el aprendizaje de las matemáticas, así como su conceptualización a la hora de estudiarlas. Se presentan también los instrumentos existentes para su evaluación, destacando como herramienta principal el MRBQ.

La influencia de las creencias en el aprendizaje de las matemáticas

En la actualidad existe un consenso sobre la importancia de las creencias en el aprendizaje de las matemáticas (Bofah y Hannula, 2016; De Corte, 2015). Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) afirman que en el 'desarrollo de la competencia matemática' intervienen cinco componentes principales; una de ellas es la 'disposición productiva' que comprende las creencias sobre las matemáticas, la motivación por su aprendizaje y la autoeficacia. Las creencias sobre las matemáticas funcionan como principios rectores que influyen en la toma de decisiones, pudiendo utilizarse para predecir acciones o conductas concretas (Schoenfeld, 2012; Martínez Padrón, 2013; Skott, 2015). Éstas determinan por lo tanto la forma en la que los estudiantes participan en el aprendizaje (Schoenfeld 1988; Op't Eynde, De Corte y Verschaffel, 2002), influyendo así en su rendimiento académico (House, 2006; De Corte, 2015; Diego-Mantecón y Córdoba-Gómez, 2018). En concreto, Pehkonen y Törner (1999) señalan que las creencias son necesarias para entender cómo los estudiantes plantean un problema, ya que éstas pueden influir en las técnicas de resolución empleadas, así como en el tiempo y esfuerzo invertido. Aunque la enseñanza de técnicas de resolución y métodos heurísticos son necesarios, podrían no ser suficientes para lograr un aprendizaje efectivo (Diego-Mantecón, 2012) ya que las creencias son "elementos constitutivos importantes del aprendizaje" (Op't Eynde *et al*., 2002, p.14).

McLeod (1994) sugiere que las experiencias en clases tradicionales conducen a desarrollar creencias negativas sobre las matemáticas y en concreto sobre la resolución de problemas. Por ejemplo, la creencia 'las matemáticas son algo procedimental que consiste en aplicar reglas' dificulta la toma de decisiones y el desarrollo de estrategias en la resolución de problemas no rutinarios (Schoenfeld, 1982; Kloosterman y Stage, 1992). El estudiante que considera las matemáticas como una asignatura puramente procedimental tiende, además, a convertirse en un aprendiz pasivo, poniendo más énfasis en la memorización que en la comprensión (Pehkonen y Törner, 1999). De manera similar, aquel que considera las matemáticas aburridas o poco atractivas difícilmente se involucra de forma activa en esta materia. Por ejemplo, la creencia 'las matemáticas son una asignatura aburrida' está inversamente relacionada con el tiempo que el estudiante dedica a esta materia (Hannula, 2006; Kislenko, Grevholm y Lepik, 2007). Por el contrario, el individuo que encuentra las matemáticas interesantes y aplicables en diferentes contextos es proclive a esforzarse más y a trabajar de forma constante (Pehkonen y Törner, 1999; Prendergast *et al*., 2018). Así mismo, los estudiantes que creen en su capacidad para resolver una situación matemática concreta tienden a perseverar hasta encontrar la solución (Bandura, 1999; Schunk y Pajares, 2002).

Conceptualización de las creencias

A pesar de los numerosos trabajos que existen en educación matemática sobre el estudio de las creencias (v.g. Kloosterman y Stage, 1992; Furinghetti y Pehkonen, 2002; Op't Eynde y De Corte, 2003; Lomas, Grootenboer y Attard, 2012; Diego-Mantecón, 2013; Andrews y Diego-Mantecón, 2015) no se ha establecido un consenso a la hora de definirlas. Furinghetti y Pehkonen (2002), después de analizar las definiciones utilizadas por diferentes expertos a nivel mundial, concluyen que no hay unanimidad y que una caracterización universal podría no ser posible. Diego-Mantecón (2012), tras una extensa revisión de la literatura, confirma que no existe tal consenso y señala, además, que a menudo no se hace un intento por definirlas o ponerlas en contexto con otras variables relacionadas, como las actitudes o las concepciones. Hannula (2004) señala que en la mayoría de los casos no se definen directamente, sino que se describen algunas de sus características para delimitarlas.

Las creencias se caracterizan, por ejemplo, por ser una forma de conocimiento subjetivo, que se mantiene con diferentes grados de convicción y consciencia, y por estar compuestas por elementos afectivos, evaluativos y sociales (Abelson, 1979; Pajares, 1992; Vila y Callejo, 2005; Gómez-Chacón, Op't Eynde y De Corte, 2006). Son afectivas en el sentido de que están influenciadas por nuestras emociones (Pajares, 1992); evaluativas al ser aceptadas como verdaderas o falsas y servir como guía para el pensamiento (Villoro, 2006), y sociales al estar determinadas por el contexto en el que vivimos (Gómez-Chacón *et al*., 2006). Como resultado de lo anterior, las creencias se definen en este artículo como un sistema de conocimiento subjetivo y no siempre compartido (Pajares, 1992; Parra, 2005; Diego-Mantecón, 2012, 2013), que se modifica como consecuencia de las interacciones con el entorno (Pehkonen y Pietilä, 2003).

Modelos propuestos para el estudio de las creencias

Con anterioridad a los 80, las creencias sobre las matemáticas se estudiaban por lo general de forma separada (Op't Eynde *et al.*, 2002; Diego-Mantecón, 2012, 2013). Algunos autores estudiaron por ejemplo las 'creencias epistemológicas' (Schommer, Crouse y Rhodes, 1992; Schommer-Aikins, 2002); otros investigaron las 'creencias sobre las matemáticas como disciplina' (Schoenfeld, 1989); y otros analizaron las 'creencias del individuo en relación con las matemáticas' (Bandura, 1993; Pajares y Miller, 1994). A partir de la segunda mitad de los 80 se propusieron modelos que integran diferentes dimensiones. Frank (1985) planteó un modelo de cinco dimensiones, creencias acerca de: (1) la habilidad para estudiar matemáticas, (2) las matemáticas como disciplina, (3) el origen del conocimiento matemático, (4) la resolución de problemas, y (5) la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A diferencia de Frank (1985), Underhill (1988) no consideró las creencias acerca de 'la resolución de problemas', y separó la dimensión 'enseñanza y aprendizaje de las matemáticas' en dos, estableciendo cuatro dimensiones: (1) las matemáticas como disciplina, (2) el aprendizaje, (3) la enseñanza, y (4) el contexto social.

McLeod (1992) propuso otro modelo de cuatro dimensiones, creencias acerca de: (1) la naturaleza de las matemáticas (incluyendo las matemáticas como disciplina y su aprendizaje), (2) uno mismo en relación con las matemáticas, (3) su enseñanza, y (4) el contexto social. Kloosterman (1996), en un modelo más reducido, sugirió solo dos dimensiones: creencias acerca de (1) las matemáticas y (2) de cómo aprenderlas. Esta segunda dimensión incluye varias sub-dimensiones; una de ellas, creencias acerca del aprendizaje, es considerada una dimensión principal en el modelo de Pehkonen (1995) que incluye cuatro dimensiones: (1) las matemáticas como disciplina, (2) uno mismo en relación con las matemáticas, (3) su enseñanza y (4) aprendizaje. Op't Eynde *et al.* (2002) trataron de integrar los modelos anteriores en tres dimensiones interrelacionadas, que a su vez se dividen en 13 sub-dimensiones. Diego-Mantecón (2006) ilustró este modelo en una tabla proporcionando ejemplos concretos para cada sub-dimensión (ver tabla 1).

Tabla 1. Modelo teórico de Op't Eynde ejemplificado por Diego-Mantecón (2006, p.13)

1. **Creencias acerca de la educación matemática**
   1.1 Creencias sobre las matemáticas como asignatura
   (v.g. Las matemáticas son básicamente cálculos, fórmulas y procedimientos)
   1.2 Creencias sobre el aprendizaje matemático y la resolución de problemas
   (v.g. El aprendizaje de las matemáticas consiste principalmente en memorizar)
   1.3 Creencias sobre la enseñanza de las matemáticas
   (v.g. El trabajo en grupo facilita el aprendizaje de las matemáticas)

2. **Creencias sobre uno mismo en relación con las matemáticas**
   2.1 Creencias sobre la orientación intrínseca a la meta
   (v.g. Prefiero tareas matemáticas en las que tengo que esforzarme)
   2.2 Creencias sobre la orientación extrínseca a la meta
   (v.g. Solo estoy satisfecho cuando obtengo una buena calificación en matemáticas)
   2.3 Creencias sobre el valor de la tarea
   (v.g. Creo que las matemáticas que realizo en clase me serán útiles en el futuro)
   2.4 Creencias sobre autocontrol
   (v.g. Si estudio de manera apropiada, puedo aprender los contenidos que me enseñan en matemáticas)
   2.5 Creencias sobre autoeficacia
   (v.g. Puedo entender incluso los conceptos más difíciles en matemáticas)

3. **Creencias acerca del contexto de la clase**
   3.1 Creencias acerca del rol y la actuación del profesor
   3.1.1 Creencias sobre la dimensión cognitiva del profesor
   (v.g. Nuestro profesor muestra paso a paso cómo debemos resolver un problema matemático)
   3.1.2 Creencias sobre la dimensión motivacional del profesor
   (v.g. Nuestro profesor realmente quiere que disfrutemos aprendiendo cosas nuevas)
   3.1.3 Creencias sobre la dimensión afectiva del profesor
   (v.g. A nuestro profesor le importa cómo nos sentimos en las clases de matemáticas)
   3.2 Creencias acerca del rol y actuación del estudiante
   (v.g. Pregunto a mi profesor de matemáticas cuando no entiendo algo)
   3.3 Creencias acerca de las normas y prácticas socio-matemáticas en la clase
   (v.g. Estoy siempre atento cuando mi profesor de matemáticas explica)

En una revisión más actual Jankvist (2009, 2015) amplía el modelo de Op't Eynde *et al.* (2002) proponiendo una cuarta dimensión 'creencias sobre las matemáticas como disciplina' en la que considera cuestiones sobre su origen y evolución; por ejemplo, si las matemáticas fueron descubiertas o inventadas.

Instrumentos de evaluación de las creencias: el MRBQ

Varios de los modelos anteriores se han evaluado mediante estudios cuantitativos y en concreto con cuestionarios o escalas Likert. El modelo de cuatro dimensiones propuesto por McLeod (1992) fue por ejemplo evaluado mediante el instrumento de Lazim, Abu y Wan (2004). De forma similar, la consistencia del modelo de Op't Eynde *et al.* (2002) fue verificada mediante el instrumento MRBQ (Mathematics-Related Beliefs Questionnaire) diseñado por Op't Eynde y De Corte (2003), y que evalúa 11 de sus 13 sub-dimensiones.[3] El MRBQ es el instrumento de evaluación de las creencias que mayor fiabilidad ha mostrado en la última década. Se ha refinado en varios estudios, mostrando consistencia con estudiantes de diferentes contextos socioculturales incluidos España (Gómez-Chacón *et al.*, 2006); España e Inglaterra (Diego-Mantecón, Andrews y Op't Eynde, 2007; Diego-Mantecón, 2013); Inglaterra, Eslovaquia y España (Andrews, Diego-Mantecón, Vankúš y Op't Eynde, 2011); España, Inglaterra, Eslovaquia e Irlanda (Diego-Mantecón y Andrews, 2008), y más recientemente Ecuador (De Corte, 2015). La continua evaluación del cuestionario en diferentes contextos le confiere más validez que otros instrumentos que han sido utilizados sólo en estudios puntuales.

El cuestionario original de 58 ítems fue testado por primera vez con 365 estudiantes flamencos (Op't Eynde y De Corte, 2003). Tras un análisis factorial con rotación ortogonal se forzó la extracción de cuatro factores, porque según sus autores este era el modelo que posibilitaba una mejor interpretación de los datos. Los cuatro factores se etiquetaron como: (1) Rol y actuación del profesor, (2) Importancia y competencia en matemáticas, (3) Las matemáticas como una actividad social, y (4) Las matemáticas como un dominio de excelencia. El

[3] Las sub-dimensiones 3.2 'Creencias acerca del rol y actuación del estudiante en la clase' y 3.3 'Creencias acerca de las normas y prácticas socio-matemáticas en la clase' presentadas en la Tabla 1 no fueron consideradas en el MRBQ original, al no ser exploradas en profundidad en el modelo teórico (Op't Eynde *et al.*, 2002).

análisis explicó una varianza de 38.3% y generó unas alfas de Cronbach de 0.92, 0.89, 0.65 y 0.69, para cada uno de los cuatro factores. Posteriormente, el MRBQ se validó en otros contextos internacionales, con las correspondientes adaptaciones. En estos nuevos análisis también se forzó la extracción de cuatro factores para facilitar la comparación de resultados con el estudio original. Se destacan en particular los estudios de Diego-Mantecón (2013) y De Corte (2015) realizados en España y Ecuador respectivamente. Como muestra la tabla 2, los análisis de Diego-Mantecón y De Corte explicaron una varianza de 39.4% y de 46.8% respectivamente, superando en ambos casos la varianza reportada en el estudio original. La tabla 2 muestra también las variaciones en los valores de fiabilidad en cada factor, así como el refinamiento en el etiquetado para los tres estudios.

Tabla 2. Estudios anteriores del MRBQ. Factores, fiabilidad y varianza

Op't Eynde y De Corte (2003)		**Diego-Mantecón (2013)**		**De Corte (2015)**	
Factor	α	**Factor**	α		α
Rol y actuación del profesor	0.92	Profesor como facilitador del aprendizaje	0.93	Rol y actuación del profesor	0.85
Importancia y competencia en matemáticas	0.89	Autoeficacia	0.89	Significado y competencia en matemáticas	0.89
Las matemáticas como una actividad social	0.65	Relevancia de las matemáticas en la vida real	0.82	Las matemáticas como una materia que se puede aprender	0.79
Las matemáticas como un dominio de excelencia	0.69	Las matemáticas como una necesidad funcional de la vida escolar	0.78	Las matemáticas como una necesidad funcional en la vida escolar	0.79
Varianza Explicada	38.3%		39.4%		46.8%

Conviene resaltar que el estudio de Diego-Mantecón (2013), a diferencia de los otros estudios, identificó sub-factores en dos de los cuatro factores. Mediante un segundo análisis factorial Diego-Mantecón encontró que el factor 3 identificado como 'Relevancia de las matemáticas en la vida real' se subdivide en dos sub-factores: 'Aplicación de las matemáticas en la vida real' e 'Importancia de una comprensión flexible y profunda de las matemáticas'; y el factor 4 'Las matemáticas como una necesidad funcional de la vida escolar' está formado por los sub-factores: 'Las matemáticas como asignatura inaccesible' y las 'Matemáticas como asignatura de destrezas mecánicas'. De acuerdo con lo anterior, Diego-Mantecón identificó seis dimensiones de creencias, aportando de esta forma información más precisa a la estructura original de cuatro factores.

Lo descrito anteriormente muestra al MRBQ como uno de los instrumentos más utilizados y más fiables para evaluar las creencias de los estudiantes en diferentes contextos socio-culturales.

METODOLOGÍA

Como se ha indicado con anterioridad las creencias son una variable fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, permitiendo identificar factores que influyen en este proceso. Disponer de un cuestionario como el MRBQ que evalúe de forma fiable las creencias acerca de las matemáticas se hace por lo tanto necesario. En concreto, este estudio tiene como objetivo proporcionar a la comunidad educativa una adaptación y validación del MRBQ al contexto colombiano, ya que en la actualidad no se conocen instrumentos que identifiquen con fiabilidad las creencias en este contexto.

Para evitar problemas de equivalencia conceptual y lingüística (Helms, 1992; Osborn, 2004) se tomó como base la versión de Diego-Mantecón (2013) que había sido traducida al español y validada en España. Además de adaptar los ítems para establecer equivalencia transcultural, éstos fueron también revisados para incrementar su validez de contenido (De Vellis, 2003; McQueen y Knussen, 2002,) y establecer su validez interna (Sarantakos, 2013; Cohen, Manion y Morrison, 2003), aspectos no considerados en estudios anteriores de este instrumento. Para incrementar la validez de los ítems en términos de contenido, y asegurar que evaluaban los aspectos pretendidos por los investigadores (McQueen y Knussen, 2002), éstos fueron revisados por un comité de expertos. En este sentido varios de los ítems, en particular aquellos que incluían más de una idea, se eliminaron o reformularon al conducir a respuestas sesgadas. Por ejemplo, el ítem 'Las matemáticas son una asignatura necesaria y que vale la pena' se reformuló de la siguiente manera 'Las matemáticas son una asignatura necesaria'.

La validez interna se refiere al grado en el que el diseño de los instrumentos puede afectar a los resultados del estudio (Sarantakos, 2013). En este trabajo se incrementó la validez interna de los ítems verificando que estos eran comprensibles por los sujetos a investigar, tal y como sugieren Cohen *et al.* (2003). Para ello se administró inicialmente el cuestionario a un grupo de 30 estudiantes de secundaria, con características similares a las de la muestra principal. Varios ítems que resultaron confusos para los alumnos fueron refinados, mejorando la redacción y sintetizando la información. Durante este proceso también se reformularon aquellos ítems que en el instrumento original estaban orientados negativamente, por ser este un factor que reduce la calidad de las respuestas y afecta la consistencia interna de las escalas (Suárez-Álvarez *et al.*, 2018). Por ejemplo, el ítem 'A mi profesor no le preocupa cómo nos sentimos en clase' se reformuló 'A mi profesor le preocupa cómo nos sentimos en clase'.

Una vez realizados los ajustes anteriores, el cuestionario fue aplicado a una muestra no aleatoria de 670 estudiantes (357 hombres y 313 mujeres) a la que los investigadores tenían acceso. Los participantes eran de edades comprendidas entre los 14 y 15 años, siguiendo la línea de los estudios originales. Esta edad se corresponde en Colombia con el noveno curso de educación secundaria. Los estudiantes pertenecían a seis centros públicos situados en la periferia de la ciudad de Medellín y representativos de un nivel socioeconómico bajo, correspondiéndose con los niveles 1 y 2 de estratificación en una escala de 6 niveles, donde 1 es el nivel más bajo. El cuestionario fue administrado directamente por uno de los investigadores para evitar sesgos en la recogida de datos.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Para evaluar la validez del instrumento en el contexto colombiano se aplicó un análisis factorial con rotación ortogonal, como en los estudios originales. Antes de computar el análisis factorial se realizó un escrutinio de los datos para evaluar el grado de adecuación de este análisis a la muestra. Se computó una matriz de correlaciones para eliminar aquellos ítems que correlacionaban muy bajo (con valores inferiores a 0.20) o muy alto (con valores superiores a 0.90), y que por lo tanto no son recomendables a la hora de aplicar análisis factorial (Field, 2009). También se computó el test de adecuación muestral de Kaiser Meyer-Olkin (KMO) y la prueba de esfericidad de Bartlett que arrojó un valor de 0.921 con una $p < 0.00005$, lo que sugirió que los datos eran adecuados para aplicar análisis factorial (Field, 2009).

A diferencia de los estudios anteriores realizados con el MRBQ no se forzó la extracción de cuatro factores, sino que se consideró el criterio de Kaiser (1960) y el test de Cattell (1978) para determinar los factores a extraer. El criterio de Kaiser recomienda extraer el número de factores correspondientes a los valores propios mayores que uno, y el test de Cattell aquellos que indica el punto de inflexión del gráfico de sedimentación. En este caso, se optó por la extracción de 10 factores recomendados por el criterio de Kaiser ya que permitían una interpretación más completa de los datos. Los 10 factores extraídos explican una varianza de 56.34%. En la tabla 3 se muestran los factores extraídos con sus respectivos ítems y cargas factoriales.

Tabla 3. Factores extraídos y cargas factoriales de los ítems

Factores		Cargas factoriales									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dominio afectivo del profesor	Mi profesor trata de hacer las clases de matemáticas interesantes	**,786**									
	Mi profesor quiere que disfrutemos cuando aprendemos cosas nuevas	**,741**									
	A mi profesor le preocupa cómo nos sentimos en clase	**,726**									
	Mi profesor comprende las dificultades que tenemos con las matemáticas	**,720**									
	Mi profesor de matemáticas es muy amable con nosotros	**,695**									
	Mi profesor valora cuando nos esforzamos en clase, aunque nuestros resultados no sean los mejores	**,675**									
	Mi profesor nos escucha atentamente cuando participamos en clase	**,594**									
	Mi profesor piensa que los errores que cometemos están bien mientras estemos aprendiendo de ellos	**,552**			,352						
Competencia e interés	Puedo comprender incluso el tema más difícil que nos enseñen en clase de matemáticas		**,692**								
	Entiendo todo lo que hemos hecho en matemáticas	,378	**,639**								
	Me gustan las tareas que sean difíciles		**,629**								
	Me interesan mucho las matemáticas		**,606**	,439							
	Normalmente puedo hacer problemas de matemáticas que me toman mucho tiempo en resolver		**,552**								
	Me gusta hacer cosas relacionadas con las matemáticas		**,549**								
	Me gusta lo que aprendo en clase de matemáticas	,388	**,511**	,416							
	Estoy seguro de poder aprender a resolver problemas difíciles de matemáticas		**,509**								
	Creo que este año sacaré una buena nota en matemáticas		**,485**								

	Factores	Cargas factoriales									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor intrínseco	Las matemáticas son importantes para mí			**,785**							
	Las matemáticas son una asignatura necesaria			**,765**							
	Creo que las matemáticas son una materia importante			**,707**							
	Estudiar matemáticas es una pérdida de tiempo			**,623**							
	Yo estudio matemáticas porque sé lo útiles que son			**,617**							
	Creo que lo que estoy aprendiendo en matemáticas es muy útil saberlo			**,540**							
	Creo que lo que estoy aprendiendo en clase de matemáticas es interesante	,418	,364	**,533**							
Valor extrínseco	Las matemáticas nos permiten comprender mejor el mundo en que vivimos				**,692**						
	Las matemáticas se utilizan todo el tiempo en la vida cotidiana de las personas				**,671**						
	Saber matemáticas me ayudará a ganarme la vida en un futuro			,433	**,564**						
	Puedo usar lo que he aprendido en matemáticas en otras materias			,257	**,397**						
Visón reduccionista	Obtener la respuesta correcta en matemáticas es más importante que comprender por qué esta es correcta					,734					
	Sólo hay una manera de encontrar la solución correcta a un problema de matemáticas					,632					
Enfoque constructivista	Discutir diferentes métodos de resolución a un problema de matemáticas es una buena manera de aprender matemáticas						**,611**				
	Nosotros hacemos mucho trabajo en equipo en clase de matemáticas	,300					**,547**				
	Todo el mundo puede aprender matemáticas				,246		**,500**				

Factores		Cargas factoriales									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Demanda cognitiva alta	El tiempo dedicado a entender por qué la solución a un problema es correcta es tiempo bien invertido							,618			
	Para aprender matemáticas lo más importante es tener buena memoria para recordarlo todo							-,611			
Competencia comparada	Haciendo lo mejor que pueda en matemáticas, quiero demostrar a mi profesor que soy mejor que otros compañeros de clase.								,767		
	Me esfuerzo mucho estudiando para demostrarle a los demás lo bueno que soy en matemáticas								,716		
Dominio de excelencia	Todo el mundo tiene que pensar mucho para resolver un problema de matemáticas									,742	
	Tengo que esforzarme demasiado para entender las matemáticas		,449							,452	
	Mi único interés en matemáticas es conseguir una buena calificación en la materia					,334				,437	
Demanda cognitiva baja	Para mi profesor de matemáticas es más importante cumplir con el contenido de la asignatura que prestarnos atención en clase										,677
	Mi profesor sólo quiere que memoricemos el contenido del curso de matemáticas										,607
	Alfa de Cronbach	,88	,85	,87	,66	,41	,49	,43	,57	,54	,42

Para etiquetar los factores extraídos se consideraron los ítems con mayor carga factorial en cada columna; de acuerdo con Field (2009) y De Vellis (2003) estos son los que mejor representan el significado de los factores. El factor 1 se etiquetó como **Dominio afectivo del profesor** al incluir ítems con expresiones relacionadas con las emociones del profesor, durante la interacción con los alumnos y su aprendizaje, tales como 'trata de hacer las clases interesantes' o 'quiere que disfrutemos'. El factor 2 hace alusión a la **Competencia e interés por las matemáticas** ya que incluye ítems relacionados con la percepción de uno mismo sobre su capacidad a la hora de trabajar las matemáticas (v.g. 'Puedo comprender incluso el tema más difícil') e ítems relacionados con el interés o gusto por esta materia (v.g. 'Me interesan las matemáticas'). El factor 3 se etiquetó **Valor intrínseco de las matemáticas** al aparecer en éste expresiones relacionadas con el valor de las matemáticas en sí mismas (v.g. 'Las matemáticas son importantes para mí') y no por un valor externo que se pueda obtener de su estudio o aprendizaje. El factor 4 se identificó **Valor extrínseco de las matemáticas** al contener ítems tales como 'se utilizan en la vida cotidiana' o 'nos permiten comprender mejor el mundo en el que vivimos' relacionados con la utilidad de las matemáticas como herramienta para resolver situaciones reales y comprender nuestro entorno. El factor 5 se relacionó con una **Visión reduccionista de las matemáticas**; expresiones como 'obtener la respuesta correcta es lo más importante' o 'sólo hay una manera de encontrar la solución correcta' evidencian un enfoque práctico y limitado de las matemáticas, percibiéndose éstas en términos de resultados a los que se llega por una sola vía.

El factor 6 se relaciona con un **Enfoque constructivista de las matemáticas**. Ítems como 'Discutir diferentes métodos de resolución es una buena manera de aprender' o 'Hacemos mucho trabajo en equipo' entroncan con una enseñanza constructivista en la que se enfatiza el proceso de resolución sobre el propio resultado, y se valora el aprendizaje colaborativo. El factor 7 hace referencia a una **Demanda cognitiva alta** al aparecer en éste ítems que resaltan la importancia de los procesos de comprensión (v.g. 'Entender por qué una solución es correcta es tiempo bien invertido') frente a los de memorización (v.g. 'Tener buena memoria no es lo más importante para aprender matemáticas'). El factor 8, **Competencia comparada**, incluyó dos ítems que reflejan el deseo por mostrar una alta capacidad y reconocimiento frente a los demás: 'Quiero demostrar a mi profesor que soy mejor que otros' y 'Me esfuerzo estudiando para demostrar lo bueno que soy'. El factor 9 se designó **Dominio de excelencia** al representar las matemáticas como accesibles sólo para aquellos capaces de pensar y esforzarse mucho (v.g. 'Todo el mundo tiene que pensar mucho para resolver un problema de matemáticas'). Finalmente, el factor 10 se etiquetó **Enfoque tradicionalista de las matemáticas** ya que hace alusión a una enseñanza centrada en los contenidos y su memorización. Así lo reflejan ítems tales como: 'Mi profesor sólo quiere que memoricemos el contenido' o 'Para mi profesor es más importante el contenido de la asignatura que prestarnos atención'.

Una vez extraídos y etiquetados los factores se aplicó un segundo análisis factorial en cada uno de ellos para asegurar su unidimensionalidad; posteriormente se computó el alfa de Cronbach para conocer su fiabilidad (Wells y Wollack, 2003). Como muestra la tabla 3, tres de los factores presentaron una consistencia interna alta (Field, 2009) con alfas superiores a 0.80, tres una consistencia media con valores entre 0.54 y 0.66, y el resto una consistencia baja con valores entre 0.40 y 0.50.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los resultados descritos anteriormente muestran que, si no se fuerza la extracción de factores y se atiende a los criterios de extracción, el MRBQ genera un modelo de 10 factores que se corresponde, en gran medida, con el modelo teórico propuesto por Op't Eynde et al. (2002). Estos 10 factores se alinean en concreto con las 11 sub-dimensiones de creencias descritas inicialmente en su modelo y no con las cuatro dimensiones que se han venido identificando en los estudios empíricos hasta el momento (ver por ejemplo Op't Eynde y De Corte, 2003; Gómez-Chacón et al., 2006; Diego-Mantecón, 2013; y De Corte, 2015). Estos resultados son significativos, ya que la identificación de los 10 factores permite un estudio más detallado de las creencias del estudiante, posibilitando análisis más precisos sobre su influencia en el aprendizaje.

Los resultados del presente estudio muestran que varias de las dimensiones inicialmente propuestas por Op't Eynde *et al.* (2002), y que emergieron en estudios anteriores bajo un mismo factor, ahora surgen separadas en factores diferentes. Por ejemplo, las dimensiones sobre 'la importancia de las matemáticas', 'la utilidad de las matemáticas' y 'la orientación extrínseca a la meta', consideradas entidades independientes en el modelo teórico, aparecen representadas en este estudio por los factores 'Valor intrínseco de las matemáticas', 'Valor extrínseco de las matemáticas' y 'Competencia comparada'. En estudios anteriores estas dimensiones emergieron repetidamente bajo un mismo factor: en los trabajos de Gómez-Chacón *et al.* (2006) y De Corte (2015) aparecieron bajo el factor 'Creencias sobre el significado y la competencia en matemáticas', y en el de Diego-Mantecón (2013) bajo el factor denominado 'Relevancia de las matemáticas en la vida real'. Forzar la extracción de cuatro factores ha provocado que diferentes dimensiones de creencias se aglutinen bajo un mismo factor. Este hecho ha impedido análisis pormenorizados de cada dimensión lo que ha dificultado conocer con precisión los tipos de creencias que influyen más en el rendimiento académico del estudiante. Contar con factores unidimensionales, como los obtenidos en el presente estudio, permitirá establecer relaciones entre los diferentes tipos de creencias, proporcionando información más precisa sobre su influencia en el aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con lo anterior, el modelo de 10 factores es más explicativo que el modelo de cuatro y da cuenta de varias de las dimensiones subyacentes que componen el modelo teórico, lo que posibilitará comprender más ampliamente el espectro de creencias de los estudiantes. Estos resultados no se hubieran obtenido forzando la extracción de cuatro factores. Es importante destacar que el estudio de Diego-Mantecón (2013), que revelaba sub-factores a través de un segundo análisis factorial, ya sugería trabajar con factores unidimensionales. En este sentido, el presente estudio respalda el análisis de Diego-Mantecón (2013), en cuanto a la búsqueda de factores unidimensionales, y lo mejora en cuanto al hecho de no forzar la extracción de un determinado número y guiarse por criterios de extracción contrastados, como el de Kaiser (1960) y el de Cattell (1978), que resultan útiles en estudios de carácter exploratorio (Yong y Pearce, 2013). Como se ha descrito anteriormente, el análisis de Diego-Mantecón (2013) identificó seis dimensiones de creencias, después de aplicar el segundo análisis factorial, frente a las 10 obtenidas en el presente estudio.

Desde el punto de vista analítico y de fiabilidad del instrumento, los 10 factores extraídos explican una varianza de 56.34% superior a la de los cuatro factores descritos en estudios anteriores. Como se ha indicado previamente, los factores extraídos por Op't Eynde y De Corte (2003), Diego-Mantecón (2013) y De Corte (2015) explicaron varianzas de 38.3%, 39.4% y 46.8% respectivamente. Importante, los 10 factores obtenidos en el presente estudio son unidimensionales; es decir, cada uno representa una única variable de creencias. Tres de ellos mostraron una consistencia interna alta con alfas de Cronbach superiores a 0.80, lo que les aporta fiabilidad para ser utilizados en el contexto colombiano. Otras tres mostraron una consistencia media con valores entre 0.54 y 0.66, y el resto una consistencia baja con valores entre 0.40 y 0.50. Estos últimos son susceptibles de ser refinados en futuros estudios para mejorar su fiabilidad, pero son factores potencialmente consistentes ya que apenas incluyen dos ítems. Por ejemplo, el factor 'Visión reduccionista de las matemáticas' que generó una alfa de 0.49, está conformado únicamente por dos ítems 'Obtener la respuesta correcta en matemáticas es más importante que entender por qué ésta es correcta' y 'Sólo hay una manera de encontrar la solución correcta a un problema de matemáticas'. Estos ítems arrojaron unas cargas factoriales aceptables de 0.734 y 0.632 respectivamente, sugiriendo que la fiabilidad del factor se puede mejorar en investigaciones posteriores con la inclusión de nuevos ítems que ayuden a conformar la variable que representan.

Como muestra la tabla 3, la mayoría de los factores con una consistencia media o baja son aquellos que se han generado a partir de dos o tres ítems máximo. Este reducido número en cada factor se debe a que las escalas originales –diseñadas por Op't Eynde y De Corte (2003) para validar su modelo teórico– se han ido distorsionando tras las continuas adaptaciones del MRBQ. Inicialmente el MRBQ constaba de 58 ítems, este número se redujo a 40 en el primer estudio de Op't Eynde y De Corte (2003) con estudiantes flamencos, después de forzar la extracción de cuatro factores. Los estudios posteriores se centraron, por lo general, en adaptar o mejorar la fiabilidad de estos cuatros factores a un contexto particular, y no en perfeccionar las escalas originales encaminadas a evaluar las 11 variables del modelo teórico. Por ejemplo, Gómez-Chacón *et al.* (2006) añadieron cuatro ítems nuevos a los 40 resultantes del estudio de Op't Eynde y De Corte (2003) para evaluar las creencias de estudiantes españoles. De forma similar, Diego-Mantecón (2006) y Diego-Mantecón *et al.* (2007) incorporan 33 a los 40 existentes con el objetivo de mejorar la fiabilidad de los cuatro factores extraídos en investigaciones previas, y adaptar el instrumento al contexto eslovaco, inglés y español. Como en estudios previos, Diego-Mantecón (2006, 2013) forzó la extracción de cuatro factores para facilitar la comparación de datos.

En síntesis, los autores que han empleado el MRBQ se han centrado, por lo general, en mejorar la fiabilidad de los cuatro factores extraídos en el estudio de Op't Eynde y De Corte (2003), eliminando ítems originales y diseñando otros nuevos. Estos estudios han obviado las dimensiones de creencias inicialmente propuestas en el modelo teórico de Op't Eynde *et al.* (2002) y las escalas originales diseñadas para su evaluación (Op't Eynde y De Corte, 2003). Esto explica que en el presente trabajo algunos de los 10 factores extraídos estén constituidos únicamente por dos ítems. La fiabilidad de estos factores es susceptible de aumentar al incluir nuevos ítems y mejorar las escalas originales que representan.

CONCLUSIONES

Como se ha descrito inicialmente, el objetivo fundamental del presente estudio era adaptar y validar la versión española del MRBQ al contexto colombiano, para ofrecer a la comunidad educativa un instrumento fiable que posibilite identificar y analizar las creencias de los estudiantes. Los resultados mostraron cierto grado de consistencia del instrumento para su uso en el contexto colombiano, sirviendo este como base para el desarrollo de uno más refinado que permita evaluar las creencias con mayor fiabilidad.

Este trabajo reveló, a diferencia de estudios anteriores, que el MRBQ replica en cierto grado el modelo teórico inicialmente propuesto por Op't Eynde *et al.* (2002) y que había sido obviado, al menos parcialmente, en otras investigaciones. En particular, los resultados revelan que el MRBQ genera, en el contexto colombiano, un modelo de 10 factores –que permite una mayor comprensión e interpretación de las creencias de los estudiantes– y no uno de cuatro como el que se había obtenido reiteradamente en evaluaciones anteriores. Estos 10 factores representan más fielmente el modelo teórico original; cada uno de ellos está bien definido y ha mostrado ser unidimensional, lo que constituye un primer paso hacia la construcción de un instrumento válido para el estudio de las creencias acerca de las matemáticas en Colombia.

Es importante resaltar que algunos de los factores identificados se generaron a partir de sólo dos ítems y mostraron un valor de fiabilidad medio-bajo. Es, por lo tanto, necesario llevar a cabo nuevos estudios encaminados a refinar y completar las escalas que representan estos factores, mejorando la edición de algunos ítems e incorporando otros nuevos que ayuden a incrementar la consistencia de los factores. La realización de estos estudios ayudará a la construcción de un instrumento más sólido, que facilitará análisis más rigurosos y como consecuencia resultados más precisos sobre las creencias y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha elaborado bajo el marco del proyecto de investigación EDU2017-84979-R del gobierno de España. También ha recibido apoyo del programa de Investigación e Innovación Horizon 2020 de la Unión Europea, bajo el acuerdo Horizon 2020- Seac-2015- 1-710577. Durante la realización de

este trabajo, Francisco Javier Córdoba-Gómez era estudiante de doctorado en la Universidad de Cantabria (España).

REFERENCIAS

Abelson, P. (1979). Differences between belief and knowledge systems. *Cognitive Science, 3*, 355- 366.

Andrews, P. y Diego-Mantecón, J. M. (2015). Instrument adaptation in cross-cultural studies of students' mathematics-related beliefs: Learning from healthcare research. *Compare: A Journal of Comparative and International Education*, *45*(4), 545-567.

Andrews, P., Diego-Mantecón, J. M., Vankúš, P. y Op't Eynde, P. (2011). Construct consistency in the assessment of students' mathematics-related beliefs: a three-way cross-sectional pilot comparative study. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 11,* 1-25.

Angulo, L., Reyes, A., Triana, K. y Aristizábal, A. (2016). Análisis y recomendaciones para el cambio del currículo en la escuela: El programa PISA, los estándares básicos de competencias y los planes de estudio de matemáticas. *Revista Científica, Edición Especial*, 34-35.

Arévalo, C. y González, O. (2013). La compresión y reflexión de los procesos cognitivos que se generan en las prácticas de estudiantes para profesor a la hora de demostrar en geometría. *Revista Científica, Edición Especial*, 27-31.

Bandura, A. (1993). Perceived self-efficacy in cognitive development and functioning. *Educational Psychologist, 28*, 117-148.

Bandura, A. (1999). Social cognitive theory: An aggentic perspective. *Asian Journal of Social Psychology, 2,* 21-41.

Beck, A.T. (1976). *Cognitive therapy and the emotional disorders*. Madison: International Universities Press.

Bofah, E. y Hannula, M. (2016). Students' views on mathematics in single-sex and coed classrooms in Ghana. *European Journal of Science and Mathematics Education, 4*(2), 229-250.

Cattell, R.B. (1978). *The scientific use of factor analysis in behavioral and life sciences*. New York, NY: Plenum Press.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2003). *Research methods in education*. London: Routledge Falmer

De Corte, E. (2015). Mathematics-related beliefs of Ecuadorian students of grades 8–10. *International Journal of Educational Research, 72,* 1-13.

De Vellis, R. F. (2003*). Scale Development: Theory and Applications* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Diego-Mantecón, J. M. (2006). *A comparison of secondary English and Spanish Students' conceptions about Mathematics*. University of Cambridge: Faculty of Education.

Diego-Mantecón, J. M. (2012). *Clarifying the field of student mathematics-related beliefs: developing measurement scales for 14/15-year-old students across Bratislava, Cambridgeshire, Cantabria, and Cyprus*. Doctoral thesis. Faculty of Education, University of Cambridge.

Diego-Mantecón, J. M. (2013). Evaluación de un modelo de creencias transcultural para el aprendizaje de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 16*(3), 561-574.

Diego-Mantecón, J. M. y Andrews, P. (2008). Construct consistency in the assessment of students' mathematics-related beliefs: a four-way cross-sectional pilot study. *11th International Congress on Mathematical Education ICME.* Monterrey, México.

Diego-Mantecón, J. M., Andrews, P. y Op't Eynde, P. (2007). Mejora y evaluación de un cuestionario de creencias de matemáticas en función de nacionalidad, edad y sexo. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática, XI,* 325-333.

Diego-Mantecón, J. M. y Córdoba-Gómez, F. (2018). Creencias acerca de las matemáticas de estudiantes colombianos: adaptación y validación de un cuestionario. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 418-424.

Field, A. (2009). *Discovering statistics using SPSS*. London: Sage Publications.

Frank, M. L. (1985). *Mathematical beliefs and problem solving*. Unpublished doctoral dissertation. Purdue University. University Microfilms International.

Furinghetti, F. y Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. In. G.C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education* (pp. 39-57). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-292.

Gómez-Chacón, I., Op't Eynde, P. y De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias. 24*(3), 309- 324.

Hannula, M. (2004). *Affect in mathematical thinking and learning.* Doctoral thesis. Faculty of Education, University of Turku, Finland.

Hannula, M. (2006). Motivation in mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 165–178.

Helms, J. E. (1992). Why is there no study of cultural equivalence in standardized cognitive ability testing? *American Psychologist, 47*, 1083-1101.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2015). Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros. *Educación Matemática, 27*(1), 65-90.

House, J. D. (2006). Mathematics beliefs and achievement of elementary school students in Japan and the United States: Results from the Third International Mathematics and Science Study. *The Journal of genetic psychology, 167*(1), 31-45.

Iriarte, A. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona Próxima: Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación,* (15), 2-21.

Jankvist, U. (2009). *Using history as a 'Goal' in mathematics education* (Tesis Doctoral thesis). Roskilde: IMFUFA, Roskilde University. No. 464 in Tekster fra IMFUFA.

Jankvist, U. (2015). Changing students' images of "mathematics as a discipline. *Journal of Mathematical Behavior, 38,* 41–56.

Kaiser, H. F. (1960). The application of electronic computers to factor analysis. *Educational and Psychological Measurement, 20*, 141-151.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kislenko, K., Grevholm, B. y Lepik, M. (2007). Mathematics is important but boring: Students' beliefs and attitudes towards mathematics. In C. Bergsten, B. Grevholm, H. S. Masoval y F. Ronning (Eds.). *Relating practice and research in mathematics education*. Proceedings of NORMA 05, (pp. 349-360). Trondheim, Norway: Tapir Academic Press.

Kloosterman, P. y Stage, F. (1992). Measuring beliefs about mathematical problem solving. *School Science and Mathematics, 92* (3), 109-115.

Kloosterman, P. (1996). Students' beliefs about knowing and learning mathematics: Implications for motivation. In M. Carr (Ed.), *Motivation in Mathematics* (pp. 131-156). Cresskill, NJ: Hampton Press.

Knapp, P. y Beck, A. T. (2008). Cognitive therapy: foundations, conceptual models, applications and research. *Revista Brasileira de Psiquiatria, 30*, S54-S64.

Lazim, M. A., Abu Osman, M. T. y Wan Salihin, W. A. (2004). The statistical evidence in describing the students' beliefs about mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 77.

Lomas, G., Grootenboer, P. y Attard, C. (2012). The affective domain and mathematics education. In *B.* Perry *et al.*, (Eds.), *Research in Mathematics Education in Australasia 2008–2011,* (pp. 23–37). Rotterdam: Sense Publischers.

López, O., Hederich-Martínez, C. y Camargo, A. (2012). Logro en matemáticas, autorregulación del aprendizaje y estilo cognitive. *Suma Psicológica, 19*(2), 39-50.

Martínez Padrón, O. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere, 17*(57), 231-239.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning*, (pp. 575-598). New York: Macmillan.

McLeod, D. (1994). Research on Affect and Mathematics Learning in the JR-ME: 1970 to the Present. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25* (6), 637-647.

McQueen, R. y Knussen, C. (2002). *Research methods for social science: An introduction*. Harlow: Pearson Education Limited.

Murcia, M. y Henao, J. (2015). Educación matemática en Colombia, una perspectiva evolucionaria. *Entre Ciencia e Ingeniería, 9*(18), 23-30.

Op't Eynde, P. y De Corte, E. (2003). Students' mathematics- Related belief systems: Design and analysis of questionnaire. *Paper presented at the 2003 Annual Meeting of the American Educational Research Association, April 21-25, Chicago.*

Op't Eynde, P., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics – related beliefs: A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G.C. Leder, E. Pehkonen, y G.Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 13-37). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Osborn, M. (2004). New methodologies for comparative research; Establishing 'constants' and 'contexts' in educational experience. *Oxford Review of Education, 30*(2), 265-285.

Pajares, F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, *62* (3), 307-332.

Pajares, F. y Miller, D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of Educational Psychology, 86*(2), 193-203.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa, 8*(1), 69-90.

Pehkonen, E. (1995). *Pupils' View of Mathematics: Initial report for an international comparison project* (Research Report 152). University of Helsinki: Department of Teacher Education.

Pehkonen, E. (1999). Beliefs as obstacles for implementing an educational change in problem solving. In E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics: Proceedings of the workshop in Oberwolfach, November 1999.* (pp. 106-114). Duisburg, Germany: Gerhard Mercator Universität Duisburg.

Pehkonen, E. y Törner, G. (1999). Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research. In E. Pehkonen y G. Törner (Eds.*), Mathematical beliefs* *and their impact on teaching and learning of mathematics: Proceedings of the workshop in Oberwolfach, November 1999.* (pp. 50-56). Duisburg, Germany: Gerhard Mercator Universität Duisburg.

Pehkonen, E. y Pietilä, A. (2003). On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education. In *Proceedings of the Congress of European Research in Mathematics Education CERME 3, Bellaria, Italy.*

Prendergast, M., Breen, C., Bray, A., Faulkner, F., Carroll, B., Quinn, D. y Carr, M. (2018). Investigating secondary students' beliefs about mathematical problem-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(8), 1-16.

Santos, D. y Lozada, G. (2013). ¿Es posible hacer evidentes los procesos de meta-cognición en la resolución de problemas? *Revista Científica, Edición Especial*, 47-50.

Sarantakos, S. (2013). *Social research*. Hong Kong: Macmillan International Higher Education.

Schoenfeld, A. (1982). *Expert and Novice Mathematical Problem Solving*. Final Project Report and Appendices B-H. Washington, D.C.: National Science Foundation.

Schoenfeld A. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of 'well-taught' mathematics: the disasters of 'well-taught' mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*(2), 145–166.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of student's mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 338- 355.

Schoenfeld, A. H. (2012). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-243). Springer International Publishing.

Schommer, M., Crouse, A. y Rhodes, N. (1992). Epistemological beliefs and mathematical text comprehension: Believing it is simple does not make I so. *Journal of Educational Psychology, 84*, 435-443.

Schommer-Aikins, M. (2002). An evolving theoretical framework for an epistemological belief system. In. B. K. Hofer y P.R. Pintrich (Eds.), *Personal epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (pp. 103-118). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Schunk, D. H. y Pajares, F. (2002). The development of academic self-efficacy. In A. Wigfield y J. S. Eccles (Eds.), *Development of achievement motivation* (pp. 16–32). San Diego, CA: Academic Press.

Skott, J. (2015). Towards a participatory approach to 'beliefs' in mathematics education. In B. Pepin y B. Roesken-Winter (Eds.), *From Beliefs to Dynamic Affect Systems in Mathematics Education. Exploring a Mosaic of Relationships and Interactions* (pp. 3-23). Switzerland: Springer.

Suárez-Álvarez, J., Pedrosa, I., Lozano, L. M., García-Cueto, E., Cuesta, M. y Muñiz, J. (2018). Using reversed items in likert scales: A questionable practice. *Psicothema, 30*(2), 149-158.

Toro-Carvajal, L., Ortíz-Álvarez, H., Jiménez-García, F. y Agudelo-Calle J. (2012). Los sistemas cognitivos artificiales en la enseñanza de la matemática. *Educación y Educadores, 15*(2), 167-183.

Underhill, R. (1988). Mathematics learners' beliefs: A review. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 10*(1), 55-69.

Vila, A. y Callejo, M. (2005*). Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Madrid: Narcea.

Villoro, L. (2006). *Creer, saber, conocer.* México: Siglo XXI.

Wells, C. y Wollack, J. (2003). *An Instructor's Guide to Understanding Test Reliability.* University of Wisconsin: Testing y Evaluation Services.

Yong, A.G. y Pearce, S. (2013). A beginner's guide to factor analysis: focusing on exploratory factor analysis. *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology 2013, 9*(2),79-94.

Zambrano, G. (2008). Preguntas cognitivas y metacognitivas en el aprendizaje y la generación de estrategias de resolución de problemas matemáticos. *Revista Inventum, 4*, 25-50.

JOSE MANUEL DIEGO-MANTECÓN

Dirección: Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias
Avda. de Los Castros 48. 39005 Santander, Cantabria (España)

Teléfono: (+34) 655 45 71 07

 DOI: 10.24844/EM3101.04

'Las matemáticas son para ser aplicadas': Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato

'Mathematics is to be applied': Mathematical beliefs of high school mathematics teachers

Gustavo Martínez-Sierra[1]
María Valle-Zequeida[2]
Javier García-García[3]
Crisólogo Dolores-Flores[4]

Resumen: La investigación internacional acerca de creencias matemáticas –creencias acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje– se ha centrado ampliamente en indagar las creencias de profesores en niveles primaria y secundaria y escasamente se ha indagado en profesores de niveles medio superior (bachillerato) y superior. Para comenzar a llenar este vacío la presente investigación cualitativa tiene por objetivo identificar, sin imponer categorías, las creencias matemáticas que tienen 18 profesores mexicanos de bachillerato. Para el análisis de los datos, recolectados a través de entrevistas semiestructuradas, realizamos tres análisis temáticos guiados por la definición de que una creencia es aquello que un individuo considera como verdadero. Los resultados señalan que 'las matemáticas son para ser aplicadas/usadas' y

Fecha de recepción: 4 de mayo de 2018. **Fecha de aceptación:** 9 de febrero de 2019.

[1] Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, gmartinez@uagro.mx, orcid.org/0000-0002-2462-7401

[2] Centro de Estudios Tecnológicos del Mar No. 18, Acapulco, México, mevzy2@gmail.com, orcid.org/0000-0003-2362-6180

[3] Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, México, jagarcia@uagro.mx, orcid.org/0000-0003-4487-5303

[4] Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, México, cdolores2@gmail.com, orcid.org/0000-0002-2748-6042

de que 'las matemáticas son para razonar', 'para resolver problemas' y 'para tomar decisiones' son las principales creencias acerca de las matemáticas de las cuales se derivan las creencias de aprendizaje de las matemáticas y las principales creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas. La existencia de las creencias identificadas pueden ser explicadas de dos maneras complementarias: por el contexto cotidiano de los participantes y por su condición de maestros con formación profesional de ingenieros.

Palabras clave: *Creencias del profesor; creencias matemáticas; análisis temático; creencias sobre el aprendizaje; creencias sobre la enseñanza*

Abstract: Beyond elementary levels, little has been researched about the mathematical beliefs –beliefs about mathematics, their teaching and their learning– of in-service teachers. To begin filling this gap, the present qualitative research aims to identify, without imposing categories, the mathematical beliefs that 18 Mexican high school teachers have. For the analysis of the data, collected through semi-structured interviews, we conducted three thematic analysis guided by the definition that a belief is what an individual considers true. The results indicate that 'mathematics is to be applied / used' and that 'mathematics is to reason', 'to solve problems' and 'to make decisions' are the main beliefs about the mathematics from which the Learning beliefs of mathematics and the main beliefs about the teaching of mathematics. The existence of the identified beliefs can be explained in two complementary ways: by the daily context of the participants and by their condition as teachers with professional training of engineers.

Keywords: *Teacher beliefs; mathematical beliefs; thematic analysis; learning beliefs; teaching beliefs*

1. INTRODUCCIÓN

La investigación acerca de las creencias de profesores y futuros profesores de matemáticas ha merecido una amplísima atención (Diamond, 2018; Donoso, Rico, & Castro, 2016; Eichler & Erens, 2014; Friz, Panes, Salcedo, & Sanhueza, 2018; Friz, Sanhueza, & Figueroa, 2011; García, Azcárate, & Moreno, 2006; Giné & Deulofeu, 2015; Hidalgo, Ana, & Andrés, 2015; Philipp, 2007; Sawyer, 2018;

Skott, 2015b; Thompson, 1992; Vesga & De Losada, 2018; Xenofontos, 2018). La premisa, y la promesa, del campo de las creencias de profesores ha sido que éstas, entendidas como construcciones mentales relativamente estables y reificadas, influyen significativamente en el comportamiento de los profesores (Skott, 2015b, 2015a). Por ejemplo, para Wilson y Cooney (2002, p. 148) la motivación principal para investigar creencias de los maestros de matemáticas es porque representan un "determinante significativo de lo que se enseña y cómo se enseña" (traducción nuestra). Los resultados acerca de esta relación entre creencias y el comportamiento de los profesores han sido ambivalentes. Algunos investigadores han encontrado consistencia entre las profesadas por los docentes y las creencias que podrían explicar la práctica en el aula de un maestro; mientras que otros investigadores notaron una inconsistencia (Buehl & Beck, 2015; Philipp, 2007; Thompson, 1992).

Dada la importancia otorgada a las creencias, algunas intervenciones se han realizado con el objetivo de propiciar el cambio de éstas en profesores y futuros profesores de matemáticas hacia creencias más acordes con los estándares curriculares o con la teorías modernas del aprendizaje de las matemáticas (Charalambous, Panaoura, & Philippou, 2009; Sáenz & Lebrija, 2014; Vesga & De Losada, 2018). Por ejemplo, Charalambous *et al.* (2009) estudiaron el uso de la historia de las matemáticas como un medio para cambiar las creencias de futuros profesores de primaria. En general, estas investigaciones han encontrado que el cambio de creencias se trata de un proceso a largo plazo, lleno de obstáculos debido sobre todo a la estabilidad otorgada a las mismas.

En Matemática Educativa buena parte de la investigación sobre creencias de profesores se ha enfocado en investigar sus *creencias matemáticas* de (Beswick, 2007; Cross, 2009; Donoso, *et al.*, 2016; Ernest, 1989; Friz, *et al.*, 2018; Handel, 2003; Hidalgo, *et al.*, 2015; Liljedahl, 2009; Maasz & Schlöglmann, 2009; Philipp, 2007; Raymond, 1997; Stipek, Givvin, Salmon, & MacGyvers, 2001; Thompson, 1992; Vesga & De Losada, 2018; Žalská, 2012). Entre otras cosas, estas investigaciones muestran el papel central de las creencias acerca de las matemáticas o de las referentes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que están detrás de las prácticas pedagógicas de los profesores.

En dicho sentido Ernest (1989) considera que la filosofía de las matemáticas del docente, que puede variar desde los valores absolutistas hasta los valores social-constructivistas, es la categoría de creencias más importante. Así, las creencias de aprendizaje y enseñanza de los profesores se relacionan con sus enfoques en clase y son fundamentales para definir la percepción del profesor sobre el rol del alumno en activo o pasivo, dependiente o autónomo, o como receptor o creador de conocimiento. En el mismo sentido, Raymond (1997) estableció la necesidad de influir en las creencias de los docentes para cambiar sus prácticas, específicamente sus creencias sobre las matemáticas mismas. Cross (2009) encontró entre otros aspectos que, las creencias fueron influyentes en las decisiones pedagógicas diarias de los docentes y "que sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas sirvieron como fuente primaria de sus creencias sobre la pedagogía y el aprendizaje de los estudiantes" (p. 325).

Para indagar acerca de las creencias matemáticas de los profesores los investigadores han propuesto diferentes tipologías para caracterizarlas. Por ejemplo, Ernest (1991) describe tres "filosofías de las matemáticas", llamadas: *instrumental*, *platónica* y *resolución de problemas*.

Hasta donde sabemos la investigación internacional acerca de creencias matemáticas se ha centrado ampliamente en indagar las creencias de profesores en los niveles de primaria y secundaria, y escasamente se ha indagado en profesores de los niveles bachillerato y superior (Donoso, Rico, & Castro, 2016; García *et al.*, 2006; Lebrija, Flores, & Trejos, 2010).

Lebrija, Flores y Trejos (2010) indagaron acerca de las creencias acerca del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas de 41 profesores en servicio de matemáticas de nivel medio y básico, egresados de las licenciaturas de Ingeniería, Química, Física, Arquitectura y Matemáticas, de 20 escuelas de la ciudad de Panamá. A través de una encuesta tipo Likert y un cuestionario de respuestas abiertas encontraron que los profesores participantes tenían una visión tradicional de las matemáticas y su enseñanza, y promovían un aprendizaje más centrado en aspectos algorítmicos y menos en la solución de problemas. También encontraron que para la mayoría de los participantes las matemáticas son importantes por su aplicación fuera de la escuela en la vida cotidiana y por ser una ciencia exacta con aplicación para resolver problemas.

Donoso, Rico y Castro (2016) indagaron acerca de las creencias y concepciones de profesores chilenos, todos con formación pedagógica, sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en 418 profesores en servicio de educación básica. A través de una encuesta tipo Likert encontraron que entre los docentes participantes destaca la importancia de presentar contenidos matemáticos que sean útiles para la vida real, destacando resaltando su utilidad y conexión con situaciones reales.

García *et al.* (2006) indagaron acerca de las creencias concepciones y conocimiento profesional de 10 profesores de matemáticas españoles, con formación profesional de ingenieros, que impartían Cálculo Diferencial en el nivel superior. A través del análisis cualitativo de las respuestas, a un cuestionario de preguntas abiertas, encontraron que casi todos los profesores participantes siguen una línea tradicional a la hora de abordar la enseñanza del cálculo, dándole fuerte peso al contenido matemático en sí. También que los participantes recurren a ejemplos de su vida laboral previa a la de maestro o cuando fueron aprendices en matemáticas, para generar estrategias didácticas. En síntesis, podemos notar que para los profesores en servicio, sin importar si su formación profesional inicial, las matemáticas son útiles para ser aplicadas en la vida cotidiana o profesional y para resolver problemas.

Como es usual en investigación educativa, el campo de investigación acerca de creencias de profesores puede ser dividido en los paradigmas metodológicos: el cuantitativo y el cualitativo. Las investigaciones cuantitativas se realizan utilizando instrumentos estandarizados, típicamente encuestas que utilizan escalas de Likert. En estos casos, es usual usar diferentes tipologías de creencias como las de Ernest ya mencionadas (Barkatsas & Malone, 2005; Maasepp & Bobis, 2014).

De acuerdo con Skott (2015a), hay dos conjuntos de problemas metodológicos cuando se usan instrumentos estandarizados para indagar creencias de profesores. En primer lugar, existen problemas relacionados con el significado de los ítems y la respuesta de los profesores a ellos; ya que los instrumentos estandarizados se basan en la suposición de que los ítems tengan connotaciones similares para el profesor y el investigador. Si esta suposición no se aplica, cualquier inferencia de las creencias del maestro no está justificada. En segundo lugar, los instrumentos estandarizados pueden imponer un conjunto de creencias sobre los participantes en lugar de suscitar las propias.

Si estos puntos de vista o tipologías se utilizan como base para encuestas y protocolos de entrevistas, imponen un conjunto de posibles alternativas al profesor en lugar de interpretar el sentido que ellos poseen de los problemas educativos. Para abordar estos problemas, diversos investigadores (e.g. Abd-El-khalick & Lederman, 2000) sugieren adoptar una postura más interpretativa y, recomiendan el uso de entrevistas cualitativas para generar "representaciones fieles" de los puntos de vista de los participantes (p. 674).

1.1. Objetivo de la investigación

Las consideraciones anteriores muestran la *carencia de investigaciones acerca de creencias matemáticas de profesores de bachillerato de matemáticas sin imponer categorías de creencias a los profesores*. Por ello nos hemos propuesto para la presente investigación *el objetivo de identificar las creencias matemáticas que tienen profesores en servicio de bachillerato mexicano*. Para no imponer tipologías de creencias a los profesores nos proponemos analizar los datos temáticamente (Braun & Clarke, 2006, 2012) para así construir nuestras propias tipologías a partir de lo que los profesores declaran creer a través de entrevistas.

2. CONCEPTUALIZACIONES TEÓRICAS

2.1. El concepto de creencia

No hay acuerdo sobre la definición de una creencia. Sin embargo, según Skott (2015) se pueden identificar cuatro aspectos clave que están en el núcleo del concepto: (1) "las creencias se usan generalmente para describir construcciones mentales individuales, que son subjetivamente verdaderas para la persona en cuestión" (traducción nuestra, p.18), (2) "existen aspectos cognitivos y afectivos en las creencias, o al menos las creencias y los problemas afectivos se consideran intrínsecamente vinculados, incluso si se consideran distintos" (traducción nuestra, p. 18), (3) "en general, las creencias se consideran como temporales y contextualmente estables, y es probable que cambien sólo como resultado de un compromiso sustancial en prácticas sociales relevantes" (traducción nuestra, p. 18) y (4) "se espera que las creencias influyan significativamente en las formas en que los maestros interpretan y se relacionan con los problemas de la práctica" (traducción nuestra, p. 19).

Así, el concepto de creencias de los maestros "se utiliza para designar constructos mentales individuales, subjetivamente verdaderos, cargados de valores, que son los resultados relativamente estables de experiencias sociales sustanciales y que tienen un impacto significativo en las interpretaciones y contribuciones propias de la sala de clase" (traducción nuestra, Skott, 2015a, p. 19).

En este artículo, el concepto de creencia lo usamos esencialmente para referirnos a todo aquello que un individuo considere verdadero (Beswick, 2005), así como proposiciones sobre objetos y fenómenos que las personas toman como verdaderas (Green, 1971; Pajares, 1992). En términos más formales, en la presente investigación tomamos la definición de Pajares (1992, p. 316) de creencia como "el juicio de un individuo de la verdad o falsedad de una proposición" (traducción nuestra).

En la literatura (e.g. Šapkova, 2013) se hace una distinción conceptual entre *creencias declaradas (espoused beliefs* las cuales son declaradas y conscientemente reconocidas) y *creencias promulgadas* (*enacted beliefs* las cuales son inferidas de la observación). Cuando en este artículo hagamos referencia a las creencias identificadas siempre nos estaremos refiriendo a las creencias declaradas.

2.2. Origen y desarrollo de las creencias de profesores

De acuerdo con Skott (2015a, p. 19) las creencias de los maestros son el "resultado de experiencias sociales sustanciales" (traducción nuestra). En la literatura sobre el aprendizaje de la enseñanza, se describen tres categorías de experiencia que influyen en el desarrollo de las creencias y el conocimiento sobre la enseñanza (Richardson, 1996). Estas categorías pueden no ser mutuamente excluyentes y comenzar en las diferentes etapas de la carrera educativa de las personas: (1) las experiencias personales, (2) las experiencias con la educación y la instrucción, y (3) las experiencias con el conocimiento formal y profesional.

La complejidad del desarrollo de las creencias de los profesores en matemáticas es modelada por Raymond (1997) a través de diferentes factores, entre los que se destacan (fig. 1): (1) la relación recíproca central entre creencias y práctica, (2) experiencias escolares pasadas, (3) situaciones inmediatas en el aula (habilidades, actitudes y comportamiento de los estudiantes, limitaciones de tiempo, el tema matemático en turno), (4) rasgos de personalidad del docente y, (5) programas de formación docente donde se formó el profesor.

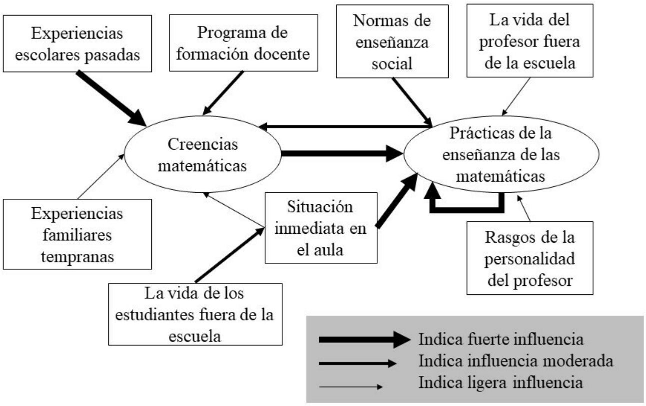


Figura. 1. Factores que influyen en las creencias matemáticas del maestro (Raymond, 1997, p. 571)

2.3. Creencias matemáticas de profesores

Las creencias son la fuente primaria para la toma de decisiones pedagógicas (Cross, 2009), por ello la importancia de estudiarlas. Para dar cuenta de ellas, encontramos que, a diferencia de Ernest (1991), Dionne (1984) propone que las matemáticas se pueden ver como una de (o una combinación de) los tres componentes básicos llamados *perspectiva tradicional*, *perspectiva formalista* y *perspectiva constructivista*. Törner y Grigutsch (1994) se refieren a estos tres aspectos como: *aspecto* (1) *caja de herramientas* (las matemáticas se ven como un conjunto de reglas, fórmulas, habilidades y procedimientos), (2) *aspecto del sistema* (las matemáticas se caracterizan por lógica, pruebas rigurosas y definiciones exactas) y (3) *aspecto del proceso* (las matemáticas se consideran como un proceso constructivo donde las relaciones entre diferentes nociones y oraciones juegan un papel importante).

En el mismo sentido Grigutsch, Raatz y Törner (1998) proponen una tipología de cuatro diferentes "visiones del mundo" sobre las matemáticas: (1) Una *visión orientada a procesos* en la que las matemáticas se definen como una actividad heurística y creativa que permite resolver problemas usando formas diferentes e individuales, (2) una *visión orientada a la aplicación* que acentúa la utilidad de las matemáticas para el mundo real, (3) una *visión formalista* en la que las matemáticas se caracterizan por un enfoque fuertemente lógico y formal, y en el que la precisión y exactitud son importantes y, (4) una *visión de esquema* en la que las matemáticas se ven como una colección de reglas y procedimientos de cálculo para memorizar y aplicar en tareas rutinarias.

2.4. CREENCIAS CENTRALES Y PERIFÉRICAS

Green (1971) conceptualizó a aquellas creencias más fuertemente sostenidas como centrales, y las menos sostenidas como periféricas. Cuanto más central es una creencia, más resistente es a cuestionar y cambiar. En el mismo sentido, Pajares (1992) define la centralidad en términos del grado en que una creencia está conectada con otras. Cuanto mayor sea su conexión, mayores serán sus implicaciones para otras creencias, y cuanto más se mantenga, y, por lo tanto, menos susceptible será cambiar.

Al respecto Liljedahl (2009) remarca la centralidad de las creencias sobre las matemáticas de la siguiente manera: (1) un maestro con la creencia de las matemáticas como una *caja de herramientas* enseñará matemáticas con énfasis en las reglas, fórmulas y procedimientos con una gran cantidad de práctica para imponer su dominio y la memorización, (2) un maestro con una creencia de las matemáticas *como un sistema* hará un uso extensivo de las definiciones y las pruebas tanto como una estrategia pedagógica como contenido para ser adquirido y (3) un maestro con una creencia de las matemáticas *como proceso* incorporará metodologías de enseñanza constructivista en su enseñanza para que sus estudiantes experimenten el "hacer" matemáticas.

2.5. Preguntas de investigación

Dadas las consideraciones teóricas anteriores el objetivo de la presente investigación –identificar, sin imponer tipologías, las creencias matemáticas que tienen profesores de bachillerato mexicanos– se convierte en las siguientes preguntas de investigación acerca de las creencias matemáticas de profesores de matemáticas de bachillerato en servicio:

- ¿Cuáles son las creencias que los profesores tienen acerca de las matemáticas?,
- ¿Cuáles son las creencias que los profesores tienen acerca del aprendizaje de las matemáticas? y
- ¿Cuáles son las creencias que los profesores tienen acerca de la enseñanza de las matemáticas?

3. METODOLOGÍA

3.1. Contexto

La investigación se llevó a cabo en un bachillerato ubicado en la ciudad de Pachuca que está ubicada a 96 km al norte de la Ciudad de México (en lo sucesivo llamaremos a este bachillerato *bachillerato-Pachuca*). El bachillerato-Pachuca se encuentra adscrito a la Universidad pública más importante del estado de Hidalgo y es considerado como el más importante de la región. Atiende a alrededor de 2 500 alumnos inscritos y tiene una planta de 21 profesores de matemáticas, organizados en la llamada 'Academia de matemáticas', que imparten los cursos de matemáticas de todo el currículo: Algebra, Geometría plana y Trigonometría, Geometría Analítica, Precálculo, Cálculo Diferencial y Cálculo integral.

El modelo educativo del bachillerato-Pachuca está basado en 'competencias' que, y según el currículo promueve en el aprendizaje del alumno el "saber" (conocimiento), el "saber hacer" (aplicación del conocimiento) y el "saber ser" (conducta y actitudes).

3.2. Participantes

En la investigación participaron 18 profesores de matemáticas en servicio (tabla 1). Algunos de los participantes enseñaban además en otros bachilleratos y universidades de la ciudad de Pachuca. Los participantes tienen una edad que va de los 26 a 67 años y entre 1.5 a 33 años de servicio como maestros de matemáticas.

Ninguno de los participantes recibió formación profesional como profesor de matemáticas de nivel bachillerato. La mayoría de ellos son ingenieros que aprovecharon la oportunidad de trabajar como maestros porque "encajaban en el perfil" (tienen una carrera similar a las matemáticas). Vale la pena mencionar que en México es habitual que los ingenieros, matemáticos y otros profesionales similares de Ciencia, Tecnología, Ingenieros y Matemáticas se conviertan en profesores de matemáticas en el nivel medio superior y superior. Dos de los participantes contaban con estudios de posgrado relacionado con la enseñanza: una de ellas, Magaly, hizo una maestría en Educación y otra, María, una maestría en Matemática Educativa. Así, excepto dos participantes, los demás son profesores sin educación formal profesional para la enseñanza de las matemáticas.

En su conjunto todos los participantes imparten los diferentes cursos semestrales en el bachillerato-Pachuca. Los profesores de esta institución son continuamente capacitados mediante cursos y talleres que ofrece el bachillerato-Pachuca u otras dependencias estatales o nacionales. En la época que hicimos el trabajo de campo, los participantes recientemente habían cursado un diplomado en Competencias Docentes en el Nivel bachillerato impartido por la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior en México.

Tabla 1. Datos generales de los participantes

Nombre	Edad	Sexo	Estudios de grado y posgrado	Años en servicio
Carlos	58	M	Ingeniero Industrial	20
Elías	63	M	Ingeniero Industrial	23
Elva	25	F	Licenciado en Sistemas Computacionales	2.5
Francisco	31	M	Licenciado en Sistemas Computacionales	5
Gabriel	42	M	Licenciado en Química	5
Gonzalo	54	M	Ingeniero Industrial	16
Ignacio	67	M	Ingeniero Industrial	29
Jaime	35	M	Ingeniero Industrial	5
Jesús	62	M	Ingeniero Electricista	20
Jonathan	32	M	Ingeniero en electrónica y Telecomunicaciones	2.5
José	55	M	Ingeniero Industrial	27
Juan	59	M	Ingeniero Industrial	33
Luz	50	F	Ingeniero Industrial	4

Magaly	34	F	Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones Maestría en educación	8.5
Marisol	33	F	Ingeniero Industrial	3
Nadia	36	F	Ingeniero Químico	10
Norma	26	F	Matemáticas aplicadas	1.5
María	51	F	Ingeniero Industrial Maestría en Matemática Educativa	20

Nota: Se usan pseudónimos para nombrar a los participantes

3.3. Recolección de datos

Se recolectaron a partir de entrevistas cualitativas individuales semi-estructuradas llevadas a cabo por los autores de este artículo. Todas las entrevistas se realizaron el 1 de julio de 2015. La duración de las entrevistas osciló entre 40 y 60 minutos. Las entrevistas fueron realizadas de manera privada en aulas y oficinas del bachillerato-Pachuca. Cada uno de los participantes fue invitado a ser entrevistado por medio de un profesor intermediario (que también fue entrevistado). Este profesor contactó a sus compañeros y los estimuló a participar en la entrevista. Todos los participantes aceptaron de manera voluntaria.

Al principio de cada entrevista se les solicitó a los participantes algunos datos personales y profesionales (tabla1). Posteriormente se les hizo una entrevista biográfica donde expresaron sus experiencias como aprendices de matemáticas, como docentes de matemáticas y la manera en cómo habían llegado a ser docentes de matemáticas.

Después continuaron preguntas abiertas con la finalidad de indagar acerca de las creencias de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, según la interpretación de los participantes con base a sus experiencias. Tres preguntas principales fueron formuladas a los participantes (1) ¿Qué son para usted las matemáticas?, (2) ¿qué es para usted aprender matemáticas? y (3) ¿qué es para usted enseñar matemáticas? Además de preguntas auxiliares que fueron formuladas durante la entrevista con el fin de profundizar en las creencias de los participantes, por mencionar algunas de ellas ¿Puede darnos un ejemplo de esto que nos dice? ¿Puede reformular esto que nos acaba de decir?

3.4. Análisis de datos

Todas las entrevistas fueron video grabadas para después ser transcritas en su totalidad.

Tres análisis temáticos (Braun & Clarke, 2006, 2012) fueron realizados a los datos recolectados. Durante todo el proceso de análisis, se hizo triangulación entre los investigadores con la finalidad de contrastar visiones o enfoques a partir de los datos recolectados de tal manera que se tuviera un mayor grado de confianza, minimizando así la subjetividad que pudiera haber.

La parte de la entrevista en donde los participantes expresaron sus experiencias como aprendices de matemáticas, como docentes de matemáticas y la manera en cómo habían llegado a ser docentes de matemáticas, no fue analizado en el sentido estricto del término y sirvió fundamentalmente para entender el origen de las creencias que hipotetizamos en la sección de discusión.

El objetivo de un análisis temático es identificar a lo largo del conjunto de datos proporcionados, patrones de significado (temas) que dieran respuestas a la pregunta de investigación formulada (Braun & Clarke, 2006, p. 82): "un tema captura algo importante sobre los datos en relación con la pregunta de investigación y representa algún nivel de *patrón* de respuesta o significado dentro del conjunto de datos" (traducción propia, énfasis en el original). Los patrones se identifican a través de un proceso de familiarización de datos, codificación de datos, desarrollo y revisión de temas.

Para identificar las creencias matemáticas de los participantes, sin imponer tipologías, identificamos proposiciones en donde los participantes expresaran algo que consideraran verdadero acerca de las matemáticas, de su aprendizaje o su enseñanza. Cada uno de los temas, al final del análisis, fue identificado como una creencia.

Las etapas del análisis fueron (Braun & Clarke, 2006): (1) familiarizarse con los datos, (2) generar códigos iniciales, (3) buscar temas, (4) revisar temas, (5) definir y nombrar temas, y (6) producir el reporte de los resultados. Los diferentes análisis temáticos de los datos fueron realizados en repetidas reuniones de trabajo llevadas a cabo por todos los autores de este artículo.

– **Familiarizarse con los datos**. Para familiarizarnos con los datos, los investigadores de manera individual hicimos repetidas lecturas de las transcripciones de las entrevistas. Esto contribuyó a familiarizarse con los datos y el lenguaje utilizado por los participantes y a que surgieran las primeras propuestas acerca de los códigos para designar las creencias.

- **Generar códigos iniciales**. Cada entrevista fue analizada por separado. Cada proposición que contuviera un valor de verdad sobre las matemáticas, su aprendizaje o su enseñanza fue codificada, este proceso lo realizaron por separado cada uno de los investigadores. Posteriormente, en diversas sesiones de trabajo los investigadores contrastamos cada una de las codificaciones en los documentos e hicimos uno solo donde coincidían en un alto porcentaje las visiones (triangulación). Todas las proposiciones con significados similares fueron agrupadas en un código común.
- **Buscar temas**. También en las diversas sesiones de trabajo, creamos, asignamos y modificamos códigos para comprender sus relaciones y establecer familias de códigos (temas potenciales). Contrastamos los extractos asociados a cada uno de los temas potenciales. En muchos casos los temas potenciales sufrieron modificaciones en la manera de nombrarlos o en su descripción
- **Revisar los temas**. Con los temas potenciales identificados en la fase anterior, discutíamos su correspondencia con los datos. Dos de los investigadores presentamos al resto del equipo los temas y mediante triangulación, establecimos agrupaciones de temas iniciales y eliminamos temas que no tenían suficiente evidencia para englobar las ideas de los profesores, generando así los nuevos temas.
- **Definir y nombrar temas**. Establecimos un conjunto de temas finales y verificamos que los códigos estuvieran de acuerdo con los temas asignados. Los temas finales fueron interpretados como las creencias matemáticas que poseen los participantes. Posteriormente redactamos la descripción de cada creencia/tema y nombramos cada tema con una proposición que sintetizara la creencia/tema descrita.

4. RESULTADOS

En la tabla 2 presentamos las creencias matemáticas identificadas en los participantes. En lo que sigue describimos e ilustramos con extractos de las transcripciones de las entrevistas algunas de las creencias matemáticas identificadas entre los participantes. En cada creencia específica, hemos *resaltado en cursivas* *las proposiciones* en donde los participantes expresan una "verdad" (una afirmación positiva) acerca de las matemáticas o su enseñanza o su aprendizaje.

Tabla 2. Creencias matemáticas de los participantes

	#P
Creencias acerca de las matemáticas	
Las matemáticas son para ser usadas/aplicadas en la actividad diaria	11
Las matemáticas implican razonar para tomar decisiones en la actividad diaria	5
Las matemáticas son una ciencia abstracta	4
Las matemáticas se componen de números y sus relaciones.	1
Creencias acerca del aprendizaje de las matemáticas	
Aprender matemáticas es aprender a aplicar las matemáticas	8
Aprender matemáticas es aprender a razonar para resolver problemas y tomar decisiones	6
Aprender matemáticas es aprender a resolver problemas	4
Creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas	
Enseñar matemáticas es explicar procedimientos con ejemplos	5
Enseñar matemáticas es enseñar a razonar para resolver problemas y tomar decisiones	5
Enseñar matemáticas es explicar los temas con ejemplos de aplicación/uso	3
Al enseñar se debe hacer que los alumnos se interesen por las matemáticas	3
Al enseñar se debe tomar en cuenta los tiempos de aprendizaje de los alumnos	1
Enseñar matemáticas es transmitir conocimientos	1

Nota: #P denota el número de participantes en que fue encontrada la creencia respectiva

4.1. CREENCIAS ACERCA DE LAS MATEMÁTICAS

– Las matemáticas son para ser usadas/aplicadas en la actividad diaria. Once de los profesores consideran que las matemáticas son para ser "aplicadas" o "usadas" como herramienta, ya sea en la vida diaria, en la modelación de los fenómenos naturales, en la empresa o la industria o de manera transversal con otras disciplinas y áreas del conocimiento.

> Jonathan: las matemáticas... pues para mí *serían una herramienta que utilizamos cotidianamente*, pero que afortunadamente lo hacemos tan normal que ni nos damos cuenta a veces que son matemáticas [...] *Entonces es una herramienta importante que utilizamos para la vida en cualquier cosa...*

> Francisco: [las matemáticas] *son la base de todo, si no se conocen difícilmente se podrá ser partícipe de una sociedad globalizada, por así decirlo,* pues tenemos que saber decidir, analizar, dar un juicio de las cosas, analizar, tomar decisiones, preguntarnos si son buenas o malas. Además, en todas las ramas de las distintas carreras es parte fundamental, por ejemplo, la medicina, en ella se aplica la mayor parte de Cálculo Diferencial e Integral o en Química, tienen que verse forzosamente las matemáticas, incluso para los abogados

> Jesús: [*las matemáticas] son el uso adecuado, con conocimiento de causa de los números que nos permita saber, que nos permita decir, expresar muchos fenómenos*. Algunas cosas de la vida diaria que a veces necesitamos tener algo para comprender qué tan grave, intensa, o buena puede ser una situación cuando la expresamos con número.

– Las matemáticas implican razonar para tomar decisiones en la actividad diaria. Cinco profesores creen que las matemáticas son una forma de razonar o para tomar decisiones en la vida cotidiana. Esta forma de razonar es expresada por los participantes como ser "críticos" o "analíticos".

> Carlos: *Porque [las matemáticas] nos ayudan, a eso, a la toma de decisiones, a ser más analíticos, a establecer comparaciones, a mantener la mente ocupada, a ejercitarnos en los números, y creo que las matemáticas están en todos lados*, incluso la persona que no sabe matemáticas sin darse cuenta está aplicando matemáticas.

> Gonzalo: *Las matemáticas deben de ser la formación crítica y razonada, estructurada para una toma de decisiones.* El ¿por qué?, la voy a decir de una forma muy sencilla, *toda nuestra vida está relacionada con las matemáticas,* toda...

> Elva: En mi opinión [las matemáticas] son aquello que nos ayuda a pensar, a razonar, a desarrollar habilidades no sólo para operaciones o para cuestiones de matematización en general, o sea, todo lo que hacemos representa un proceso, representa

una secuencia de pasos y vaya, *para mí es eso en matemáticas, que tienes que hacer una secuencia, un razonamiento, toma de decisiones.*

4.2. Creencias acerca del aprendizaje de las matemáticas

– Aprender matemáticas es aprender a aplicar/usar las matemáticas en la actividad diaria. Ocho de los profesores consideran que una consecuencia de que has aprendido matemáticas es cuando puedes "aplicarlas" o "usarlas" en situaciones de la vida diaria o en algún proceso en alguna industria o empresa. En algunas ocasiones los participantes hacen referencia a ejemplos de las empresas en donde han laborado o laboran como ingenieros.

Carlos: *Yo creo que aprender las matemáticas es aplicar las matemáticas. Buscarles en dónde se utilizan, cómo se utilizan* y siempre estar pensando en los problemas, en cómo se podrían hacer desde el punto de vista de las matemáticas.

Ignacio: Bueno, *aprender matemáticas es precisamente encontrarle el sabor de estas, para visualizar sus aplicaciones*.

Jaime: [Aprender matemáticas es] *verle la aplicación, tu aprendes cuando algo te va a servir o que estas aplicando algo, entonces hay un punto de las matemáticas donde tienes el contacto diario.* Matemáticas es desde que tienes que saber cuánto tienes que traer para tu pasaje de la ida y la vuelta, porque vas a comprar esto, o sea ahí están las Matemáticas, en prácticamente todo lo que hacemos.

– Aprender matemáticas es aprender a razonar para resolver problemas y tomar decisiones. Seis profesores consideran que al enseñar matemáticas se debe fomentar que el alumno "razone". Para los profesores el razonamiento consiste en que el alumno sea capaz de plantear estrategias para resolver algún problema o ejercicio y que sepa decidir, a través de la "razón" (en contraposición a la "memorización"), que de los procedimientos que mostró el profesor son útiles para resolver un problema.

Norma: *Es aprender a desarrollar ese razonamiento matemático que todos tenemos,* pero muy pocos lo desarrollan, es eso. Para mí nunca ha sido aprender fórmulas ni

> saber multiplicar, ni saber hacer cosas muy sofisticadas, *simplemente hay que razonar. Hay cosas lógicas que deberían ser fáciles para la mente.*
>
> Magaly: [Aprender matemáticas] para mí, no creo que sea memorizarse las cosas, *es saber aplicarlas y saber razonar, saber en qué momento... este... pueden utilizar una fórmula o algo para poder llegar a un resultado y sin importar qué procedimiento utilicemos*, debemos llegar al resultado correcto.

– Aprender matemáticas es aprender a resolver problemas. Cuatro profesores creen que aprender matemáticas es aprender, que consideran diferente a “memorizar”, los procedimientos adecuados para resolver problemas. Estos procedimientos son los que se explican y enseñan en el salón de clase.

> Magaly: [Enseñar matemáticas] *para mí no creo que sea memorizarse las cosas, es saber aplicarlas y saber razonar, saber en qué momento* se puede utilizar una fórmula o algo para poder llegar a un resultado y sin importar qué procedimiento utilicemos, debemos llegar al resultado correcto. Porque hay muchas formas de resolverlo.
>
> Nadia: Aprender matemáticas no es, bueno, yo creo que no es aprenderse las fórmulas como tal que, para sacar el área de un cuadrado, que es lado por lado, y que la del triángulo que es base por altura sobre dos. O sea, yo creo que no es eso, *creo que más que nada es aprender a aplicarlo y saber en qué me va ayudar [para resolver un problema].*

4.3. Creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas

– Enseñar matemáticas es explicar procedimientos con ejemplos. Para cinco profesores, se debe enseñar temas de matemáticas iniciando con un ejemplo de un problema o ejercicio referente al tema a tratar en ese momento. A partir del ejercicio o problema, el docente puede mostrar procedimientos o estrategias para resolverlos. Una vez dado el ejemplo, el profesor debe proponer nuevos ejercicios o problemas a sus alumnos en donde ellos puedan reproducir estos procedimientos y, en algunos casos, proponer procedimientos nuevos.

> Raquel: Por ejemplo, en Álgebra...los modelos matemáticos, hay varios problemas que se pueden resolver mentalmente, *pero si enseñamos a nuestros alumnos a usar*

las reglas pueden resolverlos más fácilmente utilizando todo lo que vimos para despejar en matemáticas. Por ejemplo, para despejar es importante utilizar todas las propiedades de la igualdad, no nada más pasar términos de un lado para otro, y para ello, por ejemplo, yo uso el color rojo, para que vean que es una igualdad.

Jaime: Yo siempre estuve en el sistema tradicional, lo que manejo es: *explico... bueno, primero, les dejo la tarea de que tengan en teoría investigar el tema, pero yo sé que no lo van a hacer, así que entonces llegan con una idea, yo explico el ejercicio de lo que previamente ellos ya tienen la idea y posteriormente pongo ejercicios para ellos, y ya entonces voy verificando individualmente que dudas tienen respecto* a lo que ellos recopilaron de información con lo que yo les mostré en el pizarrón y con base en eso van adquiriendo el nivel para ya estar solos y poder realizar la actividad.

– Enseñar matemáticas es enseñar a razonar para resolver problemas y tomar decisiones. Cinco participantes creen que al enseñar matemáticas deben lograr que los alumnos desarrollen su capacidad de razonamiento para resolver problemas y tomar decisiones.

Norma: [Enseñar es] *ayudar a los estudiantes a desarrollar la habilidad de razonamiento, es ayudarlos a que entiendan la importancia a que sepan en algún momento que tal vez una fórmula no les va a servir, pero el razonamiento les va a servir, esa es la finalidad*. Según yo, la finalidad de enseñar matemáticas no es que alguien me recite la fórmula, sino *que sepa qué representa, el porqué de sus propiedades, que me sepan dar un razonamiento de por qué salen las cosas*.

Elva: *La enseñanza de las matemáticas considero que es un poco más complejo, porque hablamos también de razonamiento*. Hablamos de complejidad en cierta medida y para mí la enseñanza de las matemáticas radica precisamente en conjuntar cómo o mejor dicho qué quiero yo que los estudiantes realmente entiendan de una operación que aprenden.

– Enseñar matemáticas es explicar los temas con ejemplos de aplicación/uso. Tres profesores mencionan que los ejemplos que usan para explicar a los alumnos deben tener la característica de que sean aplicables. Para los participantes lo “aplicable” de los ejemplos consiste en que puedan establecer una relación con la vida diaria de los estudiantes o del profesor, o bien de algún proceso en alguna empresa. A partir de la aplicabilidad de los ejemplos, consideran que les dan sentido a las matemáticas, y propician el aprendizaje de ellas, además, consideran que ésta es una manera de captar el interés de los alumnos hacia la asignatura.

> Luz: A mis alumnos siempre les digo que *las matemáticas tienen un fin para aprenderlas y que las están aplicando por eso tengo que enseñarles como aplicar esas matemáticas cual es el porqué de aprender matemáticas ya que las necesitamos.*

> Jaime: Enseñar Matemáticas, como le decía que la representación gráfica o los símbolos, *ellos le den una aplicación real, a veces a lo mejor en ese momento no tienen argumentos para aplicar una derivada o una integral, por ejemplo, la integral se utiliza para calcular centros de gravedad.*

5. DISCUSIÓN

Los resultados de la presente investigación señalan que 'las matemáticas son para ser aplicadas/usadas' y que 'las matemáticas son para razonar', 'para resolver problemas' y 'para tomar decisiones' son las creencias que juegan un papel central –Pajares (1992) define centralidad en términos del grado en que una creencia está conectada con otras creencias– en las creencias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los participantes de este estudio.

5.1. 'Las matemáticas son para ser aplicadas'

Tres creencias de los participantes –'las matemáticas son para ser aplicadas/usadas' (#P=11), 'aprender matemáticas es aprender a aplicar/usar las matemáticas en la actividad diaria' (#P=8) y 'enseñar matemáticas es explicar los temas con ejemplos de aplicación/uso' (#P=3)–, que incluyen las dos creencias más ampliamente compartidas entre los participantes, comparten la creencia acerca de la utilidad de las matemáticas a través de su "aplicación/uso". La evidencia señala que para la mayoría de los profesores participantes es importante hacer explícito a sus alumnos la idea de la aplicación de las matemáticas; ya que con ella anclan a las matemáticas en algo que ellos consideran concreto en la vida cotidiana, ya sea personal o profesional. Esta creencia se corresponde estrechamente con lo que propone Grigutsch *et al*. (1998) en la visión *orientada a la* *aplicación*, que acentúa la utilidad de las matemáticas para el mundo real. En el mismo sentido nuestros resultados son consistentes con los encontrados en las investigaciones de creencias con profesores en activo (Donoso, Rico, & Castro, 2016; García *et al*., 2006; Lebrija, Flores, & Trejos, 2010) quienes encontraron que los profesores dan suma importancia a enseñar contenidos que sean útiles para la vida real, ya sea cotidiana o profesional. Esto sin importar su formación profesional inicial ya sea como pedagogos, ingenieros u otras ciencias exactas.

Si consideramos aquellas investigaciones que han mostrado que las creencias acerca de las matemáticas juegan un papel central, en el sentido de Green (1971), en las creencias de enseñanza y aprendizaje de los profesores (Beswick, 2007; Cross, 2009; Liljedahl, 2009) nosotros consideramos que la creencia de que 'las matemáticas son para ser aplicadas/usadas' es una creencia central en relación a las otras dos creencias que interpretamos como periféricas ('aprender matemáticas es aprender a aplicar/usar las matemáticas en la actividad diaria' y 'enseñar matemáticas es explicar los tema con ejemplos de aplicación/uso'). Además, la centralidad de la creencia de que 'las matemáticas son para ser aplicadas/usadas' se ve reflejada por el hecho de que es la creencia más compartida entre los participantes y porque los participantes de manera amplia y repetida la declaran en diferentes puntos de las entrevistas.

Siguiendo la idea de que son las experiencias las que forman y desarrollan las creencias (Raymond, 1997; Richardson, 1996; Skott, 2015a) el origen, y su centralidad, de la creencia de que 'las matemáticas son para ser aplicadas' puede ser explicada a través de algunas experiencias de vida (declaradas en las entrevistas) de los profesores participantes:

- Dado que los participantes no estudiaron una carrera profesional para maestro de matemáticas, sus principales experiencias fueron en sus estudios profesionales de ingeniería, su eventual práctica profesional como ingenieros y su actividad posterior como maestros de matemáticas.
- La experiencia escolar de estudiar para ser ingenieros que vivieron todos los participantes. En un sentido amplio en México las matemáticas en ingeniería se conceptualizan en tanto su 'aplicación' o 'utilidad' para resolver los problemas de la ingeniería.
- De lo anterior se sigue que las creencias derivadas de aprendizaje, 'aprender matemáticas es aprender a aplicar/usar las matemáticas' y de enseñanza 'explicar los temas con ejemplos de aplicación/uso', serían creencias adquiridas a través sus experiencias como estudiantes de ingeniería.

- Se sigue también que las demás creencias de enseñanza, aprendizaje y de evaluación serían las creencias más "recientes" entre los participantes producto de sus experiencias como maestros de matemáticas.

5.2. 'Las matemáticas son razonar', 'para resolver problemas' y 'para tomar decisiones'

Considerando cuatro de las creencias matemáticas de los participantes –'las matemáticas implican razonar para tomar decisiones en la actividad diaria' (#P=5), 'aprender matemáticas es aprender a razonar para resolver problemas y tomar decisiones' (#P=6), 'aprender matemáticas es aprender a resolver problemas' (#P=4) y 'enseñar matemáticas es enseñar a razonar para resolver problemas y tomar decisiones' (#P=5)– y si consideramos, como antes, la centralidad de las creencias acerca de las matemáticas en las creencias matemáticas observamos que: (1) tres tienen como creencia central que 'las matemáticas son para razonar' ya sea 'para resolver problemas' o ya sea para 'tomar decisiones', (2) tres tienen como creencia central el que las matemáticas sirven 'para resolver problemas' y (3) tres tienen como creencias central el que las matemáticas sirven 'para tomar decisiones'.

En la creencia de que las matemáticas son para resolver problemas observamos que los participantes ven a las matemáticas como una caja de herramientas para resolver problemas, esta idea guarda relación con la creencia de que las matemáticas son para ser aplicadas o usadas. En las creencias 'las matemáticas son para razonar' describen el razonamiento como el saber utilizar fórmulas y plantear estrategias al resolver problemas. En conjunto estas creencias se corresponden estrechamente con lo que Törner y Grigutsch (1994) refieren como el *aspecto caja de herramientas* –las matemáticas se ven como un conjunto de reglas, fórmulas, habilidades y procedimientos– y también con lo que Grigutsch *et al.* (1998) llaman *visión esquema* en la que las matemáticas se ven como una colección de reglas de cálculo y procedimientos para ser memorizados y aplicados en tareas rutinarias.

Desde el punto de vista de las experiencias de los participantes, la existencia y centralidad de la creencia de que las matemáticas son 'para resolver problemas' puede ser explicada, por el hecho de que en México, desde los años 90s del siglo pasado, en los programas oficiales de matemáticas, desde primaria hasta nivel medio superior, existe la consigna de enseñar las matemáticas a través de la 'resolución de problemas' y de acentuar su utilidad en la resolución de problemas de la vida diaria (e.g. in México SEP [Secretaría de Educación Pública / Secretary of Public Education], 2016). Así, es creíble la hipótesis que los participantes hayan adquirido esta creencia por sus experiencias tempranas con las matemáticas en la escuela.

La mayor parte de los participantes del presente estudio muestran tener creencias matemáticas vinculadas al enfoque constructivista; porque creen que los estudiantes 'deben razonar para resolver problemas y tomar decisiones', 'aprender a resolver problemas', 'aplicar las matemáticas' y que 'cada uno aprende a un ritmo distinto'. Creencias que son consistentes con los lineamientos que propone la Secretaria de Educación Pública de México para el nivel medio superior. Estos resultados contrastan con las creencias matemáticas de profesores en servicio de nivel básico y medio reportadas por Lebrija, Flores y Trejos (2010). Quienes reportan que los profesores expresan en menor porcentaje formas de enseñanza afines a una enfoque constructivista. Esto último es importante resaltarse, porque los participantes en el estudio de Lebrija *et al.* (2010) provenían de las licenciaturas de Ingeniería, Química, Física, Arquitectura y Matemáticas, mientras que este estudio reporta los resultados de profesores en servicio que en su mayoría son ingenieros.

Por otra parte, nuestros resultados son consistentes con las creencias reportadas por Lebrija *et al.* (2010) en el sentido de que los años de experiencia parecen no marcar una diferencia entre sus creencias, sino que comparten creencias similares. Asimismo, como lo reportan estos autores, en este estudio también identificamos que los tiempos limitados en el aula y la presión por cubrir el programa correspondiente influyen en la adopción de prácticas docentes tradicionales. Esto último provoca la aparición de creencias sobre la enseñanza de las matemáticas orientadas a "explicar procedimientos con ejemplos", "explicar los temas con ejemplos de aplicación/uso" y "transmitir conocimientos".

5.3. Experiencias sociales sustanciales como origen de las creencias

Nuestros resultados son consistentes con el consenso en que son ciertas experiencias las fuentes de las creencias de los profesores (Raymond, 1997; Richardson, 1996; Skott, 2015a). En particular son consistentes con lo que Skott (2015a) señala, como parte del consenso en el campo de las creencias de profesores, de que las creencias son "resultados relativamente estables de experiencias sociales sustanciales" (traducción nuestra, p. 19). Para el caso de los participantes, según lo señalan sus experiencias, expresadas en las entrevistas; de la presente investigación, son principalmente sociales y escolares tempranas, así como las experiencias en su formación profesional como ingenieros, su posterior incorporación como maestros de matemáticas en el bachillerato-Pachuca y su participación en diferentes cursos y talleres que les ofrece el bachillerato-Pachuca.

Investigaciones futuras podrían estudiar más acerca de las experiencias como fuentes de las creencias de los profesores de bachillerato. En particular consideramos que el método biográfico narrativo sería un método adecuado para ello (Kaasila, 2007). En complemento sería interesante, comparar las creencias de maestros de matemáticas de bachillerato que son ingenieros con maestros de bachillerato que no lo son (por ejemplo quienes sí estudiaron para maestro en su formación profesional). Nuestra hipótesis es que la creencia de la "aplicación" de las matemáticas no será tan preeminente en aquellos profesores que nos son ingenieros.

Si bien nos parece que hablar de efectos positivos de las creencias detectadas en los participantes de nuestra investigación va más allá de los alcances de nuestra investigación, nos parece pertinente observar que un profesor en servicio con formación inicial profesional de ingeniero, puede aportar información relevante para incorporar su conocimiento matemático (y su conocimiento de didáctico del contenido) a las estrategias para enseñar las matemáticas con una visión de aplicación en temas específicos de matemáticas.

5.4. Acerca del Análisis Temático

En la presente investigación realizamos tres análisis temáticos (Braun & Clarke, 2006, 2012) que nos permitieron identificar las creencias de los participantes. Nuestra experiencia en este análisis señala varias ventajas: (1) Junto con la definición operativa de creencias en la que nos basamos, el seguir los pasos sugeridos por Braun y Clarke (2006, 2012) nos proporcionó una guía clara de lo que teníamos que buscar en las entrevistas; ya que sólo tomamos las frases que daban respuesta a nuestras preguntas de investigación, (2) nos guió de manera sistemática a la categorización de las frases y con base a esto, tuvimos mayor control en la asignación de temas, sub temas, y de las evidencias correspondientes a cada uno y (3) lo anterior, nos guió de manera clara al establecer títulos de los temas que al final del análisis fueron identificados como creencias.

Lo anterior, en conjunto, señala el poder de realizar análisis temáticos para identificar creencias a base de material narrativo recopilado a través de entrevistas. Esta consideración se complementa con la sugerencia analítica que Chen y Leung (2015) hacen al proponer el análisis a través de las técnicas de Glaser, Strauss, y Strutzel (1967) para hacer teoría fundamentada en datos.

5.5. Conclusión

En este estudio se obtuvieron tres categorías para las creencias de los profesores de bachillerato sobre la matemática. Aunque estas categorías ya están de alguna forma identificadas y presentadas en la literatura, nunca antes se había investigado a este sector en particular de profesores y por lo tanto este estudio es nuevo y contribuye a la comunidad científica en dos aspectos fundamentales. Uno de ellos es la construcción de tipologías, a través de tres análisis temáticos de creencias; lo que lleva a entender las creencias de los participantes en un contexto específico y donde el contexto y la cultura juegan un rol principal. El segundo de ellos es la explicación coherente del origen de las creencias, lo cual fue complementado con una profunda revisión literaria. Algunos de los límites de esta investigación es la transposición de los resultados a otro grupo de profesores u otras realidades, aunque interesante sería justamente comparar dos grupos similares, pero provenientes de otros lugares del mundo.

Agradecimientos

Los autores agradecemos a Yuridia Arellano y Rocío Antonio por la ayuda prestada en la realización de las entrevistas en la recolección de datos de esta investigación. Además agradecemos a los revisores anónimos de la revista Educación Matemática cuyos comentarios nos provocaron interesantes y muy fructíferas reconsideraciones acerca de nuestra investigación.

REFERENCIAS

Abd-El-khalick, F., & Lederman, N. G. (2000). Improving science teachers' conceptions of nature of science: A critical review of the literature. *International Journal of Science Education*, *22*(7), 665–701. http://doi.org/10.1080/095006900050044044

Barkatsas, A., & Malone, J. (2005). A typology of mathematics teachers' beliefs about teaching and learning mathematics and instructional practices. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(2), 69–90. http://doi.org/10.1007/BF03217416

Beswick, K. (2005). The beliefs/practice connection in broadly defined contexts. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(2), 39–68. http://doi.org/10.1007/BF03217415

Beswick, K. (2007). Teachers' beliefs that matter in secondary mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 95–120. http://doi.org/10.1007/s10649-006-9035-3

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. http://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *APA handbook of research methods in psychology* (Vol. 2, pp. 57–71). Washington, DC: American Psychological Association. http://doi.org/10.1037/13620-004

Buehl, M. M., & Beck, J. S. (2015). The relationship between teacher's beliefs and teachers' practice. In H. Fives & M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of Teacher's Beliefs* (pp. 66–84). New York, NY: Routledge.

Charalambous, C. Y., Panaoura, A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(2), 161–180. http://doi.org/10.1007/s10649-008-9170-0

Chen, Q., & Leung, F. K. S. (2015). Analyzing data and drawing conclusion on teachers' beliefs. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 281–294). Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4

Cross, D. I. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(5), 325–346. http://doi.org/10.1007/s10857-009-9120-5

Diamond, J. M. (2018). Teachers' beliefs about students' transfer of learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*. http://doi.org/10.1007/s10857-018-9400-z

Dionne, J. (1984). the perception of mathematics among elemenlary school teachers. In J. M. Moser (Ed.), *Proceedings of 6th conference of the North American Chapter of* *the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 223–228). Madison, WI: University of Wisconsin: PME-NA.

Donoso, P., Rico, N., & Castro, E. (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *20*(2), 76–97.

Eichler, A., & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *Zdm*, *46*(4), 647–659. http://doi.org/10.1007/s11858-014-0606-y

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of the art* (pp. 249–254). New York, NY: Falmer.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press.

Friz, M., Panes, R., Salcedo, P., & Sanhueza, S. (2018). El proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *20*(1), 59–68. http://doi.org/10.24320/redie.2018.20.1.1455

Friz, M., Sanhueza, S., & Figueroa, E. (2011). Concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas sobre las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de la Estadística. *Revista Electronica de Investigacion Educativa*, *13*(2), 113–131. Retrieved from http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-83055169283&partnerID=40&md5=26ae4d7d0d8d50566cdae70766f0277b

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *9*(1), 85–116.

Giné, C., & Deulofeu, J. (2015). Creencias de profesores y estudiantes de profesor de educación primaria y secundaria sobre los problemas de matemáticas. *Journal of Research in Mathematics Education*, *4*(2), 161. http://doi.org/10.17583/redimat.2015.1398

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Piscataway, NJ: Transaction Publishers.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.

Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, *19*(1), 3–45. http://doi.org/10.1007/BF03338859

Handel, B. (2003). Teachers' Mathematical Beliefs: A Review. *The Mathematics Educator*, *13*(2), 47–57. http://doi.org/10.1167/iovs.10-7062

Hidalgo, S., Ana, M., & Andrés, P. (2015). Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros. *Educación Matemática*, *27*(1), 65–90.

Kaasila, R. (2007). Using narrative inquiry for investigating the becoming of a mathematics teacher. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *39*(3), 205–213. http://doi.org/10.1007/s11858-007-0023-6

Lebrija, A., Flores, R., & Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá A. *Educación Matemática*, *22*(1), 31–35.

Liljedahl, P. (2009). Teachers' insights into the relationship between beliefs and practice. In J. Maasz & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results* (pp. 44–54). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Maasepp, B., & Bobis, J. (2014). Prospective Primary Teachers' Beliefs about Mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development*, *16*(2), 89–107.

Maasz, J., & Schlöglmann, W. (Eds.). (2009). *Beliefs and attitudes in mathematics education. New Research Results*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307–332. http://doi.org/10.3102/00346543062003307

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathe- matics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 550–576.

Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. In J. Sikula (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 102–119). New York, NY: Macmillan.

Sáenz, C., & Lebrija, A. (2014). La formación continua del profesorado de matemáticas: una práctica reflexiva para una enseñanza centrada en el aprendiz. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *17*(2), 219–244.

Šapkova, A. (2013). Study on Latvian mathematics teachers' espoused beliefs about teaching and learning and reported practices. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(3), 733–759.

Sawyer, A. G. (2018). Factors influencing elementary mathematics teachers'' beliefs in reform-based teaching. *The Mathematics Educator*, *26*(2), 26–53.

SEP [Secretaría de Educación Pública / Secretary of Public Education]. (2016). *Nuevo currículo de la educación media superior [New curriculum for upper secondary education]*.

Skott, J. (2015a). The promises, problems, and prospects of research on teachers' beliefs. In H. Fives & M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of research on teachers' beliefs* (pp. 13–30). New York, NY: Routledge.

Skott, J. (2015b). Towards a participatory approach to 'beliefs' in mathematics education. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 3–23). http://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4

Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education*, *17*(2), 213–226. http://doi.org/10.1016/S0742-051X(00)00052-4

Thompson, A. (1992). Teachers'beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York, NY: Macmillan.

Törner, G., & Grigutsch, S. (1994). „Mathematische Weltbilder" bei Studienanfängern – eine Erhebung. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *15*(3), 211–251.

Vesga, G. J., & De Losada, M. F. (2018). Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en ejercicio sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Revista Colombiana de Educación*, *74*(enero-junio), 243–267.

Wilson, M., & Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and development. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 127– 148). Dordrecht: Kluwer.

Xenofontos, C. (2018). Greek-Cypriot elementary teachers' epistemological beliefs about mathematics. *Teaching and Teacher Education*, *70*, 47–57. http://doi.org/10.1016/j.tate.2017.11.007

Žalská, J. (2012). Mathematics teachers' mathematical beliefs: A comprehensive review of international research. *Scientia in Educatione*, *3*(1), 45–65.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3101.05

Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores

Tasks for developing the mathematical sense in the initial training of teachers

Juan Francisco Ruiz-Hidalgo[1]
Pablo Flores Martínez[2]
Rafael Ramírez-Uclés[3]
José Antonio Fernández-Plaza[4]

Resumen: Desde hace tiempo, diversos organismos, como el National Council of Teachers of Mathematics, promueven una enseñanza de las matemáticas con sentido. Desde nuestra perspectiva de formadores de profesores de matemáticas y basándonos en investigaciones de reconocido prestigio, mostramos en este trabajo un modelo de formación de profesores en el que desarrollamos el sentido matemático a través de tareas matemáticas escolares y de la identificación de objetivos de aprendizaje para dichas tareas. En este modelo, repasamos las capacidades matemáticas necesarias para enseñar matemáticas con sentido, relacionándolas con distintos sentidos matemáticos –numérico, espacial, de la medida y estocástico– y ejemplificamos con tareas de formación que permiten su desarrollo en futuros maestros de educación primaria. Asimismo, estas tareas desarrollan las capacidades que los futuros maestros podrán utilizar en su labor docente, pues se trata de un modelo que va más allá de la memorización de los componentes de los sentidos matemáticos, pretendiendo lograr un conocimiento funcional de las matemáticas.

Fecha de recepción: 8 de junio de 2018. **Fecha de aceptación:** 6 de febrero de 2019.
[1] Universidad de Granada, España, jfruiz@ugr.es, orcid.org/0000-0002-4805-6922
[2] Universidad de Granada, España, pflores@ugr.es, orcid.org/0000-0002-3292-6639
[3] Universidad de Granada, España, rramirez@ugr.es, orcid.org/0000-0002-8462-5897
[4] Universidad de Granada, España, joseanfplaza@ugr.es, orcid.org/0000-0001-6570-0866

Palabras clave: *matemáticas para maestros, sentido matemático, tareas matemáticas, capacidades matemáticas, objetivos de aprendizaje.*

Abstract: For a long time, various agencies, such as the National Council of Teachers of Mathematics, have advocated promoting a meaningful teaching of mathematics. As mathematics teachers trainers, we show in this work our proposal of teacher training model in which we develop the mathematical sense through: the identification of capabilities in solving school mathematical tasks, as well as in the identification of specific learning objectives for these tasks. In this model, we review the mathematical capabilities by relating them to different mathematical senses- number, spatial, measurement and stochastic-and exemplify tasks that allow their development in future primary school teachers. Likewise, these tasks develop some capabilities that future teachers could use in their profession, due to the model goes beyond the memorization of the senses and their capabilities, and aims to highlight a functional knowledge of mathematics.

Keywords: Mathematics for primary school teachers, mathematical sense, tasks, capabilities, learning objectives

1. INTRODUCCIÓN

Entendemos el *Sentido matemático* como el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos, geométricos, métricos y estadísticos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional. Esta noción engloba cuatro sentidos correspondientes a cada bloque de contenido, denominados *Sentido numérico* (Sowder, 1992); *Sentido espacial* (Clements y Battista, 1992; Flores, Ramírez-Uclés y Del Río, 2015), *Sentido de la medida* (Shaw y Cliatt, 1989, Moreno, Gil y Montoro, 2015); y *Sentido estocástico* (Ruiz-Hidalgo y Serrano, 2015), basado en la idea de sentido estadístico (Watson, 2006; Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013).

Esta idea hace que consideremos que la formación de profesores de matemáticas tiene que contribuir a que los futuros profesores aprecien qué significa *enseñar matemáticas con sentido (matemático)*, y se preparen para lograr que su potencial alumnado *aprenda matemáticas con sentido*. Entendemos que "aprender matemáticas con sentido consiste en atender a sus usos en contexto y ofertar propuestas a las cuestiones que de ello se deriven" (Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015, p.51). El origen de esta consideración arranca de apreciar que las matemáticas son una ciencia cultural, que permite pensar, entender y actuar en los problemas del entorno que tienen que ver con la cantidad, la forma, el tamaño y la incertidumbre aleatoria (OECD, 2016). Es por ello que se plantea una enseñanza funcional de las matemáticas, que haga predominar y dar sentido a los conceptos en resolución de problemas o tareas en contexto, frente al aprendizaje de destrezas o algoritmos en situaciones descontextualizadas (Rico y Díez, 2011). Establecemos así que es necesario disponer y desarrollar el sentido matemático para llegar a ser matemáticamente competente (Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015).

Ante esta situación, en diversos cursos de formación de profesores de matemáticas, nos venimos planteando la necesidad de convertir la idea de sentido matemático en un foco de atención prioritario (Flores y Rico, 2015; Van de Walle, Karp y Bay-Williams 2013), tanto por constituir un objetivo de la enseñanza que cursarán los futuros maestros, como por originar un conocimiento didáctico del contenido matemático, que no se limite a aportar un conocimiento memorístico de resultados de investigaciones educativas sobre la enseñanza de las matemáticas. Este tipo de conocimiento está enfocado en la toma de decisiones en los procesos de enseñanza (Herbst, 2018) y en los procesos de reflexión en el contexto de formación de profesores (Piñeiro y Flores, 2018).

La forma con la que se abordan los cursos de formación matemática del Grado de Educación Primaria se centra en suscitar que los futuros profesores se cuestionen sobre cómo enseñar matemáticas con sentido. Este propósito se alcanza en tres etapas, que ayudan a definir las finalidades de los cursos que se incluyen en el plan de estudios:

1) a través de profundizar en el conocimiento del significado de los conceptos matemáticos escolares, que se puede concretar en identificar y organizar situaciones, contextos, fenómenos y modos de uso de cada concepto (Ruiz-Hidalgo, 2016);
2) mediante el desarrollo del conocimiento matemático con sentido de los estudiantes para profesor; y
3) como provisión de herramientas para llevar a cabo una enseñanza significativa en su vida profesional futura.

En este trabajo nos centramos en la segunda etapa y mostramos algunas experiencias que estamos llevando a cabo para lograr dos propósitos relacionados con ella:

1) la identificación de capacidades en la resolución de tareas matemáticas escolares, y
2) la formulación y estudio de objetivos de aprendizaje específicos para que dichas tareas afronten un aprendizaje matemático con sentido.

Este trabajo se estructura alrededor de estos dos propósitos. En primer lugar mostramos un ejemplo de cómo favorecer que el alumnado del grado en Educación Primaria (el futuro docente) desarrolle sentido matemático de medida. Posteriormente mostramos cómo contribuimos a que el futuro profesor comprenda la noción de sentido estocástico, apreciando las necesidades informativas y de acciones, asociadas a las capacidades matemáticas (o componentes) que describen este sentido, para resolver un problema concreto. Por último, presentamos una experiencia para favorecer que el futuro profesor diseñe objetivos de aprendizaje, tendentes a lograr que sus alumnos desarrollen sentido numérico.

2. EL PLAN DE FORMACIÓN EN MATEMÁTICAS EN EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El proceso de formación inicial de profesores de matemáticas tiene que abordar tanto las condiciones actuales de los candidatos a profesor, como las expectativas profesionales que tendrán que abordar en su desempeño futuro. A tal fin, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada (España) se plantea una formación inicial de maestros en el área de matemáticas que lleve a los estudiantes a profundizar en el contenido matemático de primaria, arrancando de una visión funcional de la educación matemática, lo que conduce a suministrar herramientas para profundizar en el conocimiento, con intención práctica. Los estudiantes del grado deben llevar a cabo análisis didáctico de los contenidos matemáticos.

> Por análisis didáctico de un contenido matemático escolar entendemos un método para escudriñar, estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, los

contenidos didácticos de las matemáticas escolares, con el propósito de su planificación, su implementación en el aula y su evaluación (Rico, 2016a).

Consideramos el método conocido como análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) en su faceta de herramienta para la elaboración de unidades didácticas de matemáticas (Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza, 2013), estructurado en cuatro tipos de análisis:

- Análisis de contenido, centrado en describir y establecer los diferentes significados que tienen las nociones matemáticas.
- Análisis cognitivo, donde se estudian aspectos del aprendizaje de las matemáticas por parte de los escolares.
- Análisis de instrucción, enfocado en las cuestiones relacionadas con la instrucción, su planificación e implementación.
- Análisis de evaluación, cuyo fin es valorar el proceso de aprendizaje y los logros alcanzados.

El currículo de la formación inicial del maestro se relaciona con la idea de que el conocimiento didáctico tiene el papel de herramienta funcional, necesitando revisar investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido, para tener en cuenta apreciaciones que repercutan en su aprendizaje, como para determinar las dificultades de aprendizaje más habituales (Flores, 2018).

Realizar el análisis del contenido matemático (Rico, 2016b), lleva a comprender el significado de dicho contenido, mediante una profundización que aprecie y organice sus estructuras conceptuales, los sentidos, situaciones, usos y problemas que ayudan a resolver el contenido, así como la forma en que se representan (sistemas de representación y modelos). Fruto de este análisis de los contenidos de matemáticas de primaria, surge la materia que se denomina "Bases Matemáticas para la Educación Primaria", que se imparte en primer curso del grado de Maestro de Educación Primaria y que se concreta en un libro titulado *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (Segovia y Rico, 2011).

Una vez profundizado en el significado del contenido matemático, se pueden pasar a examinar los aspectos relativos a la enseñanza de dicho contenido, las expectativas y limitaciones de aprendizaje previsibles en los estudiantes de primaria, realizando un análisis cognitivo del contenido. Es en este momento en que se aborda la dimensión funcional del currículo de matemáticas de primaria (Rico y Díez, 2011), que lleva a apreciar la importancia de *dar sentido al* *aprendizaje de las matemáticas*. Todo esto dentro de un curso destinado a realizar el análisis cognitivo de los contenidos matemáticos, desarrollado en un libro de referencia titulado "*Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*" (Flores y Rico, 2015).

El concepto de sentido matemático aparece como un punto crucial del estudio cognitivo de los contenidos matemáticos (Lupiáñez y Rico, 2015; Rico, 2015). Durante diversos cursos en que hemos planteado el proceso, apreciamos la importancia de cubrir dos etapas para contribuir a que el estudiante valore en su justa medida el sentido matemático: mejorar su propio sentido matemático y apreciar en qué consiste y cómo se contempla en las tareas matemáticas escolares habituales en la educación primaria.

Para mostrar cómo abordamos estas dos etapas, comenzamos por describir el proceso formativo que pretende ayudarles a desarrollar el sentido matemático, describiendo un ejemplo basado en el sentido de la medida. A continuación, presentamos ejemplos de tareas para que los futuros profesores identifiquen los componentes del sentido de la medida, sentido estocástico y definan y organicen objetivos de aprendizaje para desarrollar el sentido numérico.

Todos los ejemplos se han desarrollado en sesiones de trabajo práctico de la asignatura "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria", en las que los futuros profesores trabajan en grupos de cuatro miembros de manera supervisada dentro del aula. Las sesiones prácticas incluyen el trabajo autónomo fuera del aula para completar la tarea solicitada y redactarla. Estas sesiones complementan a las lecciones teóricas en las que se describen, discuten y ejemplifican los componentes de cada uno de los sentidos. El curso total está compuesto por 15 sesiones teóricas (dictadas a grandes grupos de unos 60 futuros profesores) y 15 prácticas (dictadas a grupos de 20 futuros profesores), de las cuales 5 teóricas y 10 prácticas se dedican al estudio del sentido matemático. En las sesiones prácticas, los 20 futuros maestros se organizan en pequeños grupos (4 miembros) que realizan tareas como las que ejemplificamos a continuación. Tras trabajar todos los sentidos (numérico, espacial, medida, estocástico), se les propone un trabajo final que se describe en el punto 5.

3. DESARROLLAR EL SENTIDO DE LA MEDIDA

La idea de sentido de la medida que se trabaja en el curso aparece en el capítulo correspondiente del libro de texto (Moreno, Gil y Montoro, 2015), y enfatiza tres componentes o capacidades específicas y etapas para aprender con sentido la medida: captar la magnitud, llevar a cabo medidas y desarrollar estrategias y actividades de estimación. En diversos cursos hemos empleado una tarea práctica para mejorar el desarrollo del sentido de la medida (Fernández, 2011) de los futuros profesores, al determinar con sentido la dosis de un tratamiento. En el cuadro 1 aparece el enunciado de esta tarea.

Cuadro 1. Tarea "Fluidasa"

Resuelve con sentido la situación siguiente: *"FLUIDASA SOLUCIÓN" es un jarabe, cuyo principio básico es la "mepifilina", que está indicado para la tos en pacientes con bronquitis. En el prospecto, respecto a las instrucciones de administración, indica: 1 medida de 5 ml contiene aproximadamente 25 mg de "mepifilina". La dosis normal es de 8 mg por kg de peso y día, fraccionada en 3 tomas. Rocío es una niña de 6 años que pesa aproximadamente 19 kg, ¿cuántas cucharaditas de las de café (5 ml) hay que darle en cada toma?*

Durante una sesión práctica de trabajo los profesores en formación, en grupos de 4, abordan la resolución de esta tarea. Usualmente muestran disposición a tomar los datos, buscar las operaciones y resolverlas, llegando a soluciones (correctas o no), que generalmente emplean números decimales de cucharadas en cada toma.

La puesta en común de las soluciones suele confrontar las respuestas fraccionarias con las que abordan la cantidad de cucharadas de una manera menos precisa. Es en este momento en que proponemos que examinen las magnitudes y los objetos que están presentes en el problema. Con cierta facilidad aparecen tres magnitudes (capacidad de cuchara, masa del niño y duración, edad del niño). Las otras dos magnitudes, masa de mepifilina y volumen de la disolución, suelen ser más complicadas de apreciar, al venir dadas por tasas que relacionan la masa de mepifilina con el volumen de disolución y la masa de mepifilina con el peso del paciente, pero son fundamentales para comprender el problema en toda su extensión.

En esta fase se aborda el componente conceptual del sentido de medida, concretamente centrada en identificar cuál es la cualidad que se aprecia de cada objeto, distinguiendo las magnitudes que son pertinentes (dejando de lado la edad, aun reconociendo que es pertinente habitualmente en la determinación de una dosis, pero que en este caso no disponemos de información al respecto, y que esta relación no suele ser de proporcionalidad, tal como la que relaciona el peso de la niña con la dosis, sino una relación escalonada).

Apreciar las unidades de medida de cada magnitud (estableciendo o no correspondencias entre masa y peso, según proceda), separando las de capacidad y volumen, pero captando la relación entre ambas, es el paso siguiente. De este estudio se llega a clarificar la medida aproximada, y a reconocer el empleo cotidiano de una unidad de medida no estándar (la cucharada), apreciando la escasa precisión que lleva a hacer estas apreciaciones. Una actividad de medida de diversas cucharadas podría hacer más completa esta parte de la resolución, comenzando por ordenar de manera intuitiva la capacidad de diversas cucharas, comprobando dicha ordenación, identificando la influencia de la tensión superficial y cómo varía la capacidad según se colme o no la cuchara, y según el líquido empleado. Este proceso de estimación y medida puede colaborar a desarrollar el tercer componente del sentido de la medida, es decir, la estimación, tanto para apreciar la diversidad de medidas de capacidad, como comenzar a interiorizar su capacidad, y percibiendo el interés en estimar sobre el medir en situaciones como la presentada.

Después de estas fases se puede trabajar con la resolución "con sentido matemático" de esta tarea, apreciando que la precisión permite reducir la dosis a dos cucharadas en cada toma, sin por ello faltar a las apreciaciones que figuran en el prospecto. Durante el proceso se han enfatizado los componentes que caracterizan el sentido de medida, especialmente para apreciar la importancia de tomar en consideración todas las facetas implicadas. La siguiente sesión de trabajo se dedica a apreciar los componentes en diversas situaciones, tanto para afrontarlas y resolverlas, como para explicarlos.

4. ELABORACIÓN DEL LISTADO DE LOS COMPONENTES DE CADA SENTIDO

Para evitar la memorización innecesaria de los componentes de cada sentido y centrar el esfuerzo en desarrollar lo que estos significan y cuáles son los indicadores de las actividades que los caracterizan, se les pide que elaboren un esquema exclusivamente con la denominación de los componentes, a partir de referencias aportadas en clase. El esquema debe incluir "indicadores" que le permitan analizar las tareas y discriminar si se pone en juego cada componente.

Se muestra en el anexo I un ejemplo de esquema elaborado por un estudiante, con el listado de los componentes de los cuatro sentidos.

4.1. Los futuros profesores identifican los componentes del sentido estocástico

Durante la sesión de trabajo práctico destinada a que los futuros profesores aprecien el concepto de sentido estocástico (Ruiz-Hidalgo y Serrano, 2015), hemos empleado la tarea matemática escolar "Autobús o caminar", que aparece en el cuadro 2, contextualizada en Granada y su sistema de transporte urbano.

Cuadro 2. Tarea "Autobús o caminar"

Examina tu sentido estocástico contestando razonadamente la siguiente cuestión: Cuando se viene a la Facultad de Ciencias de la Educación desde la Plaza Albert Einstein, ¿es mejor siempre tomar la línea U3 de autobuses que venir caminando?

Informaciones: La línea U3 de autobuses de Granada tiene 3 paradas intermedias entre el punto de salida (Plaza Einstein) y la Facultad de Ciencias de la Educación. Cada parada coincide con un semáforo y el tiempo de espera en cada parada es el mismo que dura el semáforo. Los horarios de salida de Plaza Einstein están establecidos por la empresa concesionaria, y hay que buscarlos en la información correspondiente.

Resolución (en el seminario): En clase deberás estudiar la situación, examinando:
A: Qué parte del estudio corresponde a un proceso aleatorio y cuál a un determinista
B: Cómo puedes cuantificar la probabilidad en los apartados aleatorios
C: Qué datos necesitas buscar y cómo obtenerlos
D: Cómo puedes resumir los datos para extraer informaciones útiles
E: Cómo llevar a cabo el estudio completo.

Se han previsto una serie de informaciones que te van a ayudar a realizar el estudio, cada una de ellas corresponde a uno de los apartados anteriores. Conforme se te van indicando se te ayuda a desarrollar el componente correspondiente del sentido estocástico.

Trabajo del grupo a entregar:
a) Resolución: Realizar
- a1) Un cuadro que exprese los tiempos medios de duración del trayecto, según la hora.
- a2) Un informe que responda razonadamente a la pregunta (Cuando se viene desde la Plaza de Einstein, ¿es mejor siempre tomar la línea U3 de autobuses que venir caminando?), y que aclare las condiciones y decisiones adoptadas para llegar a la solución.

b) Demuestra que comprendes la idea de sentido estocástico
Identifica justificadamente todos los componentes del sentido estocástico que se ponen de manifiesto al realizar la tarea, señalando cómo se aplica cada uno.

Para llevar a cabo esta tarea, se ha previsto que los futuros profesores aprecien los datos que tienen y los que les faltan. Cuando empiezan a detectar necesidades se les suministra una baraja de informaciones, compuesta por cuatro colecciones, cada una correspondiente a una de las letras indicadas (**A**: Qué parte del estudio corresponde a un proceso aleatorio y cuál a un determinista; **B**: Cómo puedes cuantificar la probabilidad en los apartados aleatorios; **C**: Qué datos necesitas buscar y cómo obtenerlos; **D**: Cómo puedes resumir los datos para extraer informaciones útiles; y **E**: Cómo llevar a cabo el estudio completo). Se entrega una colección a cada integrante del equipo, quienes deben mirar las informaciones que les ayuden a resolver el problema. Con ello se pretende que se produzca una interpretación cruzada de informaciones, en la que vayan completándolas y teniendo presente el origen (el componente) de cada información y la dependencia entre ellas. En el anexo II figura la baraja de informaciones suministradas.

El siguiente paso, como se ha descrito en el ejemplo anterior y que se repite en todas las actividades sobre sentidos, consiste en identificar componentes de cada sentido que contribuyen a desarrollar en tareas matemáticas escolares de libros de texto y en diseñar otras actividades dirigidas al alumnado de Educación Primaria que contribuyan al mismo fin.

El proceso de compartir diversas clases de información, relacionándolas entre sí, hasta construir un mapa de relaciones, lleva a darle presencia al sentido matemático como finalidad de enseñanza. El problema siguiente consiste en definir objetivos de aprendizaje que tengan en cuenta tanto el significado de los contenidos matemáticos, como el desarrollo del sentido matemático en el alumnado de primaria. Esto lo abordamos en el apartado 6, tomando casos particulares relacionados con el sentido numérico.

5. DISEÑO Y COEVALUACIÓN DE ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR SENTIDO MATEMÁTICO

Una vez realizada la aproximación inicial, desarrollo, organización e identificación de los componentes que describen cada sentido matemático, presentada en este artículo mediante las actividades ejemplificadas, se propone a los futuros maestros como trabajo final práctico la selección de uno o varios componentes y el diseño justificado de una propuesta de actividad para el alumnado de Educación Primaria que contribuya a desarrollar dichos componentes.

Puesto que nuestros estudiantes no pueden llevar a la práctica del aula de primaria cada propuesta, el trabajo de cada grupo se desarrolla y evalúa en dos fases. En la primera, la actividad planteada por cada grupo es revisada por otro grupo de trabajo que realiza un informe "borrador" durante la hora de clase, en el que se evalúa la actividad atendiendo a los aspectos de forma y, específicamente, al grado en que se cubren las capacidades que plantean los compañeros, analizando críticamente la justificación que proporcionan. Completan el análisis de la tarea reflejando otros componentes destacados y planteando mejoras. En la segunda fase cada grupo, una vez recibido el informe, elabora una nueva versión del trabajo en el que modifica su actividad y el análisis de los componentes. Esta producción es empleada en la evaluación del grupo por el profesor de la materia, quien también valora el informe elaborado sobre el trabajo de otro grupo.

Como ejemplo, en relación con el sentido de la medida, en el cuadro 3 se muestra una actividad planteada por un grupo de futuros maestros. El cuadro 4 incluye la crítica realizada por otro equipo de trabajo.

Cuadro 3. Actividad y capacidades indicadas por un grupo

Completa la siguiente tabla midiendo con un bolígrafo BIC la pizarra, el pupitre (largo y ancho), una libreta, la pata de una silla y la puerta del aula. A continuación, haz la estimación del ancho y largo del aula mediante pasos

Mide:	Mide:	Mide:
Mide:	Mide:	Mide:

Capacidades que se trabajan (respuesta dada por uno de los grupos):
Ejecución del proceso de medir. Seleccionar la unidad adecuada, estándar o no estándar, procedimiento e instrumentos adecuados. Usar fórmulas cuando sea apropiado. Expresar adecuadamente el resultado.

Cuadro 4. Crítica realizada por otro grupo de futuros profesores a la tarea del cuadro 3.

La actividad presenta las siguientes fortalezas:

- Desarrolla la capacidad que se menciona.
- Las unidades no convencionales son ideales para realizar medidas.

Sin embargo, presenta las siguientes debilidades:

- No se justifica cómo trabaja dicha actividad esa capacidad.
- También falta añadir que dicha actividad contribuye al desarrollo de la capacidad de estimación.
- No se contrasta la medición con el empleo de instrumentos estandarizados para comparar las medidas realizadas con unidades no convencionales. Por ejemplo, si el aula mide de largo 17 pasos de Juan y 21 pasos de Luis, no hay referente estándar respecto del cual averiguar qué medición ha sido más precisa.

Como sugerencia de mejora, se propone incluir cuestiones destinadas a mostrar que se obtienen diferentes medidas cuando estamos trabajando con la misma unidad de medida no estándar (las partes del cuerpo de cada alumno tienen diferente tamaño) y por tanto se hace necesario el uso de unidades estándar.
Finalmente, esta actividad se puede trabajar en parejas para fomentar la motivación y la colaboración.

La tarea propuesta en el cuadro 3 se divide en dos: la primera es de medida directa en la que la unidad de medida está determinada. La segunda tarea, por su parte, es de estimación aunque no requiere tomar decisiones sobre medir o aproximar. Así, las capacidades a desarrollar en ambas son, fundamentalmente "Aplicar el procedimiento e instrumento adecuados para efectuar dicha medición ya sea exacta o aproximada" y "Expresar adecuadamente el resultado de la medición" (ver anexo I).

En la capacidades indicadas por los futuros profesores (cuadro 3, transcrito literalmente), se perciben algunas deficiencias como el énfasis en capacidades secundarias: "Seleccionar la unidad adecuada, estándar o no estándar" (que está determinada por el enunciado) y "Usar fórmulas cuando sea apropiado" (que se refiere al uso de fórmulas para medidas indirectas). Asimismo, aparecen carencias relacionadas con el contenido matemático expresado por los futuros profesores como la ausencia de dimensiones o magnitudes (longitud/superficie/volumen) que han de medirse en algunos de los objetos señalados.

Por su parte, la crítica del cuadro 4, acierta parcialmente en la valoración pues menciona que se desarrollan las capacidades mencionadas, pero no indica si todas o sólo algunas. La afirmación sobre el uso de unidades no convencionales como ideales no es apropiada. Sin embargo, aciertan en proponer la capacidad de estimación como implicada en la tarea, y dedicar esfuerzo a realizar aclaraciones sobre el proceso de medida mediante la estimación y la diferencia entre unidades estándar y no estándar, lo que manifiesta que han identificado estos procesos como fundamentales de la tarea, y sugieren a sus compañeros que deberían describirlos con más detalle.

6. DEFINIR OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Dentro de la realización del análisis cognitivo de un contenido, los futuros maestros tienen que definir expectativas de aprendizaje, en forma de objetivos específicos. Estos objetivos deben recoger la idea de sentido matemático. ¿Cuáles y cómo deben ser los objetivos de aprendizaje para que los alumnos aprendan matemáticas con sentido?

Los sentidos matemáticos nos hacen prestar atención a todos los componentes necesarios para el aprendizaje de un concepto, concediendo igual atención a la comprensión que al aprendizaje de destrezas y técnicas matemáticas. Es decir, el sentido matemático requiere:

a) Equilibrio entre conocimiento conceptual y procedimental.
b) Cubrir el máximo de componentes o respetar la importancia de cada uno de ellos.

6.1 Objetivos conceptuales y procedimentales:

Es relativamente fácil establecer objetivos cuando tienen intención procedimental, ya que es sencillo identificar qué queremos que el alumno aprenda, en qué orden, con qué pasos, etc. Por ejemplo, si queremos que aprenda el algoritmo tradicional de la resta, no es difícil encontrar etapas:

- Restar números de una cifra (5 − 2; 8 − 6, etc.).
- Restar de un número de dos cifras otro de una cifra, primero sin llevarse (15 − 3; 27 − 6; 28 − 8), luego llevándose (13 − 9; 26 − 7, etc.), terminando con las restas a múltiplos de 10 (20 − 7, 30 − 9, etc.), colocando siempre

los números en papel cuadriculado, para alinear las unidades del orden correspondiente.

- Restar números de dos cifras, primero sin llevada (36 − 24; 43 − 31), luego llevándose (36 − 27), para terminar con múltiplos de 10 (40 − 24; 35 − 20), colocando los números en papel cuadriculado.
- Aumentar el número de cifras de los números, incluyendo aquellos que no tienen igual cantidad de cifras (123 − 85).

Esta consideración permite formular los siguientes objetivos del aprendizaje del procedimiento:

1) Obtener el resultado de una resta de números de una cifra:
   a) Recordando las sumas correspondientes
   b) Determinando cuánto hay que sumar al minuendo para llegar al sustraendo
2) Obtener el resultado de una resta de números de dos cifras menos números de una cifra:
   a) Sin llevada
   b) Con llevada

No es tan fácil definir objetivos correspondientes a capacidades de comprensión de conceptos: el concepto de resta, por ejemplo. ¿Qué es comprender?, ¿cómo podemos expresar los objetivos conceptuales para evitar que se conviertan en objetivos de memorización?

Según la Real Academia de la Lengua (RAE), comprender es entender, alcanzar. En Psicología, el concepto de comprensión es la acción de percibir el significado de algo, se identifica con una actividad cognoscitiva que comparte elementos con el conocimiento racional y con sus técnicas interpretativas, su interés es interpretar el sentido de las cosas (Hiebert y Carpenter, 1992).

De aquí que interpretemos que un alumno comprende la resta cuando:

- Resuelve los diversos problemas que corresponden a la resta (todos los tipos de problemas determinados en el análisis de contenido, cuando estudiamos su significado: cambio, combinación, comparación; en todas las situaciones −incógnita en la transformación y en la cantidad inicial, incógnita en uno de los sumandos, incógnita en el elemento de comparación aditiva, o en alguno de los referentes, en la comparación sustractiva).

- Pasa de una forma de representación a otra (al plantearle una resta de manera vertical, la identifica con otra horizontal, 12 − 9, piensa en una situación con significado que corresponda a esta resta − tengo 12 cromos y pierdo 9, cuántos me quedan −, puede expresarlo por medio de otras representaciones, desde los objetos, el ábaco, etc.).
- Es capaz de interpretar la situación de diversas formas, buscando la más sencilla cuando tiene dudas al respecto (12 − 9 también puede interpretarse como averiguar cuántos pisos tengo que subir, si estoy en el 9 y quiero ir al 12, que es lo mismo que averiguar cuántos tengo que subir si estoy en el 10 y quiero ir al 13, con lo que aprecio más fácilmente que es 3; por tanto en la aplicación del procedimiento de resta con llevada tiene que salir 3; u otras estimando: 12 está en la segunda decena, tendré que subir menos de 10 pisos, estimando, el tamaño del resultado).

Los análisis realizados hasta el momento deben facilitar al futuro profesor saber qué quiere lograr en su enseñanza, y definir objetivos que vayan en la dirección prevista, es decir, que estén encaminados a que el alumno aprenda matemáticas con sentido.

En la formación de profesores tenemos que enseñar a definir objetivos y hacerles apreciar en qué grado los objetivos planteados recogen lo más importante de los sentidos, así como los elementos que contribuyen a ello, es decir, a comprender, además de a aplicar técnicas.

6.2 Análisis de los objetivos propuestos por los futuros profesores

Para disponer de criterios con los que revisar los objetivos formulados por futuros profesores, presentamos un proceso que les permite examinar en qué grado sus objetivos plantean el logro de un aprendizaje con sentido de las matemáticas, respondiendo a cuestiones como las siguientes:

- Qué aspectos del contenido estamos enfatizando, ¿sólo los procedimentales? ¿también los conceptuales?, ¿en qué proporción?, ¿son adecuados para alcanzar el sentido matemático correspondiente?
- Qué componentes del sentido matemático se están teniendo en cuenta ¿están todos?, ¿aparece alguno más que los demás?, ¿somos conscientes y es lo que interesa?

- Qué aspectos de significado estamos teniendo en cuenta ¿se recogen los adecuados para que el alumno llegue a comprender?, ¿es conveniente añadir alguno?
- Qué elementos de las representaciones se han atendido, ¿son suficientes para que el alumno interprete unos en función de los otros?, ¿favorecen que pase de la representación simbólica a representaciones materiales?, ¿he previsto que se utilicen representaciones gráficas que permitan pasar de simbólicas a materiales en ambos sentidos?

Para responder a estas cuestiones, es decir, para poder juzgar si los objetivos definidos son adecuados, si están definidos de manera funcional, empleamos la tarea del cuadro 5 en esta parte final de los cursos de formación de profesores. En ella revisan los objetivos formulados y los rectifican a partir de apreciar en qué proporción aparece cada componente y en qué grado coincide con sus intenciones formativas según ciclo.

Cuadro 5. Los colores. Tarea

Consideramos esta asignación de los colores del parchís:

Concepto: Rojo
Procedimientos: Azul
Representaciones: Amarillo
Usos/Fenómenos: Verde

1. Utiliza estos colores para el mapa conceptual del análisis de contenido
2. Asigna un color a cada uno de los objetivos, según esté relacionado con alguno de los elementos del análisis de contenido. Si está asociado a varios, únicamente utiliza el que esté más relacionado (para ello, piensa en qué tiene que realizar el alumno para que estés seguro que lo has logrado)
3. Asigna a cada objetivo, los componentes de los sentidos que estén asociadas a él (pueden ser varias). Utiliza esta codificación:
   - Sentido Numérico (SN1=reconocer cuándo y cómo usar los números, SN2: componente 2....)
   - Sentido Espacial (SP1: elementos geométricos, SP2: componente 2....)
   - Sentido de la medida (SM1: reconocimiento de cualidades medibles, SM2: componente 2, etc.)
   - Sentido estocástico (SE1: reconocer situaciones aleatorias, SE2: componente 2, etc.)

   Observa el siguiente ejemplo, donde se ha marcado como procedimental este objetivo y se ha indicado la componente SP2.

   Ejemplo. Objetivo: Construir un cuadrado a partir de uno de sus lados (SP2: relaciones geométricas, visualización)
4. Reflexiona sobre las siguientes cuestiones:

¿Se reflejan todos los colores en tus objetivos? ¿Qué color prevalece? ¿Por qué?

¿Se reflejan todos los contenidos en tus objetivos? ¿Crees que has "barrido" con tus objetivos el análisis de contenido? ¿Has utilizado todos los componentes de los sentidos relacionados? ¿Cuáles faltan? Añade un objetivo o reformula los que tienes para considerarlas.

7. REFLEXIONES FINALES

Hemos presentado algunas tareas utilizadas en la formación de maestros de educación primaria para desarrollar la noción de sentido matemático. Esta noción queda concretada en los sentidos numérico, espacial, de la medida y estocástico.

Con la tarea Fluidasa (cuadro 1) hemos ejemplificado momentos y situaciones en las que se pueden poner en juego los conjuntos de capacidades relacionadas con los componentes del sentido de la medida: entender la noción de magnitud, desarrollar los procedimientos de medida y desarrollar estrategias de estimación.

La tarea Autobús o caminar (cuadro 2) nos ha servido para ejemplificar el trabajo del sentido estocástico, concretamente para que el estudiante identifique las capacidades relacionadas con los componentes tratamiento de datos (captura, organización) y con la toma de decisiones a partir de los datos.

Como se ha mostrado en los cuadros 3 y 4 el diseño de las tareas durante la formación de profesores incentiva la comunicación y retroalimentación entre diferentes grupos de trabajo, promoviendo su análisis crítico respecto de los componentes del sentido de la medida.

Además de resolver tareas para desarrollar el sentido matemático y comprender sus componentes, también contribuye a desarrollar el sentido matemático al proponer y analizar objetivos de aprendizaje de una tarea. Así, la tarea Los cuatro colores (cuadro 5) permite a los futuros maestros reflexionar sobre las metas de una tarea. Proponer objetivos de aprendizaje, lejos de ser una labor fácil, pasa por la identificación, distinción y selección de capacidades conceptuales y procedimentales, que hemos apreciado en nuestra experiencia como formadores, y resulta una actividad compleja para los futuros profesores.

Las tareas presentadas persiguen una comprensión del significado del sentido matemático que va más allá de la memorización de sus componentes, resaltando un conocimiento funcional que permita a los futuros profesores identificarlos y proponer tareas que las desarrollen. Para destacar el interés que tenemos en que usen de manera práctica los componentes, sobre su memorización, se permite a los estudiantes que diseñen su propio resumen con la denominación de los componentes y que dispongan de él en todo momento, incluidas las tareas de evaluación.

En relación con los referentes teóricos, en este trabajo hemos analizado el potencial de las tareas propuestas para que los estudiantes comprendan el concepto de sentido matemático. Consideramos que una continuación en futuros trabajos sería tratar de analizar las producciones de los estudiantes y estudiar la evolución en su comprensión de los componentes.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue respaldado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España en el marco de los Proyectos Nacionales I+D EDU2015-70565-P y EDU2016-75771-P, y el Grupo FQM-193 del III Plan Andaluz de Investigación (PAIDI).

REFERENCIAS

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números, 83*, pp. 7-18.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420-464). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Fernández, F. (2011). *El sentido de la Medida*. Lección inaugural del curso 2011-2012 de la Facultad de Ciencias de la Educación. Granada: Universidad de Granada.

Flores, P., Ramírez-Uclés, R. y Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.

Flores, P. (2018). ¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de primaria en el área de Matemáticas. *Unión, 53*, 9-29.

Herbst, P. (2018). Teoría y métodos para la investigación de la racionalidad de la práctica en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, 30*(1), pp. 9-46.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 65-97). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Madrid: Pirámide.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de medida. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 147-168). Madrid: Pirámide.

OECD (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. PISA, OECD Publishing, Paris.

Piñeiro, J.L. y Flores, P. (2018). Reflexión sobre un problema profesional en un contexto de formación de profesores. *Educación Matemática 30*(1), 237-251.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21-40). Madrid: Pirámide.

Rico, L. (2016a). Matemáticas y análisis didáctico. En A. Moreno y L. Rico (Coords.), *Elementos de Didáctica de la Matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Madrid: Pirámide.

Rico, L. (2016b). Significado de los contenidos matemáticos. En A. Moreno y L. Rico (Coords.), *Elementos de Didáctica de la Matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 153- 174). Madrid: Pirámide.

Rico, L. y Díez, A. (2011). Las matemáticas y el maestro de Primaria. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 23-45). Madrid: Pirámide.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 70*, pp. 48-54.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular.* Comares: Granada, España.

Ruiz, J. F. y Serrano, L. (2015). Sentido estocástico. En P. Flores y L. Rico (coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 169-184). Madrid: Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-151). Madrid: Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Fernández-Plaza, J. A. (2013). Planificación de unidades didácticas en enseñanza secundaria mediante el uso del Análisis Didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática.*

Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular (pp. 231-251). Granada: Comares.

Segovia, I. y Rico, L. (2011). *Matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Pirámide.

Shaw, J. M. y M. J. P. Cliatt. (1989). Developing Measurement Sense. En P. R. Trafton y A. P. Shulte (ed.), *New Directions for Elementary School Mathematics. 1989 Yearbook* (pp. 149-155) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 371-389). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. y Bay-Williams, J .M. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching developmentally*. Pearson Education.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dirección postal: Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Campus de Cartuja, s/n
18071 Universidad de Granada, Granada, España

Teléfono: +34 958241993

Anexo I

Capacidades/Componentes que caracterizan el **Sentido numérico**

1. Reconocer cómo y cuándo usar los números
2. Discernir en qué ocasiones se ha de dar un valor exacto y en cuales un valor aproximado.
3. Detectar patrones y usar relaciones numéricas
   3.1. Componer y descomponer números
4. Percibir la magnitud de los números
5. Realizar cálculos numéricos con procedimientos diferentes
   5.1. Aplicar algoritmos diferentes al estándar
   5.2. Desarrollar estrategias de cálculo mental
   5.3. Realizar estimaciones razonables
   5.4. Elegir el procedimiento más sencillo (debe haber dos procedimientos alternativos)
6. Conocer diferentes representaciones de los números y usar la más adecuada.
   6.1. Emplear propiedades del sistema decimal de numeración
7. Resolver problemas con diversidad de estrategias (al menos dos)
8. Inventar problemas a partir de datos y operaciones propuestas
9. Detectar y corregir errores aritméticos

Capacidades/Componentes que caracterizan el **Sentido espacial**

1. Manejo de conceptos geométricos
   1.1. Conocer e identificar propiedades de formas y figuras
   1.2. Reconocer, aplicar y establecer relaciones geométricas (Clasificar atendiendo a diferentes criterios)
   1.3. Movimientos: Aplicar movimientos a figuras y conocer sus propiedades.
2. Destrezas de visualización
   2.1. Localización y Orientación
   2.2. Visualización propiamente dicha

Capacidades/Componentes que caracterizan el **Sentido de la medida**

1. Reconocer cualidades comparables y medibles de los objetos
2. Ejecutar el proceso de medir
   2.1. Seleccionar la unidad de medida adecuada estándar o no estándar
   2.2. Aplicar el procedimiento e instrumento adecuados para efectuar dicha medición ya sea exacta o aproximada
   2.3. Usar fórmulas cuando sea apropiado
   2.4. Expresar adecuadamente el resultado de la medición
3. Desarrollo de estrategias de estimación
   3.1. Discernir situaciones en las que se requiere una medición exacta y otras en las que baste una estimación

Capacidades/Componentes que caracterizan el **Sentido estocástico**

1. Razonamiento probabilístico
   1.1. Identificación de situaciones aleatorias
   1.2. Cuantificación del grado de incertidumbre
2. Razonamiento estadístico
   2.1. Búsqueda y obtención de datos
   2.2. Resumen estadístico de la información
   2.3. Realizar inferencias o sacar conclusiones coherentes

Anexo II. Baraja de informaciones suministradas para la tarea "Autobús o caminar"

<table>
<tr><th>A: Identificación situaciones probabilísticas</th><th>B: Cuantificación de la probabilidad</th><th>C: Búsqueda y obtención de datos</th><th>D: Resumen estadístico de la información</th><th>E: Inferencia</th></tr>
<tr><td>A1: Solución requiere comparación de dos fenómenos:
B: duración viaje U3,
P: duración recorrido a pie.</td><td>B1: Se toma "esperanza" del "tiempo en cada parada", por valor medio de dicho tiempo.</td><td>C1: Medición de duración media en cuadro siguiente:
<table>
<tr><th></th><th>Franja horaria</th><th>Plaza Einstein</th><th>Severo Ochoa</th><th>Plaza de San Isidro</th><th>Cristo de La Yedra</th><th>Facultad</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Tiempo medio de la parada (en minutos)</td><td>8-10h</td><td>Salida</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>Fin</td></tr>
<tr><td>10-12h</td><td>Salida</td><td>2</td><td>1</td><td>Indeterminado</td><td>Fin</td></tr>
<tr><td>12-15h</td><td>Salida</td><td>Indeterminado</td><td>2</td><td>1</td><td>Fin</td></tr>
<tr><td>15-17h</td><td>Salida</td><td>Indeterminado</td><td>3</td><td>Indeterminado</td><td>Fin</td></tr>
<tr><td>17-21h</td><td>Salida</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>Fin</td></tr>
</table></td><td>D1: Una forma de calcular duración es mediante "esperanza", estimada por la "media" de resultados.</td><td>E1: Comparando resultados se estima duraciones, a cada hora. Respuesta más precisa requiere inferencias estadísticas más complejas.</td></tr>
<tr><td>A2: La magnitud en los dos fenómenos es "la duración".
Unidad de medida "el minuto"</td><td>B2: Se puede simular tiempo que se detiene en parada Severo Ochoa con dado: número indicará minutos que se demora.</td><td>C2: Se han tomado datos sin contar paradas, y resultan (en minutos): 4,5; 5; 5; 7; 3; 4,5;4; 4,5; 4,5; 3.</td><td>D2: El tiempo de duración de los semáforos del recorrido suele ser de 1/3 del total para el peatón y 2/3 para los vehículos.</td><td></td></tr>
<tr><td>A3: Duración de viaje en Bus es aleatoria por imprevisibilidad: "Aunque hagamos muchos viajes, no podemos predecir duración exacta"</td><td>B3: Se simula tiempo del U3 en la parada de Cristo de Yedra con un dado, considerando: 1 minuto si sale número impar y 2 si sale par.</td><td>C3: Resultados de varios peatones trayecto Plaza Einstein - Facultad Educación. (minutos): P: 36; J: 46; H: 50; K: 32; L: 35; M: 42; O: 47; Q: 53; T: 41; U: 40</td><td>D3: En la parada del Cristo de la Yedra, suele
tardar entre 1 y 2 minutos, con la misma frecuencia cada resultado.</td><td></td></tr>
<tr><td>A4: Duración de recorrido a pie es aleatorio por imprevisibilidad: "Aunque hagamos muchas veces, no podemos predecir duración exacta"</td><td>B4: Calcula duración media de espera semáforo, multiplicando tiempo de espera por división entre tiempo peatones y tiempo total (peatón + vehículo)</td><td>C4: El tiempo indeterminado en la parada de Severo Ochoa suele tardar entre 1 y 6 minutos, con la misma frecuencia cada resultado.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A5: Duración es una variable cuantitativa continua.</td><td>B5: Se considera duración viaje autobús, sin paradas ni semáforos, estimado en un viaje.</td><td>C5: En parada de Cristo de la Yedra, suele tardar entre 1 y 2 minutos, con la misma frecuencia cada resultado.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A6: Duración viaje en bus varía con las horas, ya que a entrada a clase en la Uni hay más gente esperando y necesita más tiempo en cada parada.</td><td>B6: El tiempo total esperado es suma de tiempos esperados en recorridos
y paradas que tiene que hacer el U3.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A7: Cada uno camina a velocidad distinta. Por ello "ir a pie a Facultad", es diferente para cada sujeto. Cambia con estado del tráfico, semáforos y lluvia.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

 DOI: 10.24844/EM3101.06

Caracterización de procesos de significación de símbolos matemáticos en estudiantes universitarios

Characterizing Meaning Processes of Mathematical Symbols on University Students

María Laura Distéfano[1]
María Andrea Aznar[2]
Marcel David Pochulu[3]

Resumen: Los símbolos matemáticos no suelen ser habitualmente considerados como objetos de enseñanza en asignaturas de la universidad, aunque su uso es esencial para el quehacer matemático. Se presentan resultados de una investigación centrada en el proceso de construcción del significado para algunos símbolos matemáticos en estudiantes universitarios. Se usaron herramientas y constructos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) para identificar las prácticas matemáticas involucradas en el proceso de construcción de significado y las funciones semióticas ligadas a dichas prácticas. Las mismas orientaron tanto el diseño de un instrumento específico como el análisis de los datos recolectados. El instrumento fue administrado a estudiantes de primer año de algunas carreras de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. A partir de los análisis sobre las producciones escritas de los estudiantes se investigó la secuenciación

Fecha de recepción: 5 de junio de 2018. **Fecha de aceptación:** 4 de febrero de 2019.

[1] Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, mldistefano@fi.mdp.edu.ar, orcid.org/0000-0002-0122-7317

[2] Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, maznar@fi.mdp.edu.ar, orcid.org/0000-0002-1948-9315

[3] Instituto Académico Pedagógico de Ciencias Básicas y Aplicadas de la Universidad Nacional de Villa María, marcelpochulu@hotmail.com, orcid.org/ 0000-0003-2292-4178

u orden en el que las prácticas identificadas se manifestaron. Los resultados obtenidos pueden constituir una guía para diseñar tareas y gestionar una clase en la que se promueva la construcción de significado de símbolos matemáticos, convirtiéndolos en objeto de enseñanza.

Palabras clave: *símbolos matemáticos, prácticas matemáticas, función semiótica, enfoque ontosemiótico, procesos de significación.*

Abstract: Mathematical symbols are not usually considered objects of teaching at university level, although they are essential for mathematical work. Results of the research work focused on the process of the construction of meaning of some mathematical symbols on university students are presented. Tools and constructs of the Ontosemiotic Approach of Knowledge and Mathematical Instruction (OSA) were used to identify the mathematical practices involved in the process of construction of meaning. Semiotic functions linked to these practices were also recognized. Mathematical practices and semiotic functions guided both the design of a specific instrument and the analysis of collected data. The instrument was administered to freshmen of some courses of the Universidad Nacional Mar del Plata, Argentina. The analysis of those students` written productions was the starting point to do research and find out a sequence of the above stated practices. The results obtained could be used as a guide for designing new tasks or managing the class in which the construction of meaning of mathematical symbols is promoted, so that they can become objects of teaching.

Keywords: *mathematical symbols, mathematical practices, semiotic function, ontosemiotic approach, meaning processes.*

1. INTRODUCCIÓN

Durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática es posible observar dificultades que los estudiantes universitarios manifiestan en la lectura y escritura de expresiones simbólicas (Lacués Apud, 2014; Distéfano, Pochulu y Font, 2015; Bardini y Pierce, 2015). Algunas de esas dificultades son tan elementales como el desconocimiento de algunos símbolos. Otras son de mayor complejidad como la imposibilidad de interpretar una proposición representada en una expresión simbólica, o la de construir una expresión simbólica que esté correctamente formulada, desde el punto de vista sintáctico. En particular, los estudiantes que inician una carrera universitaria que tiene asignaturas de Matemática en su plan de estudios, revelan desconocimiento de distintos aspectos que constituyen el significado de símbolos matemáticos que son de uso habitual en las asignaturas de este nivel de enseñanza. Es posible detectar que numerosos estudiantes no están familiarizados con las prácticas matemáticas ligadas a la construcción de significado de un símbolo, lo que conduce tanto a dificultades en la lectura de materiales didácticos y bibliografía, como a errores en las producciones escritas. En Argentina, una de las posibles causas atribuibles a esta situación podría ser el hecho de que, los símbolos matemáticos que se requieren en el nivel superior, son utilizados con poca o ninguna frecuencia en la escuela secundaria, lo que provoca limitaciones y obstáculos en los estudiantes que comienzan asignaturas de Matemática en la universidad. Si bien los símbolos constituyen una herramienta fundamental en el quehacer matemático, particularmente en los primeros años de la universidad, no suelen ser objeto directo de enseñanza, y su significado se va generando de manera subsidiaria al de otros objetos matemáticos.

Son numerosas las investigaciones y publicaciones relativas a cuestiones simbólicas focalizadas en la educación primaria o secundaria. Muchas de ellas se centran en la transición de la aritmética al álgebra (Hiebert, 1988; Gómez Granell, 1989; Palarea Medina, 1999; Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Alcalá, 2002; Socas, 2011; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Cerdán, 2010; Rodríguez Domingo, 2015; Fernández Millán y Molina, 2016). En otras se detallan y caracterizan diversos tipos de errores, ligados a distintos factores, tales como la diferencia entre la actividad algebraica y la actividad aritmética, el uso de las notaciones y las convenciones, el significado de letras y variables, y la manipulación de símbolos sin sentido (Booth, 1988; Palarea Medina, 1999; Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Molina González, 2006; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Cerdán, 2010; Rodríguez Domingo y Molina, 2013; Herrera López, Cuesta Borges y Escalante Vega, 2016).

Bardini y Pierce (2015) analizan el uso de los símbolos en la transición entre la escuela secundaria y la universidad, y destacan las dificultades que las diferencias entre ambos niveles provocan en los estudiantes, en relación con los aspectos simbólicos. Situados en el nivel universitario se encuentran los trabajos de Camós y Rodríguez (2009) y de Colombano, Formica y Camós (2012), que analizan las problemáticas originadas en la falta de atención que los docentes le otorgan al uso simultáneo del registro del lenguaje natural y del registro simbólico, al enseñar los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad. También centrado en temáticas del Cálculo, Güçler (2014) presenta un estudio sobre el simbolismo ligado a la noción de límite en estudiantes universitarios que toman el curso, provenientes de distintas carreras. Muestra un paralelismo entre el discurso coloquial del docente y sus formulaciones escritas en la pizarra, así como también comparaciones entre lo que algunos estudiantes declaran y lo que efectivamente escriben. Concluye que es importante no dar por sentado el poder comunicativo de los símbolos y advierte que, si no se atiende a los diferentes significados matemáticos que pueden generarse a partir del mismo símbolo, se podrían generar dificultades de comunicación en el aula.

Como parte del estudio de la complejidad cognitiva que presentan algunas tareas con expresiones simbólicas, Distéfano, Pochulu y Font (2015) identifican categorías en los tipos de respuestas que formulan estudiantes universitarios ante dichas tareas y describen algunos errores frecuentes vinculados a cuestiones simbólicas.

Las publicaciones de Distéfano, Urquijo y González (2010) y de Lacués Apud (2011, 2014) se focalizan en experiencias de enseñanza para mejorar las habilidades en el registro simbólico-algebraico con estudiantes de nivel universitario. Reportan un impacto positivo de distintas intervenciones educativas para favorecer el manejo de expresiones simbólicas, concluyendo que es posible promover una mayor competencia en los estudiantes en la utilización de símbolos matemáticos. Es por esto que resulta de interés estudiar el proceso de construcción de significado de los símbolos matemáticos, con el propósito de favorecer los procesos de significación y simbolización en la clase, cuando ello se estableciera como un propósito de enseñanza del docente.

En este trabajo se presentan algunos resultados de una investigación centrada en la descripción de los procesos de significación y simbolización, tomando la concepción pragmática de significado que adopta el Enfoque Ontosemiótico que propone Godino, Batanero y Font (2009). A partir de la identificación de algunas prácticas matemáticas vinculadas a la construcción de significado de algunos símbolos, se describe una secuenciación de su manifestación. Esta secuenciación podría resultar el punto de partida para el diseño de una intervención didáctica destinada a la enseñanza de los símbolos, como una manera de favorecer la construcción de su significado en los estudiantes.

2. MARCO TEÓRICO

Los lineamientos teóricos que han sido fundamento de la investigación que da origen a este artículo provienen del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), de Godino, Batanero y Font (2008).

En este enfoque, se considera una *práctica matemática* a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino, Batanero y Font, 2009, p.4). Este concepto da origen a la noción de *significado* que se aborda en este enfoque. El significado de un objeto matemático se define como "el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7).

En este contexto, el aprendizaje supone la apropiación por parte del estudiante de los significados validados en el seno de una institución, mediante su participación en las comunidades de prácticas (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009). Por lo tanto, se torna relevante el proceso mediante el cual un sujeto crea un significado, vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*. Las funciones semióticas son "entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia" (Godino, Batanero y Font, 2009, p.8).

El EOS considera que objeto matemático "es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática" (Godino, Batanero y Font, 2009, p.4). Por consiguiente, en este contexto, es posible considerar a los símbolos matemáticos como un objeto. Particularmente, pueden encuadrarse en una de las categorías de los denominados *objetos primarios*: los elementos lingüísticos. El enfoque distingue seis tipos de objetos primarios, u objetos de primer orden: situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos o definiciones, propiedades, proposiciones y argumentos (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007). Los distintos objetos no resultan aislados entre sí, sino que se vinculan a través de las funciones semióticas construidas entre ellos, dado que pueden ejercer el rol de antecedente o de consecuente de las mismas (Godino, Batanero y Font, 2009).

3. METODOLOGÍA

La investigación que dio origen a los resultados presentados en este artículo es de tipo cuali-cuantitativa. Para llevarla a cabo se seleccionaron algunos símbolos de uso habitual en asignaturas de Matemática en el nivel universitario. El primero de los criterios utilizados para efectuar tal selección fue la frecuencia de uso en los materiales didácticos y en la bibliografía. El segundo criterio estuvo determinado por la categoría a la que pertenecen en el universo de los símbolos matemáticos. Se optó por símbolos que no tienen uso fuera del ámbito matemático y que fueron creados exclusivamente para representar ideas matemáticas. A este tipo de símbolos Pimm (1990) los denomina *logogramas* y Socas (2010) los define como *signos artificiales*. Esta característica de uso conduce a que la construcción de su significado se realice, casi exclusivamente, en el contexto de las clases de Matemática. Los símbolos elegidos para ser estudiados son: $\in$, $\subset$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$ y $\exists$.

En las siguientes subsecciones se describen los aspectos metodológicos centrales de la investigación.

3.1. Prácticas matemáticas identificadas

El estudio de la construcción de significado de estos símbolos en el marco del EOS, requirió la determinación del conjunto de prácticas matemáticas que conforman, como sistema, dicho significado.

Para poder describirlas se partió de la idea de que el significado de un símbolo está ligado a tres elementos: la identificación, la sintaxis y la semántica. La consideración de estos elementos como constitutivos del significado de un símbolo matemático está basada en distintos fundamentos. Por un lado, se consideró que la *identificación* es la primera acción que un sujeto puede realizar con relación a un símbolo y que resulta necesaria para poder efectuar cualquier otra tarea vinculada con ese símbolo. Está basada en el primero, y más elemental, de los procesos cognitivos que Hiebert (1988) postula en relación con el desarrollo de competencias con símbolos matemáticos: *Conectar los símbolos con los referentes*. En relación con la *sintaxis* y la *semántica*, constituyen dos ramas de la semiótica (Peirce, 1986; Morris, 1985) que determinan características propias de un símbolo y que también han sido consideradas por otros autores que han abordado las cuestiones simbólicas en el ámbito de la enseñanza de la

Matemática, con una perspectiva didáctica (Gómez Granell, 1989; Pimm, 1990; Rojano, 1994; Goldin y Kaput, 1996; Palarea Medina, 1999; Alcalá, 2002; Serrano Gómez, 2005; Rodríguez y Zeballos, 2014; Chalé-Can, Font y Acuña, 2017).

La consideración de estos tres elementos condujo a la identificación de las siguientes prácticas matemáticas ligadas a la construcción de significado de un símbolo:

- Identificar en forma escrita u oral el vocablo asociado a un símbolo dado, o, recíprocamente, representar en forma escrita el símbolo asociado a un vocablo dado.
- Escribir una proposición de manera simbólica, respetando las reglas de sintaxis asociadas a los símbolos utilizados.
- Decidir si una expresión simbólica dada está correctamente escrita de acuerdo con las reglas de sintaxis de los símbolos empleados.
- Determinar el valor de verdad de una proposición dada de manera simbólica.
- Efectuar conversiones entre representaciones realizadas en el registro simbólico-algebraico y el registro coloquial.

La primera práctica mencionada está ligada al hecho básico de conocer el símbolo. De manera casi trivial, esta práctica resulta el paso inicial en el proceso de construcción de significado, ya que cualquier otra práctica que implique la utilización del símbolo en cuestión, no sería posible sin la identificación del correspondiente grafismo y sin la asociación con el vocablo del lenguaje coloquial que lo identifica.

La segunda y la tercera de las prácticas enumeradas están vinculadas al aspecto sintáctico, pues aluden al conocimiento de la estructura formal de la sintaxis asociada a un determinado símbolo. Estas prácticas suponen tanto identificar la secuencia correcta en la formulación de una expresión en la que participa el símbolo, como así también el rol que ejerce cada uno de los restantes símbolos que constituyen una expresión. Se las puede relacionar con la actividad cognitiva definida por Duval (2004) como '*formación de representaciones*' puesto que, según este autor, esta actividad cognitiva requiere efectuar o constatar la selección de símbolos apropiados dentro del registro en el que se forma la representación (en este caso el registro simbólico-algebraico) y combinarlos de acuerdo con las reglas de conformidad de dicho registro.

Finalmente, las dos últimas prácticas están ligadas a la cuestión semántica, es decir a la comprensión del contenido de la expresión simbólica. En particular, las conversiones mencionadas son esenciales en tareas de lectura pues, para interpretar el contenido semántico de una expresión, no resulta suficiente con la decodificación símbolo a símbolo.

3.2. Funciones semióticas definidas

Como componentes del significado, las prácticas matemáticas conducen a asociaciones de objetos.

La primera de las prácticas anteriores implica la asociación del grafismo del símbolo con el vocablo de la lengua natural que lo identifica. Las prácticas ligadas a la estructura formal de una expresión simbólica en la que aparece determinado símbolo, requieren la asociación del símbolo con la estructura sintáctica vinculada al uso de dicho símbolo. Las prácticas vinculadas con la comprensión del contenido semántico de una expresión simbólica implican, por un lado, asociar la proposición simbólica con su valor de verdad, y por otro, asociar la expresión simbólica y una expresión coloquial equivalente.

Estas asociaciones pueden representarse a través de funciones semióticas, que vinculan los distintos objetos involucrados en las prácticas matemáticas descritas. Se definieron tres funciones semióticas, a las que se denominó *principales*:

- F1: relaciona el símbolo con el vocablo de su denominación.
- F2: relaciona el vocablo/símbolo con la estructura sintáctica de la expresión que lo contiene.
- F3: relaciona la proposición en la que está presente el símbolo, con su valor de verdad, el cual depende también de los significados de los operandos involucrados.

Las funciones semióticas definidas, de acuerdo a los elementos que vinculan y a las prácticas matemáticas implicadas, pueden clasificarse como: *nominal* (F1), *sintáctica* (F2) y *semántica* (F3).

En la figura 1 se representan estas funciones semióticas principales, detallando en cada caso el antecedente y el consecuente.

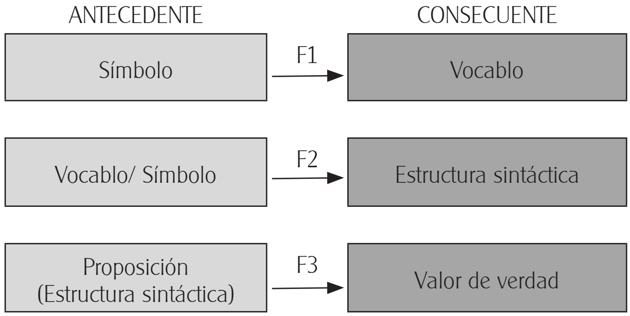


Figura 1. Funciones semióticas principales ligadas a la construcción de significado de un símbolo.

Para analizar las trasformaciones de expresiones entre el registro de la lengua natural o coloquial y el registro simbólico-algebraico se definieron funciones semióticas específicas. Se les denominó:

- F_{cs}: correspondiente a las conversiones del registro coloquial al simbólico.
- F_{sc}: correspondiente a las conversiones del registro simbólico al coloquial.
- F_t: correspondiente al tratamiento, que debe efectuarse en el registro coloquial, la cual es interna a dicho registro.

Estas funciones semióticas se representan en la figura 2, detallando su antecedente y su consecuente.

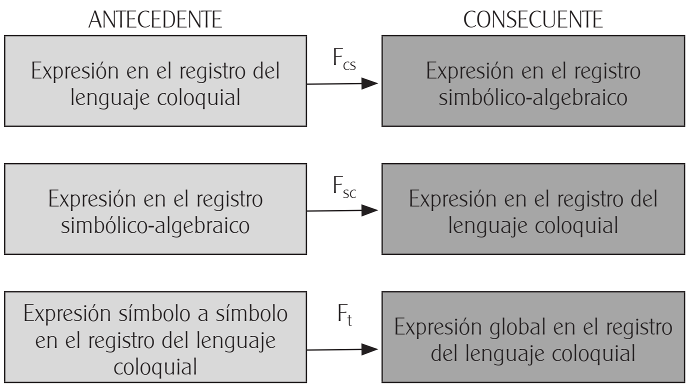


Figura 2. Funciones semióticas relativas a las conversiones y tratamientos

Las funciones semióticas definidas tuvieron incidencia en el diseño del instrumento construido para la recolección de datos y constituyeron una potente herramienta para el análisis.

3.3. Instrumento

Para la recolección de datos se construyó un instrumento *ad-hoc*, cuyo proceso de diseño estuvo formado por tres versiones sucesivas, con cada una de las cuales se tomó una muestra de datos. En el Anexo se presenta el protocolo de la tercera y última de las versiones, en el que pueden verse los enunciados de cada uno de los ejercicios que lo componen. Las actividades que se incluyeron están basadas en las prácticas matemáticas identificadas y en las correspondientes funciones semióticas cuya manifestación se pretende evaluar.

Entre las consideraciones que se tuvieron en cuenta en el diseño del instrumento, una de ellas estuvo focalizada en el contenido matemático representado. Se consideró el hecho de que el contenido matemático al que cada expresión refiere podía interferir en la información que se deseaba obtener en relación con el manejo del símbolo. Es decir, podría suceder que un estudiante no conociera el contenido matemático representado en una expresión simbólica y que ese desconocimiento afectara su desempeño en la resolución de la tarea, provocando algún tipo de error o, incluso, la omisión de la resolución. Esto provocaría una distorsión en la información −respecto de la cuestión simbólica− que se obtuviera de su respuesta, pues en muchos casos no se podría identificar con certeza el origen del error cometido. Con la intención de evitar esta situación, todas las expresiones utilizadas en el instrumento refieren a unidades temáticas que se imparten en la escuela secundaria, de modo que el contenido matemático al que cada expresión refiere no resulte un obstáculo en la comprensión de la misma.

En el Ejercicio 1, se solicita la escritura de la expresión coloquial correspondiente a cada uno de los símbolos en estudio, lo que permite evaluar la función semiótica F1. También se requiere la formulación de un ejemplo de uso del símbolo, lo cual está destinado a evaluar la función semiótica F2, en una tarea de escritura. Con el objetivo de evitar que se formularan como ejemplo expresiones tales como '$x \in R$' o como '$p \wedge q$', en las que el uso de literales no permite conocer con certeza a qué objetos hace referencia el estudiante, se incluyó en el enunciado la condición de que el ejemplo dado fuera verdadero, de modo que los ejemplos fueran proposiciones. Esto permite evaluar, por un lado, el rol que juega cada uno de los símbolos que intervienen en la expresión en relación a la sintaxis (F2) y, por otro, la función semiótica relativa a la asignación del valor de verdad (F3), en una expresión generada por el estudiante.

En el Ejercicio 2, se pretende evaluar la función semiótica correspondiente a la sintaxis (F2), tanto en una tarea de lectura (necesaria para la decisión de responder si la expresión está erróneamente formulada) como en una tarea de escritura (al momento de reescribir aquellas expresiones que el alumno considere como incorrectamente escrita). En este ejercicio se incluyó tanto un ítem correctamente formulado, como uno que no lo está, para cada uno de los símbolos en estudio, los cuales no siguen un orden para evitar una automatización en las respuestas.

En el Ejercicio 3 se presentan algunas expresiones simbólicas para ser convertidas al lenguaje coloquial. También se solicita la determinación del valor de verdad de dichas expresiones y la justificación de esta última respuesta. Estas tareas permiten evaluar la manifestación de las funciones semióticas correspondientes a la conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial, al tratamiento en el registro coloquial y a la determinación del valor de verdad de una expresión dada.

En el Ejercicio 4 se requiere efectuar conversiones desde el registro coloquial al registro simbólico-algebraico. En este caso se evalúan las funciones semióticas correspondientes a este tipo de transformaciones.

Las funciones semióticas definidas no sólo se tuvieron en cuenta para el diseño y análisis de cada ejercicio, sino que también determinaron aspectos cuantitativos del relevamiento de datos. Para cada estudiante se consignó si se observaba, o no, la manifestación de cada una de las funciones semióticas involucradas en cada ítem. Esto dio lugar a la definición de 54 variables dicotómicas, asociadas a la manifestación de las funciones semióticas y a los distintos ítems, mediante las cuales se registraron los datos provenientes de las respuestas de cada estudiante. En la tabla 1 se presentan las funciones semióticas que se pretenden evaluar en cada ejercicio, de acuerdo a la tarea propuesta en cada uno de ellos. También se muestra la codificación con la que se identificó a cada función semiótica en los análisis posteriores.

Tabla 1. Funciones semióticas evaluadas en cada tipo de tarea propuesta.

Ejercicio	Función semiótica	Tarea	Código
1	F1	Determinar cómo se lee el símbolo	F1
	F2	Escritura sintácticamente correcta del ejemplo	F2-Ejem
	F3	Determinar del valor de verdad de la expresión propuesta como ejemplo	F3-Ejem
2	F2	Determinar que una expresión dada es sintácticamente correcta	F2-Fác
	F2	Detectar el posible error de sintaxis y reformular la expresión de manera sintácticamente correcta	F2-Dif
3	F_{sc}	Efectuar la conversión del registro simbólico al coloquial	F_{sc}
	F_t	Obtener una oración que manifieste la idea global representada en la expresión simbólica	F_t
	F3	Determinar el valor de verdad de cada expresión simbólica dada	F3-v/f
4	F_{cs}	Efectuar la conversión del registro coloquial al simbólico	F_{cs}

3.4. Muestra y aplicación del instrumento

La versión final del instrumento fue aplicada a 90 estudiantes de las carreras de Ingeniería, Profesorado en Matemática, Bioquímica y Licenciatura en Ciencias Biológicas, de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, dispuestos a formar parte de la investigación.

Se consideraron carreras que contienen la asignatura Álgebra en el primer año de su plan de estudios. Entre ellas, fueron seleccionadas aquellas en las que fue posible el acceso de los investigadores a sus estudiantes, dado que los docentes a cargo de las correspondientes cátedras permitieron la entrada a sus respectivas aulas y cedieron tiempo de sus clases para la toma de datos. Si bien en cada una de las carreras contempladas el "peso" de las materias de Matemáticas en el plan de estudios es distinto, las prácticas matemáticas que se evalúan en el instrumento son básicas y comunes a todas ellas.

Se tomó una muestra intencional de estudiantes, a los que se les solicitó la resolución del instrumento. La intencionalidad de la muestra consiste en la selección de estudiantes que cursan la primera asignatura del área Álgebra en el plan de estudios de las carreras mencionadas. Esta decisión estuvo basada en el hecho de que en esta área se emplean con más frecuencia los símbolos en estudio y, por consiguiente, estos estudiantes debían estar atravesando el proceso de construcción de significado de dichos símbolos.

La composición de la muestra quedó formada de la siguiente manera:

- Ingeniería: 43 estudiantes
- Licenciatura en Ciencias Biológicas: 10 estudiantes.
- Profesorado en Matemática: 16 estudiantes
- Bioquímica: 20 estudiantes

El instrumento fue aplicado, en todos los casos, en la semana siguiente al primer examen parcial de la asignatura de cada carrera. Esta decisión estuvo basada en la necesidad de que los estudiantes ya hubieran pasado por una etapa de estudio más intensa destinada a rendir dicho examen. El tiempo de resolución por parte de los estudiantes fue de 25-30 minutos.

3.5. Partición de los datos y cálculo de las proporciones

Una vez relevados los datos, se indagó sobre la existencia de una secuenciación u orden en el que se manifiestan como construidas las distintas funciones semióticas que se evalúan en las tareas que componen el instrumento. Para ello, se procedió a agrupar los datos obtenidos para cada uno de los símbolos en estudio para, posteriormente, indagar si existen características comunes. Para agrupar los datos se siguieron una serie de pasos que se describen a continuación.

PASO 1: Se agruparon los resultados de los ítems correspondientes a las evaluaciones de las funciones semióticas de cada uno de los seis símbolos estudiados, en seis planillas Excel, y se las codificó como se muestra en la tabla 1. En cada fila se volcaron los datos de cada estudiante.

PASO 2: En cada una de las seis planillas se calculó, para cada estudiante, la *proporción* entre las funciones semióticas establecidas y las funciones semióticas involucradas, mediante el siguiente cociente:

(Cantidad de funciones semióticas establecidas) / (Total de funciones semióticas para el símbolo)

En cada una de las planillas, se reordenaron las filas con los datos de los estudiantes, tomando como criterio la proporción obtenida, en orden ascendente.

PASO 3: A partir del ordenamiento realizado se observó que los estudiantes que presentan la misma proporción no necesariamente manifiestan el establecimiento de las mismas funciones semióticas. Esto condujo a plantear si era posible realizar agrupamientos de estudiantes respecto de los cuales se pudiera establecer algún tipo de caracterización.

Para formar los grupos se efectuaron sucesivas particiones arbitrarias. En cada instancia, se formaron grupos con los estudiantes que hubieran obtenido un determinado rango de valores en la proporción computada. En cada grupo se calculó, para cada función semiótica, el porcentaje de miembros del grupo que manifestara esa función. El criterio que marcaba la partición entre un grupo y el siguiente era la comprobación de aumento del porcentaje de alumnos en alguna de las funciones semióticas.

A modo de ejemplo, y para clarificar los cálculos detallados en este paso, en la tabla 2 se expone un extracto de la planilla correspondiente al cuantificador existencial. En la misma se presentan los tres primeros grupos de la partición realizada. Puede notarse el aumento de porcentajes en la mayoría de las funciones semióticas al pasar de un grupo al siguiente.

Tabla 2. Extracto de la planilla del cálculo de proporciones y porcentajes para el símbolo ∃

Alumno	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-Fác	Ft -Fác	F3-v/f-Fác	Fsc-Lóg	Ft-Lóg	F3-v/f-Lóg	F_{cs}	Proporción	Grupo
33	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,25	
49	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0,25	
18	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0,33	
25	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0,33	1
45	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0,33	
83	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0,33	
87	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0,33	
Porcentaje	**100**	**0**	**0**	**43**	**43**	**86**	**0**	**0**	**71**	**0**	**14**	**14**		

Alumno	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-Fác	Ft -Fác	F3-v/f-Fác	Fsc-Lóg	Ft-Lóg	F3-v/f-Lóg	F_{cs}	Proporción	Grupo
14	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0,42	
34	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,42	
43	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0,42	
44	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,42	
47	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0,42	
55	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0,42	
63	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,42	
82	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,42	
3	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0,50	
4	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0,50	
5	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50	
9	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0,50	
12	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0,50	
13	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50	2
19	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,50	
23	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0,50	
31	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50	
50	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0,50	
53	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0,50	
68	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,50	
70	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0,50	
71	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0,50	
74	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0,50	
76	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0,50	
78	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0,50	
81	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50	
84	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,50	
Porcentaje	**100**	**22**	**11**	**30**	**93**	**96**	**4**	**37**	**93**	**7**	**37**	**41**		

Alumno	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-Fác	Ft -Fác	F3-v/f-Fác	Fsc-Lóg	Ft-Lóg	F3-v/f-Lóg	F_{cs}	Proporción	Grupo
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0,58	
2	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58	
17	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0,58	
27	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	
32	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58	
36	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58	
38	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0,58	
40	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	3
42	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,58	
46	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0,58	
51	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58	
59	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0,58	
65	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	
73	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0,58	
79	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	
89	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	
Porcentaje	**100**	**25**	**13**	**31**	**94**	**94**	**13**	**63**	**100**	**6**	**75**	**88**		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

PASO 4: Una vez obtenidas las particiones, el propósito fue identificar y determinar qué funciones semióticas caracterizan a cada grupo, es decir, cuáles son las funciones semióticas que fueron manifestadas por la mayoría de los estudiantes en cada grupo. Se consideró que esa mayoría podía ser considerada, arbitrariamente, por un porcentaje mayor o igual al 70%, considerando que este porcentaje contempla casi a las tres cuartas partes de los estudiantes incluidos en cada grupo.

4. RESULTADOS

A partir de los pasos descritos en la sección anterior, se determinaron las funciones semióticas que se manifiestan como construidas por 70% de los estudiantes de cada grupo. En las tablas 3 a 8 se representan los datos obtenidos marcando con un fondo gris aquellas funciones manifestadas por, al menos, 70% del grupo.

Por ejemplo, en la tabla 3, correspondiente a los datos del símbolo de pertenencia, puede observarse que la primera fila corresponde al grupo 1. Para este grupo, puede leerse que 70%, o más, de los estudiantes de este grupo manifestaron la función F1y la función F2 evaluada, en tanto que las restantes funciones no se manifestaron como logradas por un porcentaje relevante de estudiantes.

En la segunda fila, correspondiente al grupo 2, las cuatro primeras funciones semióticas consideradas aparecen manifestadas en 70% de los estudiantes o más. Debe observarse que en este grupo la manifestación de la función semiótica evaluada en los ítems codificados como F2-Ejem y F3-Ejem, aparecen por primera vez, manifestados por 70% o más de los estudiantes.

En la fila del grupo 3 aparece en color gris por primera vez la función semiótica que corresponde a uno de los ítems del Ejercicio 2 considerado como difícil (F2-Dif1). Finalmente, en la última fila, que corresponde al grupo de estudiantes que obtuvo la máxima proporción de funciones semióticas consideradas para este símbolo, se observa que la totalidad de las mismas aparecen manifestadas.

Tabla 3. Manifestación de cada función semiótica para el símbolo ∈

Grupo \ Código del ítem	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif 1	F2-Dif 2
1						
2						
3						
4						

De manera análoga pueden interpretarse las Tablas 4 a 8 correspondientes a los restantes símbolos estudiados.

Tabla 4. Manifestación de cada función semiótica para el símbolo ⊂

Código del ítem / Grupo	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif 1	F2-Dif 2
1						
2						
3						
4						
5						

Tabla 5. Manifestación de cada función semiótica para el símbolo ∀

Código del ítem / Grupo	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc -1	Ft -1	F3-v/f-1	Fsc -2	Ft -2	F3-v/f-2	Fcs-1	Fcs-2
1													
2													
3													
4													
5													
6													

Tabla 6. Manifestación de cada función semiótica para el símbolo ∃

Código del ítem / Grupo	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-1	Ft -1	F3-v/f-1	Fsc-2	Ft-2	F3-v/f-2	Fcs
1												
2												
3												
4												
5												
6												

Tabla 7. Manifestación de cada función semiótica para el símbolo ∧

Código del ítem / Grupo	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc	Ft	F3-v/f	Fcs-1	Fcs-2
1										
2										
3										
4										
5										

Tabla 8. Manifestación de cada función semiótica para el símbolo ∨

Código del ítem / Grupo	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc	Ft	F3-v/f	Fcs
1									
2									
3									
4									
5									

La observación de las tablas anteriores permitió realizar, para cada uno de los símbolos, una descripción de las funciones logradas en cada grupo de cada partición y su diferenciación respecto del grupo siguiente. Esto generó un nuevo interrogante: ¿Existe algún orden o secuencia de aparición de cada función semiótica para cada uno de los símbolos en estudio? Con el objetivo de responder a esta pregunta, se volcaron todos los resultados en una misma tabla, tabla 9, para comparar y analizar si se repite la secuencia de aparición, buscando algún posible patrón en la manifestación de las funciones semióticas de todos los símbolos en estudio.

Tabla 9. Manifestación de las funciones semióticas en cada grupo para cada símbolo

Símbolo	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Aparición de las funciones semióticas en cada grupo	• F1 F2-Fác	• (Nada)	• F1 F2-Fác	• F1 Fsc-1 Fsc-2	• F1 Fsc	• F1 Fsc
	• F2-Ejem F3-Ejem	• F1 F2-Fác	• Fsc-1 Fsc-2	• F2-Fác	• F2-Fác Fcs-1 F3-v/f	• F2-Fác Fcs
	• F2-Dif 1	• F2-Ejem F2-Dif 1	• Fcs-1 Fcs-2	• F3-v/f-1 Fcs	• F2-Ejem F3-Ejem	• F2-Ejem
	• F2-Dif 2	• F3-Ejem	• F2-Ejem F3-Ejem F3-v/f-2	• F3-v/f-2	• Fcs-2	• F3-Ejem F3-v/f
		• F2-Dif 2	• Ft-1 F3-v/f-1	• F2-Ejem F2-Dif F3-Ejem	• F2-Dif Ft	• F2-Dif Ft
			• F2-Dif Ft-2	• Ft-1 Ft-2		

La tabla 9 permite efectuar una observación conjunta sobre todos los símbolos a la vez, en busca de algún patrón o similitud en la secuencia de aparición de las funciones semióticas analizadas. Al cotejar las columnas puede decirse que, en principio, no hay una secuencia idéntica entre las funciones de cada uno de los seis símbolos estudiados. Sin embargo, hay una semejanza en el orden en que se manifiestan las funciones semióticas que permite entrever cierta secuenciación, como se detalla a continuación:

- F1: Es la primera en manifestarse como establecida, para todos los símbolos, dado que aparece siempre en el primer grupo. Al momento de definirla, se supuso a esta función semiótica como necesaria para la construcción de las restantes. El resultado observado en la tabla 9 estaría reafirmando la suposición, dado que para todos los símbolos en estudio se detecta que esta función se manifiesta como construida por 70%, o más, de los alumnos del primer grupo de todas las particiones efectuadas.
- F2-Fác: El reconocimiento de la adecuación sintáctica de una expresión dada se evaluó, para todos los símbolos, con una expresión que está correctamente formulada y con otra que no lo está. Esta función semiótica corresponde al caso del reconocimiento de una expresión cuya sintaxis es correcta, y es la más sencilla de las dos tareas planteadas. La escasa dificultad en la tarea podría ser la razón de su temprana manifestación en esta secuencia, pues en todos los casos aparece a la par de la función F1 o en el grupo siguiente.
- F_{SC}: Esta función semiótica corresponde a las conversiones desde el registro simbólico-algebraico al coloquial. Para los símbolos en los que fue evaluada, la función se manifiesta en el mismo grupo que la función de reconocimiento de la sintaxis de una expresión o en el grupo siguiente, razón por la cual aparece siempre en el primer o segundo grupo de cada partición. El hecho de que este tipo de conversión aparezca como establecida en los primeros grupos de las particiones puede deberse a dos razones. En primer lugar, esta función se consideró como manifiesta aun para los casos en que la conversión fuera del tipo "símbolo a símbolo" (como una simple decodificación) y, en segundo lugar, que para efectuar este tipo de conversiones ("símbolo a símbolo") sería suficiente con tener establecidas las funciones F1 de cada uno de los símbolos que participa de la expresión dada.
- F_{CS}: Esta función semiótica corresponde a las conversiones desde el registro coloquial al simbólico-algebraico. Para su establecimiento intervienen las funciones F1 de cada uno de los símbolos intervinientes (para asociar el vocablo al símbolo correspondiente) y también la función semiótica relativa a la sintaxis (F2) para obtener una expresión bien formada.

Para todos los símbolos, se observa que esta función aparece manifiesta en grupos posteriores a aquellos en los que se evidenció la función de conversión en el sentido inverso (F_{sc}). Es conocido que las conversiones entre los mismos registros semióticos suelen implicar distinto nivel de dificultad según el registro de partida y de llegada (Duval, 2006). En este caso particular, la aparición de esta función en grupos posteriores a los de la conversión en sentido inverso se presenta como de mayor dificultad. La razón a la cual puede adjudicarse que resulte más difícil para los estudiantes podría ser que, en este sentido de conversión (del registro coloquial al simbólico), interviene la sintaxis correspondiente a los símbolos involucrados en la expresión.

También se advierte que esta función semiótica se observa como establecida en grupos anteriores a los que se manifiesta la función correspondiente a la sintaxis en una expresión propuesta por el estudiante (F2-Ejem). Esto podría deberse al hecho de que la oración coloquial dada, que debe convertir a una expresión simbólica, resulta una guía para el estudiante y, en cierta manera, le está mencionando los elementos u objetos que deben integrar la expresión simbólica. Si el alumno tiene construida la función semiótica correspondiente a la sintaxis de esos símbolos, podrá efectuar la conversión, sin la necesidad de tomar la decisión de seleccionar una situación en la que sea pertinente utilizar el símbolo, como sucede en el caso de la formulación de un ejemplo.

- F2-Ejem: Esta función semiótica corresponde a la adecuación de la sintaxis de un determinado símbolo en una expresión que es generada totalmente por el estudiante a modo de ejemplo de uso. Es por esto que, en este caso, además de la dimensión sintáctica del símbolo, interviene fuertemente la dimensión pragmática, lo que podría ser la razón de la aparición más tardía de esta función semiótica, que se posiciona –en general– de la mitad de la lista en adelante, para cada uno de los símbolos, en la tabla 9.
- F3-v/f: Esta función semiótica corresponde a la adecuación de la determinación del valor de verdad de una expresión simbólica dada. Se manifiesta como construida por los estudiantes de los grupos intermedios de la tabla 9, y a la par –o antes– que la función semiótica correspondiente a la determinación del valor de verdad de una expresión construida por el propio alumno (F3-Ejem). Esto último podría deberse a que, en el caso del ejemplo, esta función está ligada directamente a la de la sintaxis, puesto

que no es posible determinar el valor de verdad de una expresión que fuera sintácticamente incorrecta.

- F3-Ejem: Esta función semiótica corresponde a la adecuación de la determinación del valor de verdad de una expresión que es generada totalmente por el estudiante a modo de ejemplo de uso de algún símbolo en particular. En general, aparece a la par que la función semiótica correspondiente a la sintaxis de esa expresión (F2-Ejem), aunque en algunos casos aparece después, lo que la hace suponer de un nivel de dificultad mayor.
- F2-Dif: Esta función corresponde a la identificación de una sintaxis incorrecta para una expresión dada y su adecuada reformulación para la obtención de una expresión bien formada. Se presenta como de mayor grado de dificultad, pues su aparición se observa en el último o anteúltimo de los grupos, para todos los símbolos. Detectar un error de sintaxis es una tarea dificultosa en sí misma, pues requiere de un muy buen manejo de la sintaxis. Además, la dificultad puede radicar en el hecho de que, en algunos ítems, intervienen las funciones semióticas relativas a la sintaxis de dos símbolos distintos–una para la detección del error y otra para la reescritura– o bien que la función semiótica correspondiente a la sintaxis debe ser utilizada dos veces, una para la tarea de lectura, en la que se detecte el error, y otra para la tarea de escritura, en la que se reformula la expresión para convertirla en bien formada.
- Ft: Esta función semiótica, correspondiente al tratamiento en el registro coloquial, aparece como la de mayor dificultad para los estudiantes, pues en todos los casos se manifiesta en el último grupo de las particiones. Si bien esta función semiótica no está directamente asociada a los símbolos, pues se establece entre expresiones del registro coloquial, tiene estrecha relación con la dimensión semántica. La expresión obtenida a través del tratamiento sería la que más se asemeja a las expresiones utilizadas en el lenguaje oral y en la forma en que se desarrolla el discurso interno en el pensamiento de un individuo. Esto la liga a la comprensión que el estudiante tiene del contenido semántico de la expresión.

5. CONCLUSIONES

Del análisis realizado a partir de los datos recolectados, se observó cierta secuenciación en la manifestación de las funciones semióticas que intervienen en las tareas propuestas en los distintos ejercicios del instrumento. Esa especie de orden se presenta, con cierta similitud, para todos los símbolos estudiados, lo que condujo a pensar que podría representar un orden en el establecimiento de las funciones semióticas que intervienen en el proceso de construcción de significado de símbolos matemáticos. Dicha secuenciación u orden constituye una caracterización en el proceso de significación de estos símbolos. En términos de las tareas que se realizan, la secuencia observada puede formularse así:

- Asociación entre el símbolo y el vocablo: Es la más elemental de las tareas y trivialmente necesaria para efectuar cualquier otra tarea con el símbolo.
- Reconocimiento de la adecuación de la sintaxis en una expresión que está correctamente formulada: es una tarea elemental pues no requiere que el estudiante posea mucha seguridad en la estructura sintáctica ya que la expresión está correctamente formulada.
- Conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial: Esta tarea requiere, básicamente, de la asociación de cada uno de los símbolos con un vocablo del lenguaje coloquial. Si se la considera como efectuada aun en los casos en los que sea realizada en la forma ‘símbolo a símbolo’, la tarea tiene escasos requerimientos y esa podría ser la razón de su temprana aparición en la secuencia.
- Conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico: Para efectuar esta tarea se requiere, además de la asociación entre el vocablo y el símbolo, el manejo de la sintaxis en el registro de llegada, para obtener una expresión bien formada en el registro simbólico-algebraico. El hecho de que tenga injerencia la sintaxis en el registro simbólico-algebraico le otorga a estas conversiones un grado de dificultad más alto.
- Adecuación de la sintaxis de una expresión generada por el estudiante: La formulación de una expresión simbólica por parte del estudiante se presenta como de un grado de dificultad mayor. Igual que en la tarea anterior, la cuestión sintáctica tiene una participación central. Sin embargo, en este caso el aumento de la dificultad podría deberse a que es el propio estudiante el que debe construir la expresión en el registro coloquial

(probablemente en forma mental) y posteriormente efectuar también una conversión partiendo de la expresión coloquial que haya pensado, decidiendo qué símbolos requiere la expresión y la adecuación de la sintaxis con la que los combine en la expresión que escriba. Esta situación es la que se presenta cuando el estudiante escribe la resolución de un ejercicio. En una clase de Álgebra, una de las primeras tareas que se le demanda al estudiante es la resolución de ejercicios que implican escribir expresiones simbólicas, tales como efectuar demostraciones. Dado que las funciones semióticas que se requieren se construyen de manera tardía en el proceso de significación, esas tareas resultan de gran dificultad para los estudiantes y podría ser la razón por la que cometen tantos errores al expresar sus ideas en las resoluciones.

- Determinación del valor de verdad de una expresión simbólica dada: Esta tarea se manifiesta antes que aquellas en las que interviene fuertemente la sintaxis y también antes que la determinación del valor de verdad de una expresión formulada por el propio estudiante. Podría interpretarse que la comprensión del contenido semántico de una expresión dada se lograría antes que la habilidad ligada a la sintaxis, al menos para expresiones dadas. Esto podría estar indicando que la comprensión en la lectura de expresiones simbólicas sería previa a la habilidad de la escritura de estas expresiones, que implican el manejo de la sintaxis.
- Determinación del valor de verdad de una expresión generada por el estudiante: La habilidad para efectuar esta tarea se manifiesta al mismo tiempo, o inmediatamente después, que la correspondiente a la de generar una expresión sintácticamente adecuada. Esto podría deberse a que, de acuerdo con el ejercicio planteado en el instrumento, no es posible analizar la determinación del valor de verdad de una expresión que no está correctamente formulada. Esa también podría ser la razón por la que, en algunos casos, se manifiesta después que la determinación del valor de verdad de una expresión simbólica ya dada.
- Reconocimiento de errores sintácticos en una expresión simbólica y su reformulación: Esta tarea aparece entre las de mayor dificultad. En ella interviene fuertemente el aspecto sintáctico, pues la detección de un error requiere de alto manejo de la sintaxis asociada a los símbolos que intervienen en la expresión, así como también para la correcta reformulación que subsane el error.

- Tratamiento en el registro coloquial: Se presenta entre las últimas logradas y es posterior a la conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial. Si bien corresponde a un tratamiento interno al registro coloquial, es muy importante para las tareas de lectura de expresiones simbólicas, pues está directamente relacionada con la comprensión del contenido semántico de la expresión simbólica a la que se le haya efectuado la conversión. Por ende, está vinculada a la compresión que el estudiante tiene de una expresión simbólica que lee en el material bibliográfico al cual accede para estudiar.

Esta secuenciación permite observar, de manera desagregada, el proceso de construcción de significado de símbolos matemáticos, en estudiantes universitarios. Su aporte puede resultar una guía para el diseño de una posible intervención didáctica destinada a que los estudiantes desarrollen sus habilidades en relación a las distintas prácticas matemáticas que están vinculadas a los símbolos que se utilizan en la asignatura. Las tareas que se propongan a los estudiantes en esa posible intervención pueden ser diseñadas tomando como base los ejercicios que constituyen el instrumento (ver Anexo) con el que se recolectaron los datos para esta investigación, sumadas a cualquier otro tipo de tareas que pongan en juego las prácticas matemáticas identificadas como parte del significado de un símbolo matemático. Los antecedentes en la literatura afirman que destinar un tiempo, aunque sea breve, a la formación en el manejo de símbolos, tiene un resultado exitoso (Distéfano, Urquijo y González, 2010; Lacués Apud, 2011, 2014). Favorecer en los estudiantes el desarrollo de las prácticas matemáticas que están asociadas a la construcción de significado de los símbolos, puede darles una herramienta básica para desempeñarse satisfactoriamente en tareas de lectura y escritura de expresiones simbólicas.

REFERENCIAS

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona, España: Grao.

Bardini, C. & Pierce, R. (2015). Assumed Mathematics Knowledge: the Challenge of Symbols. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 23(1), 1-9.

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. Disponible en: http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf. Recuperado: 12/08/10.

Camós, C. y Rodríguez, M. (2009). *Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de Matemática superior.* Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VI CIBEM). Puerto Montt, Chile. Disponible en:
http://ebookbrowse.com/articulo-camos-rodriguez-texto-completo-pdf-d36067393

Chalé-Can, S. Font, V. y Acuña, C. (2017). La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4 (3), 99-110.

Colombano, V., Formica, A. y Camós, C. (2012). Enfoque cognitivista. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 115-152). Los Polvorines, Argentina: EDUVIM y Ediciones UNGS.

Distéfano M. L., Urquijo, S. y González, S. (2010) Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 59-71.

Distéfano, M.L., Pochulu, M. y Font, V. (2015). Análisis de la Complejidad Cognitiva en la Lectura y Escritura de Expresiones Simbólicas Matemáticas. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 4(3), 202-233. DOI: 10.4471/redimat.2015.1568

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103-131.

Fernández Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 34 (1), 53-71.

Güçler, B. (2014). The role of symbols in mathematical communication: the case of limit notation. *Research in Mathematics Education*, 16 (3), 251-268. DOI: 10.1080/14794802.2014.919872

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* 27 (2), 221-252.

Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, and B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397–430). Hillsdale, U.S.A.: Erlbaum.

Gómez Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y la significación. *Comunicación, lenguaje y educación*, 3-4, 5-16.

Herrera López, H., Cuesta Borges, A. y Escalante Vega, J. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educación Matemática*, 28 (3), 217-240.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 333-355.

Lacués Apud, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac*, 55-56, 29-35.

Lacués Apud, E. (2014). Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo. *Bolema*, 28(48), 299-318.

Molina González, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis de doctorado, Universidad de La Rioja, España). Disponible en: http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210.

Morris, Ch. (1985). *Fundamentos de la teoría de los signos*. Barcelona, España: Paidós.

Palarea Medina, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, (40), 3-28.

Peirce, Ch. (1986). *La ciencia de la Semiótica*. Buenos Aires, Argentina: Nueva Visión.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid, España: Morata.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias,* 12 (1), 45-56.

Rodríguez-Domingo, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria.* (Tesis de doctorado. Universidad de Granada, España). Disponible en: http://hera.ugr.es/tesisugr/25475368.pdf.

Rodríguez, M. y Zeballos, J. (2014). El aprendizaje de la matemática y sus referencias semióticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27(ALME 27)*, 507-515.

Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2 (2), 61-74.

Serrano Gómez, W. (2005). ¿Qué constituye a los lenguajes natural y matemático?. *SAPIENS*, *6*(1), 47-60.

Socas, M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El álgebra escolar. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, 10, 9-42.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. *Números*, 77, 5-34.

Trigueros, M., Ursini, S. y Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática*, 12 (2), 27-48.

María Laura Distéfano

Dirección: Castelli 3033 3°A, Mar del Plata, Argentina, C.P. 7600.

Teléfono: 54 0223 4731163

ANEXO. Protocolo del instrumento para recolección de datos

3. Complete:

Símbolo	¿Cómo se lee?	Escriba un ejemplo utilizando el símbolo del que se pueda afirmar que es VERDADERO
$\in$		
$\subset$		
$\forall$		
$\exists$		
$\wedge$		
$\vee$		

4. Analice si las siguientes expresiones están BIEN ESCRITAS (independientemente de ser verdaderas o falsas). En caso de no estarlo, escríbala en forma correcta.

Expresión	¿La expresión está BIEN ESCRITA? (SI/NO)	Si la expresión está MAL ESCRITA, escríbala en forma correcta
$-2 \in \mathbb{Z}$		
$3 \subset \mathbb{Z}$		
$\{1 ; 2\} \subset \mathbb{N}$		
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$		
$4 \in \mathbb{N} \wedge -3 < 0$		
$7 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$		
$-5 \wedge 4 \in \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$		

$\forall \mathbb{N} \quad \mathbb{N} > 0$		
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$		
$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ y + 2 = 5$		
$\exists x \in \mathbb{Z} / x < 0$		

5. Exprese coloquialmente (con sus palabras) lo que representa cada una de las siguientes expresiones simbólicas. Indique si es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

Expresión simbólica	Expresión coloquial (con sus palabras)	V-F	Justificación del V-F
$0{,}5 \in \mathbb{Z} \ \vee \ -1 \in \mathbb{Z}$			
$-2 \in \mathbb{Z} \ \wedge \ -1 \in \mathbb{N}$			
$\forall x \ (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x < 0)$			
$\exists x \ (x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0)$			
$\exists x \in \mathbb{N} / 2 < x < 3$			
$\forall x \in \mathbb{N} \ x < x + 1$			

6. Escriba en forma simbólica cada una de las siguientes expresiones coloquiales.

Expresión coloquial	Expresión simbólica
3 es un número entero y positivo	
3 y 5 son números naturales	
4 es un número natural o entero	
Cada número entero es menor que su sucesor	
Algunos números naturales son negativos	
El cuadrado de cualquier número real es positivo o cero	

DOI: 10.24844/EM3101.07

Evaluación de estrategias formativas para mejorar las actitudes hacia las matemáticas en secundaria

Evaluation of training strategies to improve attitudes towards mathematics in secondary

Rosa María González Jiménez[1]

Resumen: Diseñamos, implementamos y evaluamos (proceso y resultados) un programa de formación Actitudes hacia las Matemáticas con perspectiva de Género (PAMG) dirigido a estudiantes de doce escuelas secundarias públicas ubicadas en la Ciudad de México (ocho de ellas vespertinas y con bajas calificaciones en la prueba ENLACE), cuyo propósito fue probar estrategias didácticas para mejorar las actitudes del alumnado hacia las matemáticas, desde una perspectiva de género. El programa consta de cinco estrategias (persuasión, metacognición, conflict cognitive e historia de vida) en nueve actividades didácticas con seis horas de duración. Para evaluarlo construimos una metodología mixta que incluye un análisis interpretativo del proceso (notas y videograbación de las sesiones) y un diseño cuasiexperimental con análisis estadístico (resultados). En lo general, el PAMG cambió positivamente las actitudes de estudiantes en la mitad de las escuelas, según el análisis de algunos factores que incidieron en aquellos grupos que no experimentaron cambios significativos. Cualitativamente identificamos que hablar en primera persona acerca de las matemáticas y buenas relaciones socio-afectivas en el grupo, inciden positivamente en el trabajo en el aula.

Fecha de recepción: 21 de octubre de 2017. **Fecha de aceptación:** 10 de septiembre de 2018.
[1] Universidad Pedagógica Nacional, México. rosamaria@upn.mx orcid.org/0000-0003-1894-1282

Palabras clave: *actitudes; matemáticas; estudios de género; secundaria; intervención.*

Abstract: We design, implement and evaluate (process and results) a training program (pamg) for students of twelve public high schools located in the City of Mexico (eight of them evening and low results in the ENLACE test), whose purpose was to improve and the attitudes of students towards mathematics from a gender perspective. The program consists of five strategies (persuasion, metacognition, conflict cognitive and life history) in nine didactic activities with six hours duration. To evaluate the pamg we build a mixed methodology that includes an interpretive analysis of the process (notes and videotaping of the sessions) and a quasi-experimental design with statistical analysis (results), identifying those specific strategies that positively improved attitudes girls and boys. Qualitatively, we identify that speaking in the first person about mathematics and good social-affective relationships in the group, positively impact on the work in the classroom.

Keywords: *attitudes; mathematics; gender studies; junior high school; intervention.*

INTRODUCCIÓN

Es conocida la baja proporción de estudiantes que ingresan al campo de las matemáticas, en comparación con otras disciplinas (Menchaca, 2000; OCDE, 2016); particularmente, se sabe de la subrepresentación de mujeres matemáticas en estudios superiores (González, 2006; Espinosa, 2010). Como parte de las políticas de género del Instituto Nacional de las Mujeres (Inmujeres), nos invitaron,[2] como expertas, a realizar una intervención cuyo objetivo era mejorar las actitudes de las alumnas de secundaria hacia las matemáticas. El trabajo implicó tres planos articulados: *a)* diseño del programa; *b)* implementación en doce escuelas secundarias, y *c)* evaluación (proceso y resultados), que presentamos en este reporte.

[2] Hace veinte años iniciamos una Especialización en Estudios de Género en Educación en la Universidad Pedagógica Nacional, una de cuyas líneas de investigación es precisamente Género y matemáticas.

Esta intervención la consideramos un ejercicio sistemático y riguroso que nos permitió –además de probar en el *campo* algunas estrategias educativas que trabajamos en la formación de especialistas en estudios de género en educación desde la intersubjetividad y la dimensión afectiva (González, 2002; 2012)– comprender mejor los procesos que inciden en la formación de actitudes hacia las matemáticas. Por lo demás, el programa es un ejemplo, entre otros, que el profesorado puede diseñar cotidianamente en su salón de clase teniendo en cuenta las características de sus estudiantes y el contexto de su escuela, retomando algunas de las estrategias didácticas que probamos y dando rienda suelta a su creatividad.

El aprendizaje de las matemáticas se consideró, por mucho tiempo, como un problema sólo cognitivo. Pero hace más de dos décadas, McLeod (1992), una autoridad en educación matemática, empezó a enfatizar la importancia de los afectos, lo que incrementó el interés de los especialistas por el llamado *dominio afectivo* de la enseñanza, referido a un conjunto de aspectos entre los que se incluyen actitudes, creencias y emociones, constructos que, si bien tocan todos los campos de conocimiento, en educación básica repercuten particularmente en el aprendizaje de las matemáticas (Leder y Forgasz, 2002; Ursini, Ramírez, Rodríguez, Trigueros y Lozano, 2010, y Ursini, Montes, Ramírez y García, 2012).

Hay diferentes perspectivas teóricas acerca de la dimensión emocional;[3] según la nuestra, la dimensión afectiva se fundamenta en el psicoanálisis freudiano[4] (como teoría de la intersubjetividad y la representación-afecto), del cual se deriva una estrategia didáctica específica para trabajar esta dimensión.

DISEÑO Y EVALUACIÓN DE ESTRATEGIAS ACTITUDINALES

Hay dos concepciones encontradas acerca de cómo programar y evaluar estrategias formativas. Por una parte, dicha actividad se concibe como la aplicación de principios susceptibles de ser explicados causalmente, que se interesa por los resultados y utiliza diseños cuasiexperimentales para medir si hubo cambios y en qué sentido (Murillo, 2008). Por otra parte, se entiende como una tarea

[3] Véase la revisión de McLeod (2002) y Gil, Blanco y Guerrero (2005).

[4] A diferencia de otros enfoques que separan lo cognitivo de lo afectivo, para el psicoanálisis la representación (ideas, imágenes o fantasías) está unida al afecto; este último, con una dimensión cuantitativa –más o menos intensa– y otra cualitativa que se manifiesta como placer o displacer (Chiozza, 1998). Cuando la racionalidad falla, surge el afecto.

artística y creativa, imposible de definir en términos de causa y efecto, cuyo interés se centra sobre todo en el sentido, las relaciones y el proceso desde un contexto determinado, valiéndose de un enfoque interpretativo (Arthur, Waring, Coe y Hedges, 2012).

Efectivamente, toda puesta en acto de un programa educativo es singular (en ocasiones, creativa); sin embargo, el diseño de un programa formativo implica algunas regularidades (los objetivos, las estrategias didácticas, la experiencia profesional del docente) y varias situaciones contextuales cambiantes (estudiantes con diferentes *historias de vida*, grupos escolares con distintas relaciones y trayectorias académicas, condiciones materiales del aula, actitudes hacia el aprendizaje, etc.). El profesional de la educación, en diversos contextos y grupos escolares, sabe cómo proceder para que un programa cumpla con los propósitos de formación.

El Inmujeres se interesaba especialmente en un diseño experimental que llegara a la mayor cantidad de estudiantes; a nosotras nos interesaba sobre todo comprender qué ocurría en el proceso, por lo que vinculamos metodológicamente un diseño cuasiexperimental con análisis estadístico (resultados) como un análisis interpretativo (del proceso), articulación no exenta de dificultades[5] que busca acercar posiciones dicotómicas y excluyentes (Bolívar, 2005), respetando la lógica (inducción para el diseño cuasiexperimental y conjetural para la interpretación de los videos considerados *textos*) de cada procedimiento. Por cuestión de espacio, este reporte se centra en el análisis de resultados.

La investigación implicó tres planos reflexivos-programáticos articulados: 1) diseño del Programa de Actitudes hacia las Matemáticas con perspectiva de Género (PAMG), 2) implementación del programa en doce escuelas secundarias de la Ciudad de México y 3) diseño metodológico de la evaluación (proceso y resultados) del PAMG, que a continuación se describen.

1. DISEÑO DEL PROGRAMA

a) Construcción lógico-conceptual del modelo "Cambio de actitudes hacia las matemáticas con *perspectiva de género*".

[5] No ignoramos los principios epistémicos y ontológicos diferentes de una y otra posición.

b) Con base en el modelo anterior, diseño del programa "Actitudes hacia las matemáticas con perspectiva de género" (PAMG), dirigido a estudiantes de 1º de secundaria.

1.1. Fundamentación del PAMG

El diseño de cualquier programa parte del supuesto de que la formación puede incidir en la transformación del alumnado al que se dirige; el cambio lo entendemos en sentido metafórico como "mirar desde otra posición"; esto es, resignificar[6] (las matemáticas, en este caso) y resignificar-se en relación con este saber-hacer. Este segundo aspecto es el que abordamos. Además de revisar la literatura, analizamos semánticamente el concepto de *actitud*, lo que nos permitió formular algunos *supuestos previos* acerca de cómo orientar el cambio que se pretende. Enseguida se presenta una síntesis de algunos fundamentos teóricos del PAMG.

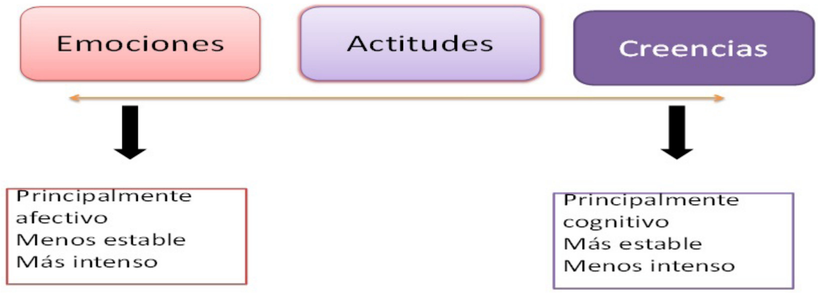
CAMBIO DE ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS

El término actitud se usa para describir la respuesta evaluativa (positiva, negativa, indiferente) de alguien hacia una situación, persona u objeto (Bolívar, 2000). Las actitudes hacia las matemáticas son un constructo multidimensional que incluye convencionalmente, en el caso de estudiantes, sus creencias acerca de las matemáticas como campo de conocimiento (nivel de dificultad y valor o utilidad) o actividad escolar (interesantes, aburridas), los afectos negativos que provoca en algunos de ellos resolver problemas matemáticos (ansiedad), los afectos generados por sus experiencias previas (gusto, disgusto), las convicciones que tienen acerca de su propia capacidad para las matemáticas (autoconcepto) y su tendencia a considerarlas como una actividad intelectual y profesional propia para hombres (estereotipos de género) (Eccles-Parson, Kaczala, Goff y Futterman 1982; González, 2004a).

[6] Trabajamos también con las y los docentes de matemáticas de las secundarias seleccionadas desde la *práctica reflexiva* (saber desde la acción) de Donald Shön (1983); por cuestión de espacio, no se incluye.

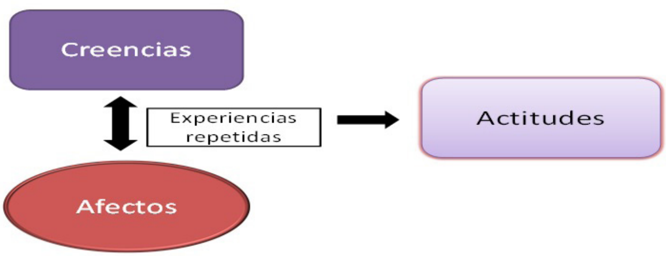
McLeod y McLeod (2002) destacan la confusión conceptual que hay entre actitudes, creencias y afectos, desarrollando un esquema para clasificarlos (figura 1).

Figura 1. Clasificación de conceptos de dominio afectivo



Tanto la información (familia, medios de comunicación) como las experiencias escolares y extraescolares que cada estudiante tiene con las matemáticas van conformando sus creencias respecto a este campo de conocimiento. Sus prácticas en la escuela les generan determinados afectos (gusto, aburrimiento, frustración), los cuales al repetirse llegan a sedimentarse como actitudes que se manifiestan como gusto, rechazo o indiferencia por dicha materia (figura 2). En tanto las actitudes se construyen, son susceptibles de cambio.

Figura 2. Construcción de actitudes



Formulamos la hipótesis de investigación de que si las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado se originaron a partir de ciertas experiencias repetidas –que pudieron no ser positivas al generarles creencias y afectos negativos hacia la disciplina–, tales actitudes pueden cambiar si se ponen en cuestión sus convicciones negativas y se planean prácticas matemáticas que les resulten interesantes, útiles y lúdicas y que los involucren intersubjetivamente.[7]

No debatiremos en este espacio la literatura que, durante décadas, ha intentado aclarar si hay diferencias en pruebas de matemáticas entre mujeres y hombres, ya que consideramos que unas y otros no son comparables: partimos de un concepto de ser humano[8] distante del modelo evolutivo y biológicamente determinado en que se fundamentan las mediciones que comparan personas y comunidades. Por otra parte, dichas diferencias son realmente considerables cuando se valoran condiciones socioeconómicas, carencias en las escuelas, situación étnica o racial (McGraw, Lubienski y Strutchens, 2006) que merecen ser analizadas cuando se traducen en condiciones desfavorables para las mujeres.

La *perspectiva de género* es una forma de abordar la investigación que cuestiona la organización sexual dicotómicamente estructurada, organización que puede incidir en creencias y actuación en contra de las mujeres, a quienes se les atribuyen habilidades innatas para la vida privada (privilegio del sentimiento que favorece el cuidado de menores, enfermos y ancianos) en contraposición con los hombres, a quienes se les adjudican destrezas para el ámbito público (el gobierno, la razón sobre el sentimiento, la construcción y la fuerza física) (González, 2012) y que castiga para ellos mostrar sentimiento y los responsabiliza del sustento familiar.

En educación hay tres líneas de trabajo en relación con las mujeres y las matemáticas: las alumnas *1)* no pueden (cognición); *2)* no quieren (motivación), y *3)* no les interesan (estereotipos). La primera alude a su capacidad, la segunda a falta de interés y la tercera al ámbito cultural. Con el PAMG buscamos estimular su interés y cuestionar algunos estereotipos: *a)* que las matemáticas son un campo de conocimiento propio para varones; *b)* que hasta recientemente las mujeres se iniciaron en este campo de estudio; *c)* que es un saber abstracto, sin relación con la vida cotidiana.

---

[7] La intersubjetividad es acontecimiento, no conciencia; se hace consciente y se integra como experiencia en un segundo momento.

[8] Un ser humano no es, está siendo a partir de su origen comunitario, cultura e historia personal (Ricoeur, 2011). Ser hombre o mujer es una pregunta abierta al otro, sin una respuesta definitiva.

1.2. Programa Actitudes hacia las Matemáticas con perspectiva de Género (pamg)

A partir de este modelo diseñamos el PAMG. Decidimos que no enseñaríamos matemáticas, sino que nos centraríamos en las actitudes hacia las matemáticas incorporando la resolución de problemas (por ejemplo, encriptar un mensaje, decidir qué empresa celular les conviene más). Dimos al programa un enfoque constructivista sociocultural y lo situamos en el diálogo, la intersubjetividad y la estética,[9] delimitando dos competencias: *1)* que el alumnado mejorara sus actitudes hacia las matemáticas (valorado a través de un cuestionario); *2)* que fueran capaces de reconocer a mujeres matemáticas notables, planteándose los siguientes objetivos:

c) Cuestionar la idea de que las matemáticas son difíciles.
d) Presentar el saber matemático como una actividad cultural lúdica y útil.
e) Cuestionar la tipificación de las matemáticas como un campo de estudio propio para varones.

Además de la presentación, encuadre y evaluación, el PAMG integra nueve actividades programadas con una duración aproximada de seis horas (trabajando dos horas por sesión); varios aspectos se cuidaron en el diseño de cada actividad:

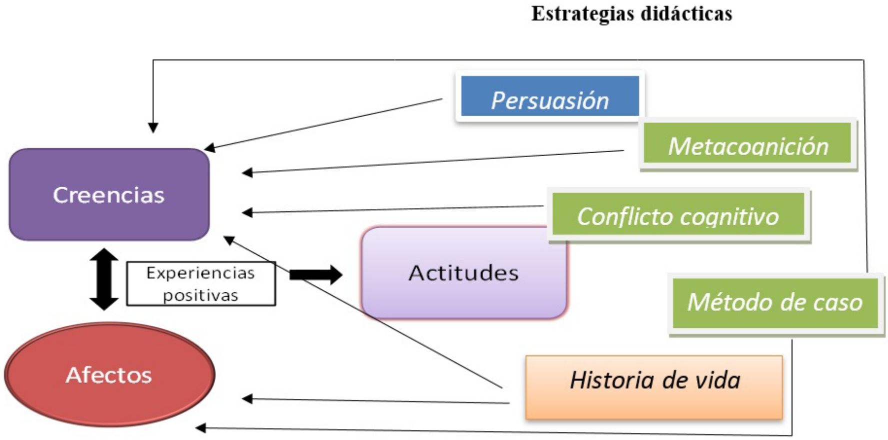
- que el alumnado protagonizara la actividad;
- que se trabajara en equipos y de forma colaborativa;
- que se incluyeran tareas vinculadas con el arte gráfico[10] y aspectos prácticos;
- que tuviera relación directa con su vida cotidiana;
- que fueran actividades lúdicas y les representaran un reto;
- que propiciaran meta-cognición (reflexión, acerca de sus propios pensamientos).

[9] Lo afectivo, lo sensible ha permanecido prácticamente al margen del discurso educativo, a pesar de su omnipresencia en el aula. La *estética*, como la recepción sensible de la expresión humana, abre la puerta a una gama de actividades formativas no sólo en torno al arte, sino especialmente en la recepción que el estudiante hace de la actividad que se le propone.

[10] Comprenden la utilidad de la geometría para representar su pensamiento de forma abstracta.

Se trabajó cada actividad de acuerdo con los objetivos particulares, incorporando diversas estrategias didácticas, algunas dirigidas a las creencias o afectos y una específica para la dimensión intersubjetiva que llamamos *historia de vida* (figura 3).

Figura 3. Estrategias didácticas para cambio de actitudes



Historia de vida es una estrategia original para mejorar la integración grupal y el cambio de actitudes hacia determinados conocimientos, que ubica en el centro la dimensión intersubjetiva y *afectiva*[11] del acto educativo (González, 2012).

El PAMG también incluye tres videos con edición y tratamiento didáctico: *Mujeres matemáticas en México* (diseño original nuestro); *Las chicas sólo quieren sumar*, del programa de TV *Los Simpson* (editado, con duración de seis minutos y tratamiento didáctico) y *Donald en la Tierra de las matemágicas* (editado, con tratamiento didáctico).

[11] El afecto emerge cuando falla la racionalidad. La ciencia moderna occidental con Immanuel Kant sobrevaloró la racionalidad, categorizando el sentimiento como una expresión infantil y femenina. Por el contrario, consideramos que sólo aquello que nos incumbe afectivamente llega a inquietarnos propiciando motivación o rechazo, pero no indiferencia (González, 2012).

2. DISEÑO METODOLÓGICO PARA LA EVALUACIÓN DEL PAMG

Conjuntamos un enfoque interpretativo del proceso de implementación del PAMG con una evaluación de los resultados (modelo experimental) que permitiera aceptar o rechazar las hipótesis de investigación.

2.1 Diseño cuasiexperimental

La característica principal de esta modalidad es que los sujetos no son asignados aleatoriamente a las condiciones experimentales; se utiliza en la investigación educativa donde los grupos escolares ya están conformados y es relevante trabajar en ambientes naturales (Jackson, 2008).

Los sujetos

Se impartió el PAMG a un total de 438 estudiantes de primero de secundaria; con ese fin asistió una facilitadora a cada una de las escuelas, y una investigadora videograbó las seis horas de sesión (dos horas por día) y tomó notas.

El diseño original de la selección de escuelas secundarias de la Ciudad de México fue bietápico (escuela y grupo) al azar. Comprensiblemente, Inmujeres nos solicitó que incluyéramos nueve secundarias con las más bajas calificaciones en la prueba de matemáticas ENLACE; de la selección original conservamos cinco, tres de ellas en colonias clasificadas de baja o muy baja marginalidad y el resto en colonias de muy alta marginalidad. En 12 escuelas se impartió el PAMG y en otra, un programa alterno (educación sexual) como *placebo*. Ocho escuelas son del turno vespertino y cinco del matutino.

Se intervino en un total de 16 grupos –doce *experimentales*[12] y cuatro de *comparación*–.[13] Se incluyeron dos tipos de grupos de comparación. Tres de ellos son equivalentes;[14] a éstos no se les impartió el PAMG y sólo se les aplicaron el

---

[12] Los grupos en que se implementó el PAMG.

[13] Se refiere a los grupos de las mismas escuelas donde sólo se aplicó la escala para medir actitudes hacia las matemáticas y a un grupo en otra secundaria al que se impartió otro programa con similares características pero en otro tema (educación sexual), aplicando la escala antes y después.

[14] En educación se considera un grupo equivalente cuando es del mismo grado escolar y de la misma escuela que el grupo experimental; para verificar la equivalencia se calcula la diferencia de medias con la prueba T para muestras independientes.

pre y el postest para controlar el efecto "historia" y el aprendizaje del instrumento de medición y en otro grupo el programa placebo.

El instrumento

Para evaluar si hubo cambios y en qué sentido, aplicamos la escala *Actitudes hacia las matemáticas* (EAM) –validada (confiabilidad y validez de contenido) con la población de la Ciudad de México (González, 2005)– a los grupos seleccionados, antes y después de impartir el PAMG.

Para analizar los cambios (pre y post) formulamos varias hipótesis de investigación con un nivel de confianza de 95% y una potencia estadística de .80 (Cohen, 1992), que más adelante se presentan.

Análisis de la información estadística

Una vez concluida la etapa de impartición de los programas a los grupos seleccionados, se codificó y capturó la información con ayuda del *software* estadístico Statistical Package for the Social Sciences (SPSS). Puesto que un aspecto central del análisis era comparar el resultado de la EAM (antes y después del PAMG), tomamos el criterio de suprimir del análisis a aquellos sujetos que no hubieran contestado la EAM en el pre o en el post;[15] o también, que no respondieran en tres o más reactivos de la EAM (pre o post), los cuales sumaron 22 casos, quedando un total de 416 estudiantes.

Con el fin de determinar el tipo de prueba estadística que se utilizaría para contrastar medias (pre y post), se analizaron los datos de la EAM (pretest) con la prueba de Kolmogorov-Smirnov para verificar la "bondad de ajuste", y se obtuvieron los siguientes resultados: Z .999, $p = .217$ y $p > .05$; se determinó que la muestra se ajustaba a una distribución normal.

También se analizó con la prueba de Box, la igualdad de las matrices de covarianzas, la cual resultó no significativa (F 2.270, $p < .000$), lo que compromete la confiabilidad de los resultados de la investigación. Ya que esta prueba es muy sensible al tamaño de la muestra, se analizó con otros dos tipos de pruebas

[15] Por inasistencia.

(Traza de Pillai, Lambada de Wiks, Traza de Hotelling), y resultó significativa en ambos casos (1.308, p >.271).

Sobre la base de estos criterios estadísticos, se optó por utilizar la prueba T de Student para grupos relacionados con el fin de analizar las diferencias de medias (pre y post) y la prueba U de Mann-Whitney para mediciones ordinales.

Estimamos también el *tamaño del efecto* (*effect size).* Cohen (1992) desarrolló un índice conocido como *d* que permite conocer no solamente si hay diferencias significativas, sino también la magnitud del efecto. El índice *d* para las diferencias entre las medias de poblaciones está estandarizado al dividir éste por la desviación típica común.

$$d = \frac{\overline{Y}_e - \overline{Y}_c}{s_c}$$

Cohen estableció una serie de rangos, y determinó que en la prueba T un efecto **pequeño** con *d* es igual a 0.2, un efecto **mediano** es igual a 0.5 y un efecto **grande** es igual a .8.

Estos análisis permitieron estimar, *a posteriori,* la *potencia* estadística[16] que habla de la validez de la investigación. Con un efecto de .2 y un nivel de significancia de .05, las tablas de Cohen (1992: 158) señalan que en pruebas de diferencias de media se requiere una población de 393 sujetos para una potencia de .80. La muestra con la que se trabajó fue de 416 sujetos, por lo que se cumple con el criterio señalado por el autor.

3. IMPLEMENTACIÓN DEL PAMG

Entre agosto y noviembre del 2011 el PAMG se impartió a estudiantes (47.6% mujeres) de primer grado de 12 escuelas secundarias. A cada una asistió un facilitador(a) y una observadora,[17] trabajando simultáneamente tres escuelas (dos horas por sesión, durante tres días). Las observadoras tomaron nota de cada escuela en un formato diseñado *exprofeso* y grabaron las sesiones en que se

[16] Se refiere a la probabilidad de resultados significativos; es decir, la aceptación de la Hi cuando es verdadera; Cohen (1992) establece como criterio .80.

[17] Cada equipo llevaba consigo *laptop*, bocinas, videograbadora y tripié. Visitaron previamente cada escuela para entrevistarse con el (la) director(a).

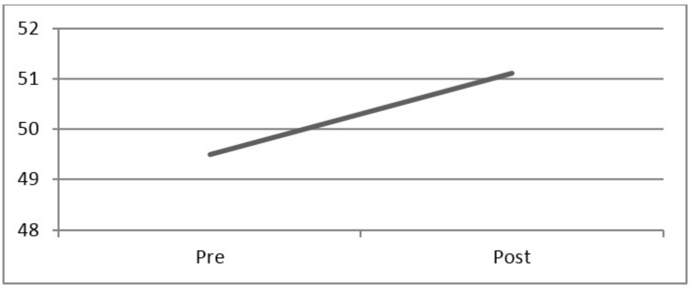
impartió el PAMG (dos horas por sesión, durante tres días). Las dos facilitadoras se especializan en capacitación laboral (con muchos años de experiencia docente en educación superior, pero sin experiencia con jóvenes de secundaria).

Una vez que se inició la implementación del PAMG, conformamos un *laboratorio* donde nos reunimos todos los integrantes del equipo para interpretar los videos (70 horas de grabación). En la primera semana hicimos una modificación menor al programa.[18]

PRINCIPALES RESULTADOS

En el cuadro 1 se presentan los resultados por escuela. En relación con la primera hipótesis de investigación, encontramos diferencias significativas al comparar el promedio de los resultados de la escala (EAM) antes y después, por lo que se acepta la H_1: **los estudiantes que trabajan el PAMG incrementaron positivamente sus actitudes hacia las matemáticas, al comparar antes (pre) y después (post) de la intervención** (gráfico 1).

Gráfico 1. Promedio de resultados de la EAM antes y después de impartir el PAMG en grupos experimentales



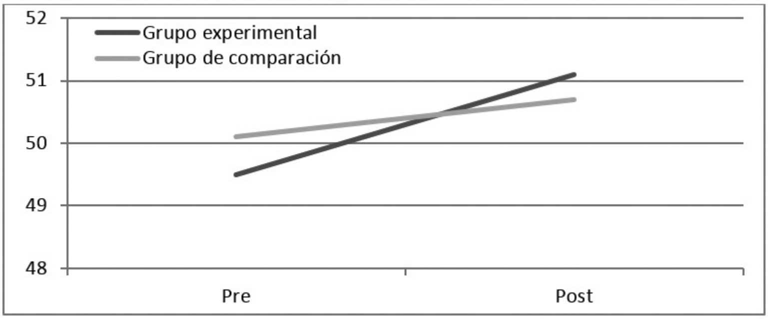
Fuente: Cuadro 1.

En cuanto a la segunda hipótesis de investigación (H_2), encontramos diferencias significativas positivas en los grupos experimentales (pre y post) con un tamaño

[18] En las escuelas con bajo rendimiento en ENLACE, el alumnado no estaba acostumbrado a trabajar en equipo, intercambiando opiniones y poniéndose de acuerdo, por lo que implementamos una actividad para trabajar en pequeños grupos.

del efecto *d* .20; por el contrario, no encontramos diferencias significativas en los grupos de comparación, con un tamaño del efecto de .08 (cuadro 1), por lo que se acepta la segunda hipótesis de investigación: los estudiantes que trabajan el PAMG incrementaron positivamente sus actitudes hacia las matemáticas, en comparación con aquellos que no lo trabajan o trabajan otro programa (gráfico 2).

Gráfico 2. Promedio de resultados de la EAM antes y después de impartir el PAMG en grupos experimentales y grupos de comparación



Fuente: Cuadro 1.

DIFERENCIAS POR ESCUELA

Convencidas de que los resultados generales de las hipótesis de investigación subsumen aspectos particulares de los procesos, identificamos las diferencias por escuela en la EAM, utilizando el índice *d* para analizar el tamaño del *efecto* del PAMG en el alumnado. Observamos que en seis escuelas hubo un efecto moderado y en seis fue pequeño o insignificante, valorado con el índice *d* (cuadro 1).

Cuadro 1. Media, desviación típica, prueba T y tamaño del efecto de la Escala de Actitudes hacia las Matemáticas (EAM)

Grupos/escuelas	**Pre media (DT)**	**Post media (DT)**	**DT pre y post**	**T (nivel de significación)**	**Tamaño del efecto D (1)**
Grupo experimental n = 348	49.5 (7.7)	51.1 (8.2)	8.0	-4.931 (**)	.22
Grupo de comparación n = 91	50.1 (7.5)	50.7 (7.6)	7.7	-1.651 (ns)	.08
Grupo experimental Mujeres n = 165	49.7 (7.5)	51.1 (8.1)	7.9	-3.002 (**)	.20
Grupo experimental Hombres n = 183	49.4 (7.9)	51.0 (8.3)	8.1	-2.105 (*)	.19
1. Sec. Técnica 45	44.8 (4.3)	47.0 (5.9)	5.3	-2.613 (*)	.41
2. José Ma. Velasco	45.3 (8.9)	45.9 (7.7)	8.1	-.512 (ns)	.07
3. León Felipe	47.2 (6.3)	48.8 (7.2)	6.8	-1.435 (ns)	.19
4. Sec. Técnica 115 G. experimental	47.2 (7.4)	50.8 (8.6)	8.1	-3.343 (**)	.44
4. Sec. Técnica 115 G. de comparación	47.1 (7.8)	48.2 (7.7)	7.7	-.593 (ns)	.14
5. Sec. Técnica 53 G. experimental	53.6 (6.2)	55.2 (7.3)	6.7	-1.501 (ns)	.23
5. Sec. Técnica 53 G. de comparación	48.6 (9.0)	50.3 (7.2)	8.1	-1.426 (ns)	.20
6. Sec. Técnica 70 G. experimental	50.6 (6.8)	53.7 (7.7)	7.3	-2.498 (*)	.42
6. Sec.Técnica 70 G. de comparación	49.7 (6.9)	50.0 (7.4)	7.0	-.350 (ns)	.04
7. Rep. de Cuba	50.2 (7.2)	51.2 (7.2)	7.2	-.511 (ns)	.13
8. Carlos A. Carrillo	50.6 (7.1)	51.4 (6.6)	6.8	-.494 (ns)	.11

9. Sec. Técnica 60	51.2 (7.1)	51.4 (9.5)	8.4	-.191 (ns)	.02
10. Sec.Técnica 31	52.9 (6.9)	55.2 (6.4)	6.7	-2.803 (**)	.34
11. Dr. Manuel Barranco	50.7 (8.4)	52.8 (9.3)	8.8	-2.377 (*)	.23
12. Martín V. González	51.4 (8.2)	51.4 (8.4)	8.2	-.043 (ns)	.03
13. Diego Rivera	52.5 (6.6)	52.9 (7.5)	7.0	-.509 (ns)	.05

El nivel de significación es un estadístico de prueba en virtud del cual se concluye acerca de la existencia del fenómeno estudiado, o el riesgo de rechazar erróneamente la Ho.

(**) Significativo al 1%; (*) Significativo al 5%; (ns) No significativo.

Hasta .20, efecto pequeño; entre .21 y .50, efecto moderado; .51 o más, efecto grande (Cohen, 1992).

Constatamos que en las escuelas en donde se impartieron menos de cuatro horas del PAMG,[19] con diversos inconvenientes como la entrada y salida de personas, interrupciones (simulacro sismo, examen, etc.) (núms. 9, 12 y 13), el efecto fue insignificante.

Encontramos diferencias importantes (T -4.236, $p < .001$) al comparar el factor *d* por turnos, a favor de escuelas del turno vespertino. Este hecho se ha mencionado en otras investigaciones: quienes reciben menos educación[20] tienden a responder más positivamente (Forgasz, 2010).

Particularmente nos preguntamos cómo fue que las estrategias del PAMG mejoraron de manera significativa la actitud hacia las matemáticas en la mitad de las escuelas y por qué en otras seis no hubo cambios estadísticamente significativos. Retomamos las grabaciones (70 horas), y procedimos de la siguiente forma:

a) Observamos en dos ocasiones cuatro videos de las tres sesiones (uno por cada facilitador), tomando nota de lo más significativo de cada actividad (contexto, situación, formas de comunicación entre el (la) facilitador(a) y

[19] En un caso por simulacro de sismo, en otro porque el director argumentó no haber recibido el oficio y en uno más por pérdida de las llaves del salón de cómputo, no se impartieron las seis horas programadas.

[20] Las secundarias vespertinas –en comparación con las matutinas- tienen menos alumnas, son grupos más reducidos y hay estudiantes mayores de 13 años. Por no tratarse de una muestra aleatoria, no analizamos diferencias por turno.

el grupo y el alumnado, respuesta del alumnado ante cada actividad didáctica propuesta).[21]

b) Formulamos algunas conjeturas acerca de las escenas, que fuimos aclarando y enriqueciendo con la observación de otros videos. Comentamos estas inferencias con las investigadoras y las facilitadoras participantes para conocer su punto de vista.
c) Continuamos interpretando videos de otras escuelas, hasta que decidimos que era suficiente lo que muestran las escenas, para validar las conjeturas.
d) Por último, contrastamos algunos aspectos de las escuelas donde mejoraron las actitudes del alumnado hacia las matemáticas (facilitador, formas de relación, infraestructura, etc.) con las escuelas donde no hubo avances importantes.

B) Interpretación del proceso de implementación del PAMG

En el *laboratorio* revisamos las grabaciones en las que iniciamos con dos preguntas generales: ¿cómo se llevó a cabo la actividad? y ¿qué efecto producían las diferentes estrategias didácticas programadas? Si bien en la mayoría hubo una buena recepción, en dos escuelas el video dura poco por "no haber recibido el oficio a tiempo".[22]

A algunas de las escuelas vespertinas se les conoce como "escuelas basurero", que es revelador de la mala opinión que se tiene tanto de la escuela como del alumnado que ahí llega. En todas las escuelas se contaba con un espacio para la proyección de videos, y se identifican tres tipos: a) salón tipo teatro con butacas fijas; b) sala de cómputo con mesas; c) espacio en la biblioteca, con mesas movibles. La mejor opción para trabajar el PAMG fue la c y la peor la a.

La actitud del alumnado fue en algunos casos de confrontación (malas palabras, parejas besándose, riéndose y haciendo tanto ruido que era imposible escucharse); después de un rato, entre ellos empezaban a callarse y pedir atención.

[21] En esta primera observación no contábamos con información acerca de en qué grupos habían mejorado las actitudes y en cuáles no.

[22] Las investigadoras asistieron una semana antes de la actividad a cada escuela para presentarse con el directivo y conocer las instalaciones en que se iba a implementar el PAMG.

Estrategias didácticas para el cambio de actitudes hacia las matemáticas[23]

Cada actividad se correspondía con un tipo de estrategia didáctica (gráfico 3); a continuación se describe cada una de las actividades.

Persuasión

Los videos lograron captar el interés y emocionaron a buena parte del alumnado. Dieron excelentes resultados para problematizar algunas creencias en relación con las matemáticas. El video *Donald*, a pesar de haberse producido hace más de 80 años (1935), continúa siendo vigente para mostrar una **dimensión cultural de hacer matemáticas**; particularmente persuade en el sentido de que las matemáticas son útiles para la vida cotidiana y que no se trata solamente de un saber abstracto sin relación con el mundo: la música, la arquitectura o el juego de estrategia (ajedrez).

Por su parte, el video *Mujeres matemáticas en México* atrajo la atención del grupo y permitió dar a conocer las aportaciones que algunas mujeres han hecho al campo de las matemáticas. Debido al alto volumen de la música, no se escucha con claridad el mensaje de la voz; opinaron que es un video corto y claro para los fines que persigue, según los comentarios de las alumnas al concluir: "Ahí faltamos nosotras".

Una situación muy desagradable que se repitió en *todos* los grupos fue la burla racista que genera la imagen de la primera matemática afroamericana Evelyn Boyd ("qué fea"; "ja ja, se parece a tu abuela"). El tema de la discriminación racial en México es un problema muy presente y denunciado, aunque poco trabajado en la escuela, e implicaría por sí mismo destinarle no sólo algunas horas en la clase, sino una práctica cotidiana involucrando a todos los agentes educativos.

El video *Trabajo en equipo*, el cual se incluyó debido a que la mayoría de los grupos vespertinos no están acostumbrados a esta forma de actividad, les fue significativo cuando evaluaron el PAMG: "Aprendí que es importante trabajar en equipo".

[23] El PAMG se puede consultar en González (2013).

Conflicto cognitivo

El video de dibujos animados de la Familia Simpson *Las niñas solo quieren sumar* relata que a Juliana, quien fue alumna de la escuela primaria de la ciudad de Springfield, le organizan una ceremonia en el auditorio para reconocer sus éxitos profesionales. El director Skinner recuerda en su exposición que ella fue muy buena alumna; Juliana interrumpe y comenta: "Bueno, no tanto en matemáticas", a lo que Skinner responde: "Bueno, es lógico, eres mujer... lo que quise decir es que los niños son mejores en Matemáticas, Ciencias, materias de verdad". Posteriormente presentan cómo separan a niños y niñas en la clase de Matemáticas. Lisa se disfraza de niño para entrar a las clases que a ellos les imparten, ya que en la de niñas sólo se preocupan por su autoestima y no les enseñan a resolver problemas.

La reacción de las alumnas no se hace esperar, quienes se apresuran a señalar que ellas son mejores en las clases de Matemáticas.[24] El mensaje de este video consigue que hablen en primera persona expresando su disgusto. En el caso de los alumnos, no se dan por aludidos, aunque muestran atención al tema.

La sola exposición de los videos no produce el efecto esperado; es importante el trabajo didáctico, en el que se les formulan preguntas específicas que apuntan a la reflexión de sus propios pensamientos.[25]

Metacognición

La reflexión[26] y el diálogo son centrales en esta estrategia; si el alumnado reflexiona acerca del método que sigue para resolver un problema y este proceder le resulta clarificador, es posible que modifique sus creencias acerca de las matemáticas (son difíciles) y que le genere placer afrontar el reto.

Por su parte, el diálogo, a decir de Hans-Georg Gadamer, entra en el marco de la pregunta-respuesta, de la llamada y la escucha, elementos entrañablemente

[24] Esto es cierto, ya que el alumnado de secundaria en las escuelas es evaluado por sus profesores (as), quienes en promedio califican mejor a las alumnas que a los alumnos (González, 2005).

[25] Por ejemplo, en el video de *Mujeres matemáticas en México*, a la pregunta de la facilitadora si conocían alguna mujer matemática comenta un estudiante "yo pensé que no había matemáticas famosas", a lo que algunos asienten. Nuevamente les interroga, ¿por qué pensaban eso? "no conocía a ninguna"; y por qué será que no conocías a ninguna "bueno, tampoco conocía a matemáticos, ja ja."

[26] Entendida como "una continua interacción entre el pensamiento y la acción" (Schön, 1983).

unidos. Las posibilidades de dialogar entre facilitador (F) y estudiantes (E) y de E entre ellos (as) pasa porque se interroguen y se escuchen, y esto sólo es posible en pequeños grupos.

La actividad "Número secreto" pretendía mostrar que resolver problemas puede implicar complejidad, pero también diversión, cuando se consigue. Si alguna actividad se trabajó en equipo –entendiendo por esto no sólo un pequeño número de estudiantes reunidos, sino la participación colectiva en que cada cual realizó una parte para conseguir resolver el problema que se les planteaba–, fue "número secreto" que incluyó diálogo y reflexión. Resultó muy gratificante ver cómo varios equipos se mostraban satisfechos de sus resultados.

"Encriptación de mensajes"[27] pretendió vincular el cifrado y descifrado de mensajes con la resolución de problemas que implica análisis, reflexión y descubrimiento. Resultó interesante y divertida para buena parte del alumnado, que se sorprendió por la creación de códigos creativos y mensajes positivos que manifiestan afecto ("quiero decirles que los quiero"). Esta actividad fue la que menos comprendieron el facilitador y las facilitadoras y en la cual mostraron su desconocimiento de la enseñanza de las matemáticas en el momento del cierre.

El conocimiento que el facilitador tenía del programa incidió positivamente: los dos que participaron en el diseño del PAMG tuvieron mejores resultados. Las formas de relación y comunicación entre el alumnado (conocido como *clima escolar*) fueron otro aspecto que favoreció mejores resultados.

Método de caso

"La mejor decisión" consiste en que por equipos el alumnado elija, de tres compañías de telefonía celular cuyas tarifas de prepago se le proporcionan, cuál de ellas es la más conveniente y por qué. Dicha estrategia ofrece la posibilidad de vincular el contenido temático con el entorno social y aplicar los conocimientos a situaciones cotidianas.

La actividad no resultó muy interesante ni divertida, pues al estar en equipos se comunican poco y no saben ponerse de acuerdo. Además, dos de las facilitadoras no comprendieron bien el sentido de la actividad:[28] mostrar que, si se clarifican diferentes aspectos de la oferta de cada empresa telefónica (costo,

[27] Actividad sugerida por la doctora Gisela Espinosa.

[28] Una se enfocó más en estimar el costo por llamada y la otra no propiciaba la reflexión.

atractivo del celular, calidad de comunicación, etc.), se pueden tomar decisiones informadas.

"Cuadro cubista" fue la actividad que más interesó al alumnado, ya que es una de las que apuntan precisamente a la dimensión afectiva. Se les pide que dibujen una pintura en la que ocupen figuras geométricas. Se les explica brevemente quién y dónde se creó lo que se conoce como *dibujo cubista*. La finalidad era reforzar la idea de que las matemáticas no son solamente algoritmos o conocimiento sin sentido para la vida cotidiana.

El dibujo logró que el alumnado expresara muy diferentes imágenes y sentimientos y diera rienda suelta a la creatividad: frecuentemente dibujaron grafitis[29] (en otros casos muestran dibujos simples o convencionales, como casas o personas). A algunos equipos incluso hubo que pedirles varias veces que terminaran el trabajo, pues el tiempo destinado a otras actividades había concluido.

Consideramos que se ha menospreciado la comunicación gráfica como medio de expresión y comunicación en este nivel educativo.

Historia de vida

Originalmente se planteó que en pequeños grupos cada estudiante hablara de su experiencia personal con las matemáticas; pronto constatamos que no están acostumbrados a hablar en primera persona (burlas, desinterés de compañeros), por lo que hicimos algunas modificaciones y pedimos que tres hablaran de experiencias positivas y tres de negativas, intentando propiciar la reflexión al respecto. Las experiencias negativas fueron especialmente conmovedoras.

Relacionamos cada uno de los reactivos (pre y post) de los resultados en la Escala con la prueba no paramétrica de Wilcoxon; a continuación presentamos las actividades y estrategias didácticas, el objetivo y los reactivos, reportando solamente aquellos con un nivel de significación de 5% o menor.

[29] Los grafitis suelen asociarse a la violencia juvenil, parece que es una de las formas de comunicación de estos jóvenes.

Cuadro 2. Nivel de significancia estadística en la relación de actividad, objetivos y reactivos

Actividades PAMG y estrategias didácticas	Objetivo	Reactivos	Nivel de significancia
-Video familia Simson -Video mujeres matemáticas(metacognición y persuasión)	Incrementar la auto-confianza en sus capacidades matemáticas	8. Mi habilidad para las matemáticas es muy buena. 18. Soy bueno (a) en matemáticas.	** * +
-Número secreto -Encriptación de mensajes (metacognición)	Cuestionar la idea de que las matemáticas son difíciles	14. Me parecen muy fáciles las matemáticas.	** ++
-Toma de decisiones (método de caso) -Donald y la Tierra de las Matemágicas (persuasión)	Presentar las matemáticas como un actividad útil y valiosa	1. Las matemáticas me ayudan a tomar decisiones	** +
-Dibujo cubista (trabajo en equipo)	Disminuir el temor que genera hacer matemáticas	11. Me siento intranquilo (a) en clase de matemáticas.	** +
-Dibujo cubista (trabajo en equipo) -Gusto por las matemáticas (historia de vida)	Considerar interesante y divertido la resolución de problemas	2. Las matemáticas pueden ser divertidas.	**

(**) Significativo al 1%; (*) Significativo al 5%

(+) Especialmente para las alumnas; (++) especialmente para los alumnos

Por último, correlacionamos algunas variables como cantidad de estudiantes por grupo, *clima del aula*[30], índice de feminidad y prueba Enlace con el puntaje D y promedio de resultados en EAM (pre) identificando relación entre puntaje D y clima de aula y (cuadro 3).

[30] Esta variable surgió en la observación de los videos en el laboratorio; nos percatamos que un ambiente socio-afectivo positivo de interacción en el aula favorecía la implementación del PAMG en el grupo; posteriormente, le asignamos un valor a cada grupo (1 = muy malo y 5 = muy bueno).

Cuadro 3. Correlación entre variables seleccionadas

Variables	1	2	3	4	5	6
1.Puntaje D		-.193	-.148	.782**	-.388	-.228
2.EAM (Pre)			.106	.191	.478	.721**
3. No. estudiantes por gpo.				.152	.002	-.007
4.*Clima* del aula					-.103	.147
5.Indice de feminidad						.204
6. Prueba ENLACE						

(**) Significativo al 1%; (*) Significativo al 5%

APRENDIZAJES DEL PAMG

Enseguida se describen algunos aprendizajes que nos dejó la implementación del PAMG, mediante la interpretación de los videos:

1. Las actividades funcionan mejor con instrucciones claras y cortas; cuando se dificulta la comprensión es bueno poner un ejemplo con un grupo para que todos observen.
2. El mejor antídoto para la indisciplina son las actividades que le hacen sentido y le resultan interesantes al alumnado, cuando menos a la mayoría.
3. Muy diversos factores influyeron en mejorar las actitudes del PAMG: la compresión del programa; estilo de comunicación y enseñanza del facilitador; grupos con aceptable relación entre ellos(as) y no mayormente apáticos con el aprendizaje (buen ambiente de aula); contar con un aula con mobiliario movible para trabajar en pequeños grupos, libre de interferencias, y haber cubierto el total de actividades didácticas señaladas en el PAMG
4. No cubrir todas las actividades del PAMG, malas instalaciones y mal ambiente de aula afectaron el cumplimiento de los objetivos en seis escuelas.
5. La posibilidad de que el alumnado sea el protagonista en la formación pasa por el trabajo en equipo previamente planificado.

Al finalizar la impartición del PAMG se pedía al alumnado que evaluara los tres días de trabajo, preguntándoles qué aprendieron y cómo se sintieron. Tres aspectos destacan en sus respuestas en lo general: a) fue divertido hacer matemáticas; b) las mujeres pueden ser tan buenas como los hombres en matemáticas; c) las ventajas del trabajo en equipo. A continuación, algunos ejemplos.

Ana Angélica: "Que las mujeres también pueden estudiar matemáticas".

María Fernanda: "A trabajar en equipo y que las mujeres son igual de buenas para las matemáticas que los hombres..., me sentí bien, tranquila".

Raymundo: "Aprendí a convivir en equipo y mucho de matemáticas... me sentí alivianado y bien".

Cercle: "Se me hizo muy interesante lo del pictograma... gracias por venir a enseñarnos, a hacernos entender que podemos convivir en equipo y la importancia de las matemáticas".

Giovanny: "Con muchas ganas de aprender más sobre las matemáticas".

DISCUSIÓN

Al finalizar la evaluación (experimental) confirmamos que cumplimos con el objetivo de la intervención que pretendía mejorar significativamente las actitudes hacia las matemáticas en alumnas de secundaria a través del PAMG, programa que diseñamos a partir del análisis conceptual de actitud, del cual derivamos estrategias didácticas que incluyeron las dimensiones creencias cognitivo-afectivas aunadas y relacional, obteniendo mejoras en el sentido de resignificar a las matemáticas (reactivos 1 y 2: *Las matemáticas pueden ser divertidas*, *Me ayudan a tomar decisiones*) y resignificar-se en relación con sus habilidades en la disciplina (reactivo 8: *Mi habilidad para las matemáticas es muy buena*) y disminuir la ansiedad que les genera (reactivo 11: *Me siento intranquila en clase de matemáticas*).

Al analizar por escuelas, en seis de las doce escuelas encontramos que mejoraron significativamente sus actitudes hacia las matemática con 99% de confianza y en 3 escuelas más el efecto fue pequeño.

El conceptualizar cognición-afecto como dos caras de una misma moneda y la dimensión personal-relacional humana iluminaron aspectos que usualmente las categorías individuo, cognición y emoción no permiten observar ni trabajar pedagógicamente.

Al incorporar una perspectiva de género a través de dos videos –la participación histórica de mujeres en el campo de las matemáticas y una caricatura en donde el director de una escuela descalifica a una exalumna señalando que era buena estudiante "pero no en materias de verdad, como matemáticas"– generó una reacción de rechazo en buena parte de las alumnas quienes mostraron abiertamente su negativa a tal afirmación, actividades que seguramente incidieron en las respuestas en la post aplicación del cuestionario en torno a que es un conocimiento propio para varones y que las mujeres han ingresado a este campo recientemente.

Las escuelas vespertinas –con más bajos puntajes en matemáticas previo a la intervención– fueron las que en mayor medida mejoraron sus actitudes hacia las matemáticas y el estereotipo de que es un saber sin relación con la vida cotidiana, confirmando lo señalado por otras investigaciones en el sentido de lo provechoso de destinar más y mejores recursos a quienes cuentan con menos oportunidades.

La actividad que incluimos para trabajar en equipo –con un video que no dura más de tres minutos–, aunado a la forma en que se movieron las bancas para conformar los equipos en aquellos salones que lo permitían fueron favorables para la comunicación y trabajo en pequeños grupos; así mismo, en algunas ocasiones se logró una aceptable-buena comunicación a través de los dibujos que sería deseable investigar en futuras investigaciones con jóvenes.

Fue un error subestimar el saber del profesorado de secundaria el cual lleva años; a pesar de que facilitadores llevan muchos años de experiencia formando profesionistas fueron evidentes sus limitaciones en las dos primeras semanas para trabajar con jóvenes de secundaria; también la formación pedagógica de uno de ellos y su involucramiento con el diseño del programa.

Dos de las actividades –número secreto e encriptación de mensajes– se relacionaron positivamente con la idea de que las matemáticas son difíciles, especialmente para los alumnos. El video de Donald favoreció que el alumnado contemplara las matemáticas con una actividad útil y valiosa.

Consideramos que la intervención resultó novedosa en más de un sentido. Desde una perspectiva didáctica, la formación de actitudes ha tomado realce en la última década, pero aún hay escasa investigación acerca de cómo transformar positivamente las actitudes hacia el aprendizaje, sobre todo en el caso particular de las matemáticas; al respecto, probamos dos estrategias didácticas innovadoras (persuasión y *cuéntame tú tu historia*) que mostraron ser efectivas, la primera en el análisis experimental y la segunda en el interpretativo en donde el alumnado se expresa con mayor amplitud la valoración que hace del curso que recibió.

Desde un enfoque ético-político, el PAMG pretende garantizar la igualdad de derechos y oportunidades para niñas y mujeres en este campo de conocimiento; logramos que las alumnas mejoraran sus actitudes hacia las matemáticas conociendo a mujeres sobresalientes en esta materia, lo que les permitió cuestionarla como una actividad propia de los varones.

Metodológicamente, se probaron maneras de investigar integrando perspectivas antagónicas –un diseño cuasiexperimental y un análisis interpretativo– y haciéndolas coincidir en una propuesta para mejorar la comprensión/explicación de fenómenos complejos como la intervención educativa.

Hubiera sido deseable aplicar de nuevo el cuestionario de actitudes al alumnado dos años después, ya que ignoramos el efecto del PAMG a más largo plazo; sin embargo, en México los estudios de este tipo en educación prácticamente son inexistentes.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue solicitada y financiada en parte por el Instituto Nacional de las Mujeres de México.

REFERENCIAS

Arthur, J., Waring, M. Coe R. y Hedges I. (2012). *Research Methods and Methodologies in Education*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Bolívar, A. (2000). El desarrollo de actitudes. En Coll, C. *El constructivismo en la práctica*. Grao. Barcelona, 47-55.

Bolívar, A. (2005). El conocimiento de la enseñanza: explicar, comprender y transformar. *Revista Mimesis-Ciências Humanas* (Bauru-São Paulo). *Revista de currículum y formación del profesorado*, 25 (1),17-42. Consultado el 8 de junio de 2010 en: http://www.edusc.com.br/colecoes/revistas/mimesis/index.htm

García, R. M. y Sebastián Ch. (2011). Creencias epistemológicas de estudiantes de Pedagogía en educación parvularia, básica y media: ¿diferencias en la formación inicial docente? *Psykhe*, 20 (1), 29-43.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2005) El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática (2) 15-32

Cohen, J. (1992). A Power Primer. *Psychological Bulletin*, 112, 155-159.

Chiozza, L. (1998). *Cuerpo, afecto y lenguaje*. Alianza. Buenos Aires.

Meece, J. L., Eccles-Parsons, J., Kaczala, C. M., Goff, S. B., y Futterman, R. (1982). Sex differences in math achievement: Toward a model of academic choice. Psychological Bulletin, 91, 324-348. Meehan, A. M. (1984).

Eccles-Parson, J., Kaczala, S. B. Goff y R. Futterman (1982). Sex Differences in Math Achievement: Toward a Model of Academic Choice. *Psychological Bulletin* 92, 324-348.

Espinosa, C. (2010). Diferencias entre hombres y mujeres en educación matemática: ¿qué pasa en México? *Investigación y Ciencia*, núm. 46, pp. 28-35.

Forgasz, H. J. (2010). *International Perspectives o non Gender and Mathematics Education*. Information Age Publishing. Charlotte, NC.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea. Madrid.

González, R. M. (2004a). Género y educación: resignificando una historia. Formación del profesorado de educación básica. *Decisio Revista del Crefal* 2, 25-32.

González, R. M. (2004b) *Género y matemáticas: balanceando la ecuación*. Porrúa/Universidad Pedagógica Nacional. México.

González, R. M. (2005). Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes de secundaria". *Revista Educación Matemática* 17, 107-128.

González, R. M. (2006). Mujeres matemáticas: análisis del caso de México. *Cuestiones de Género: de la Igualdad a la Diferencia* 1, 113-136.

González, R. M. (2012). Paradojas de trabajar género en educación: algunas reflexiones acerca de la formación o cómo salir del gatopardo. En Jorge Luis Silva (coordinador). *Género y educación: aportes para la discusión jurídica.* Suprema Corte de Justicia de la Nación/ Fontamara. México.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, OCDE (2016). Panorama de creencias, expectativas y motivación de los estudiantes. *Informe de resultados de PISA 2015*. Consultado el 30 de noviembre de 2016 en: https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf

Planes y programas de estudio para educación secundaria (2006). *Diario Oficial de la Federación*, 26 de mayo. Consultado el 30 de abril de 2011 en: https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/ca8cef5b-610b-4d55-8a52-03f1b84d0d6c/a384.pdf

Jackson, L. S. (2008). *Research Methods and Statistics: A Critical Thinking Approach*. Wadsworth Cengage Learning. Belmont, CA.

Leder, G. C. y Forgasz, H. J. (2002). Measuring Mathematical Beliefs and their Impact on the Learning of Mathematics: A New Approach. En Gilah C. L., E. Pehkonen y G. Töner (editores). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Nertherlands.

McLeod, D. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. McMillan Library. Nueva York.

McLeod, D. y McLeod S. (2002). Synthesis-Beliefs and Mathematics Education: Implications for Learning, Teaching and Research. En Gilah C. L., E. Pehkonen y G. Törner (Eds). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Nertherlands.

McGraw, R., S. Lubienski y M. Strutchens (2006). A Closer Look at Gender in naep Mathematics Achievement and Affect Data: Intersections with Achievement, Race/Ethnicity, and Socioeconomic Status. *Journal for Research in Mathematics Education* 37, 129-150.

Menchaca, A. (2000). *Las ciencias exactas en México*. Fondo de Cultura Económica. México.

Murillo, F. J. (2006). Un marco comprensivo de mejora de la eficacia escolar. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* 21, 319-359.

Murillo, F. J., R. Hernández-Castilla y C. Martínez-Garrido (2016). ¿Qué ocurre en las aulas donde los niños y niñas no aprenden? Estudio cualitativo de aulas ineficaces en Iberoamérica. *Perfiles Educativos* 151, 55-70.

Ricoeur, Paul (2011). *Sí mismo como otro*. Siglo XXI Editores. México.

Shön, D. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action*. Temple Smith. Londres.

Ursini, S. Ramírez, M. Rodríguez, C. Tigueros, M. y Lozano, M. (2010). Studies in Mexico on Gender and Mathematics. En Forgasz, H. (Ed) *International Perspectives on Gender and Mathematics Education*. Charlotte, NC: Information Age Pub.

Ursini, S., Montes, D. Ramírez, M. y García, S. (2012). Actitudes hacia el estudio de las matemáticas. En Carvajal E. (Ed). *Matemáticas para profesores de Preescolar y Primaria.* UNAM/Editorial Siglo XXI. México.

Rosa María González Jiménez

Dirección: Pirineos 242 Depto. 205 Col. Santa Cruz Atoyac,
Delegación Benito Juárez CP 03310

Teléfono: 5544 133

 DOI: 10.24844/EM3101.08

Análisis de la relación entre imagen y definición en una situación problemática mediada por GeoGebra a partir de no ejemplos del concepto de poliedro regular

Analysis of the relation between image and definition in a problem mediated by GeoGebra from non-examples of regular polyhedron

Ana María Mántica[1]
Magali Lucrecia Freyre[2]

Resumen: Numerosos documentos regulatorios expresan una revalorización de la Geometría, tanto en el trabajo con materiales manipulativos como en el mediado por software de geometría dinámica. Dicha revalorización se plantea a través del diseño de situaciones que permitan la exploración, formulación y validación de conjeturas. Para abordar la noción de poliedro regular se elabora una situación problemática mediada por GeoGebra, dadas las ventajas que proporciona este entorno dinámico en cuanto al trabajo con figuras tridimensionales. Dicho entorno permite obtener una multiplicidad de casos con una única construcción si se utilizan propiedades geométricas. Se presenta el análisis de lo realizado por estudiantes de profesorado en matemática durante la resolución del problema. Se pretende determinar si sus imágenes están intrínsecamente controladas por el concepto empleando, registros escritos, grabaciones de audio y video, y protocolo de construcción de los archivos del software. Del análisis se desprende que en algunos estudiantes la integración entre imagen y concepto para el caso de poliedro y/o de poliedro regular particularmente, es incompleta.

Fecha de recepción: 21 de marzo de 2018. **Fecha de aceptación:** 4 de septiembre de 2018.

[1] Facultad de Humanidades y Ciencias, ana.mantica@gmail.com, orcid.org/0000-0001-5529-3515
[2] Facultad de Humanidades y Ciencias, magali.freyre@gmail.com, orcid.org/0000-0003-4195-2940

Palabras claves: *Concepto figural, poliedro regular, GeoGebra, construcciones tridimensionales, formación docente*

Abstract: Numerous regulatory documents express a revaluation of Geometry, not only when working with manipulative materials but also when dynamic geometric software mediates the work. We demonstrate it through the design of situations that allow exploration, formulation and validation of conjectures. To address the notion of regular polyhedron, we elaborated a problematic situation mediated by GeoGebra, due to the advantages that this dynamic environment provides when working with three-dimensional figures. This environment enables us to obtain a multiplicity of cases with a single construction provided geometric properties are used. We present an analysis of the tasks performed by prospective mathematics teachers during the resolution of the problem. Our aim is to determine whether their images are intrinsically governed by the concept, and to do so we have analyzed written records, audio and video recordings and the software construction protocol files. This analysis reveals that in the case of the polyhedron and/or of the regular polyhedron in particular, some students cannot achieve a complete integration between the image and the concept.

Keywords: *Figural concept, regular polyhedron, GeoGebra, three-dimensional constructions, prospective teacher training*

INTRODUCCIÓN

Distintos documentos regulatorios de Argentina de la escolaridad obligatoria de los últimos años (Núcleos de aprendizaje prioritarios (NAP), Tercer ciclo EGB 2004, NAP Ciclo Básico 2011, Ciclo Orientado 2012, Diseño curricular Educación Secundaria Orientada Provincia de Santa Fe, 2014 y versiones preliminares del último que datan de 2011, entre otros) ponen en valor el trabajo en Geometría y sugieren realizarlo mediante la utilización de elementos tradicionales y de software de geometría dinámica (SGD). A pesar de este reconocimiento, la enseñanza de la geometría tiene menos “presencia en las aulas” en comparación con la aritmética y el álgebra ya que generalmente se reduce el trabajo a la medida, como sostienen Itzcovich (2005, 2007), Schaefer y Sgreccia (2016) y más aún si se trata de geometría en tres dimensiones (Grossi y Sgreccia, 2016)

Con respecto a la intención de provocar cambios en la actitud por parte de los docentes en cuanto al trabajo en Geometría en la escolaridad obligatoria, Gutiérrez (2015) sostiene que "la reciente aparición de diversos programas de geometría dinámica 3-dimensional y el mayor uso de los ordenadores en los centros de educación primaria y educación secundaria pueden ayudar a superar los inconvenientes para enseñar geometría espacial". (p. 54)

En el presente artículo se analiza el desempeño de los estudiantes en una situación problemática que forma parte de una secuencia didáctica. El objetivo de este problema es resignificar la definición de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplan sólo algunas de las condiciones exigidas por dicha definición, mediante el uso del software de geometría dinámica (en adelante SGD) GeoGebra.

Este tipo de figuras, denominadas en el presente artículo no ejemplos, son aquellos casos raros denominados "monstruos" por Lakatos (1978), quien sostiene que son figuras tridimensionales que no cumplen algún/os criterio/s de los establecido/s en la definición acordada. El uso de no ejemplos amplía el conjunto de figuras disponibles de un concepto, en este caso de poliedro regular, dado que en apariencia podría considerarse un ejemplo de esta familia, sin embargo analizando detenidamente la definición puede determinarse que no es un miembro de la misma. Las preguntas que guían esta investigación refieren a si el trabajo con no ejemplos contribuye a una mejor integración entre concepto y figura y por lo tanto si ayuda a una mejor formación del concepto figural de poliedro regular.

Con respecto a lo mencionado se afirma que una figura geométrica puede ser descripta como poseedora de propiedades intrínsecamente conceptuales, no obstante una figura geométrica incluye además una imagen basada en la experiencia sensitiva-sensorial, como la imagen de un dibujo y que el concepto está formado por la definición y las propiedades que se derivan de ella. Se apunta a que la figura considerada no sea una imagen cualquiera sino una estructura controlada lógicamente.

Para intentar lo anterior, se analiza lo acontecido durante el desarrollo de la actividad planteada en el contexto del dictado de la materia Geometría Euclídea Espacial, donde se utiliza GeoGebra de manera habitual para la construcción, formulación y validación de conjeturas por parte de los estudiantes. Esta asignatura corresponde a tercer año del profesorado en matemática de la

Universidad Nacional del Litoral (UNL), de la ciudad de Santa Fe. En el problema propuesto se pretende estudiar la formación de conceptos figurales, en particular el concepto de poliedro y, más específicamente, el de poliedro regular.

En este sentido, se analizan las producciones de los estudiantes (reunidos en grupos) teniendo en cuenta no sólo sus registros escritos y protocolos de construcción del software, sino también las grabaciones de audio y video y notas del observador, correspondientes al trabajo en grupos y a la puesta en común.

MARCO DE REFERENCIA

De acuerdo al objetivo planteado, se utilizan para el análisis dos aspectos: uno referido a la formación de conceptos geométricos y otro referido al aporte que el uso de un SGD brinda en esta formación.

En cuanto a la formación de conceptos geométricos, se consideran los aportes de Fischbein (1993) en lo que respecta a la construcción de concepto figural. Se retoman los aportes de Vinner y Dreyfus (1989) y Tall (1989) en lo referido al empleo de ejemplos y no ejemplos en la construcción del concepto. Y en lo que se refiere particularmente a la formación del concepto de poliedro regular se apela a los aportes de Guillen Soler (1997).

Primeramente, Fischbein (1993) sostiene que una figura geométrica puede ser descripta como poseedora de propiedades intrínsecamente conceptuales, no obstante esta figura no es sólo un concepto, es una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no tienen, pues incluye la representación mental de propiedades espaciales. Todas las figuras geométricas representan constructos mentales que poseen simultáneamente propiedades conceptuales y figurales. El término "concepto figural", introducido por este autor, pretende enfatizar el hecho de que tratamos con un tipo particular de entidades mentales que no son reducibles ni a imágenes usuales ni a conceptos genuinos. La particularidad del concepto figural es que incluye la figura como propiedad intrínseca. Un concepto figural es un constructo mental caracterizado por todas las propiedades de los conceptos (generalidad, esencialidad, abstracción, idealidad), pero que al mismo tiempo preserva propiedades figurales (forma, distancia, posición). En principio, la fusión entre figura y concepto debería ser absoluta, ésta es una situación ideal que usualmente puede ser cumplida en la mente entrenada del matemático. Sin embargo, Fischbein (1993) sostiene que la interpretación de la componente figural de una figura geométrica debería quedar enteramente sometida a las restricciones formales. Esa idea no es siempre entendida, y es frecuentemente olvidada por el estudiante. En general, se tiende a olvidar la definición bajo la presión de las restricciones figurales, esto representa un obstáculo grave en el razonamiento geométrico.

Seguidamente, Vinner y Dreyfus (1989) expresan que, si bien las definiciones son desarrolladas en clase, los alumnos no necesariamente las utilizan para decidir si un objeto matemático dado es un ejemplo o no de un concepto. En la mayoría de los casos deciden basándose en la imagen conceptual, que es el conjunto de todas las figuras mentales (gráfica, simbólica, etc.) del estudiante relacionadas con el nombre del concepto. junto con todas las propiedades que lo caracterizan. Esta imagen es el resultado de sus experiencias con ejemplos y no ejemplos del concepto. Así, el conjunto de objetos matemáticos considerados por el estudiante como ejemplos del concepto no es necesariamente el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición. En este caso, el accionar de los estudiantes podría diferir de lo que el docente espera. Es importante entonces entender por qué difieren y para esto se estudian las imágenes que los estudiantes poseen de los conceptos matemáticos.

Asimismo, Tall (1989) afirma que muchas de las piezas de aparatos concretos que se usan en la enseñanza de la matemática se focalizan más en lo que el concepto es y no en lo que no es. De esta manera, los no ejemplos de los conceptos parecen tener poca relevancia. El autor expresa la importancia de la manipulación por parte del alumno de ejemplos y, en el caso de ser posible, de no ejemplos de un concepto matemático específico o de un sistema de conceptos relacionados. Se requiere así de un balance adecuado entre la variedad de ejemplos y de no ejemplos propuestos para la formación de una imagen coherente del concepto involucrado. Esto contribuye a que el estudiante gane experiencias que le provean de una estructura cognitiva, la cual le permita construir los conceptos más abstractos.

Posteriormente, Guillén Soler (1997) sostiene que la imagen que se forma de un concepto se basa en atributos críticos y no críticos. Estos últimos se dan por casualidad e influyen en reconocer ejemplos del concepto. Por este motivo, resulta importante presentar variados ejemplos posibles ya que "la imagen que uno se va formando de un concepto se afina, amplía y cambia a medida que se va ampliando el mundo de ejemplos posibles". (p.18)

En cuanto al aporte que un SGD brinda a la construcción de un concepto geométrico, se considera a Sessa, Borsani, Cedrón, Cicala, Di Rico y Duarte (2015) y Gutiérrez y Jaime (2015).

Sessa *et al.* (2015) expresan que los SGD plantean nuevos horizontes posibles para el trabajo en el aula de matemática y permiten pensar en tareas que sin estas herramientas serían impensadas. Manifiestan que las intenciones didácticas se modifican al verse enriquecidas por el uso del software. Sostienen que las figuras dinámicas construidas en SGD representan modelos recortados de los problemas en estudio. El trabajo del docente debe dejar en claro a los estudiantes que la construcción en el SGD no es suficiente para realizar determinadas afirmaciones, sino que éstas deben estar apuntaladas por cierta racionalidad matemática. Es intención que los alumnos vayan "construyendo una mirada crítica sobre las respuestas del software, relacionándolas con los conocimientos que tienen sobre los objetos matemáticos que se ponen juego". (p.159)

Gutiérrez y Jaime (2015) analizan el uso de software de geometría dinámica tridimensional para la enseñanza de la geometría espacial. Afirman que la aparición de estos programas informáticos permiten que los estudiantes exploren y experimenten más activamente, junto a los materiales didácticos tradicionales, en entornos de enseñanza más interesantes que le permitan al alumno construir nuevos conocimientos. Así, puede contribuir a superar algunos inconvenientes en la enseñanza de la geometría espacial que derivan de manejar las representaciones en papel de cuerpos espaciales o de la escasez de material manipulativo en algunos casos. Estos autores mencionan que las formas de enseñanza o aprendizaje en geometría dinámica plana no pueden extrapolarse a la geometría espacial y, como consecuencia, resulta necesario que las manipulaciones dinámicas (que ofrece el trabajo con el software) ayuden a eliminar imágenes falsas, mejorar dibujos en papel de estructuras tridimensionales y a enriquecer las imágenes conceptuales de los conceptos involucrados.

METODOLOGÍA

La presente investigación es cualitativa interactiva, ya que "consiste en un estudio en profundidad mediante el empleo de técnicas cara a cara para recoger los datos de la gente en sus escenarios naturales" (Mc Millan y Schumacher, 2005, p.44). Se describe el contexto del estudio y las perspectivas de los informantes. Asimismo, se trata además de una investigación aplicada ya que "se centra en un campo de práctica habitual y se preocupa por el desarrollo y la aplicación del conocimiento obtenido en la investigación sobre dicha práctica" (p.23)

Los sujetos de estudio de la investigación son alumnos del profesorado en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL que cursan la cátedra Geometría Euclídea Espacial (GEE), correspondiente al tercer año de la carrera. La elección de los sujetos de estudio se da al considerar el acceso que los investigadores tienen a dicha cátedra y, además, porque se tiene en cuenta que estos estudiantes de profesorado realizan actividades (en el marco de la cátedra) que son de interés según los objetivos planteados para la investigación.

El plan de cátedra de la asignatura da cuenta de que, en el cursado, se utiliza un apunte de cátedra y, como complemento en algunos temas particulares, el libro *Geometría métrica, tomo I Fundamentos*, de Puig Adam (1980). Además de utilizar materiales manipulativos, se emplea el software GeoGebra, de código abierto y disponible de manera gratuita, que permite construcciones dinámicas utilizando definiciones y propiedades geométricas en el plano y en el espacio. El uso de este software en la materia es transversal, ya que está incluido tanto en las instancias de clases como en las de evaluación. Se considera fundamental para la elaboración de conjeturas y pruebas de propiedades que posteriormente son formalizadas con rigurosidad matemática. La elaboración de conjeturas se ve beneficiada por el aspecto dinámico que ofrece el software al posibilitar un desplazamiento en la pantalla de elementos libres, este desplazamiento permite visualizar una multiplicidad de figuras que cumplen las propiedades que son consideradas para su construcción.

Respecto al tema "poliedros" en particular, puede observarse, en el material de cátedra, que los estudiantes definen superficie poliédrica cóncava y convexa y poliedro convexo, analizan distintas demostraciones del teorema de Euler y definen poliedros eulerianos. A partir de esto demuestran que no sería posible que existan más de cinco poliedros que tengan sus caras iguales y que en cada vértice concurra el mismo número de ellas, en particular si esas caras son polígonos regulares. De esta manera, concluyen que dichos poliedros son regulares; definiendo poliedros regulares convexos. Continúan con transformaciones geométricas y sus propiedades, lo que les permite trabajar con las relaciones de paralelismo y perpendicularidad. Definen familias de poliedros particulares y prueban propiedades de las mismas (prisma, pirámide, tronco de pirámide), estudian además los cuerpos redondos (cilindro, cono, tronco de cono y esfera) y el caso particular de la geometría en la superficie esférica. Prueban luego la existencia de los cinco poliedros regulares a partir de lo planteado en el texto de Puig Adam (1980), construyendo cada uno de ellos en función de las definiciones y propiedades disponibles. Por último, trabajan una unidad sobre medida, en la que obtienen las fórmulas que permiten el cálculo de área y volumen de los poliedros y cuerpos redondos estudiados en la cátedra.

La situación problemática involucrada en el presente trabajo, que se explicita más adelante, es abordada por los estudiantes en el marco de un taller obligatorio con el uso de GeoGebra que se propone en la misma cátedra.

Los estudiantes trabajan, en una primera instancia, en grupos de dos para la resolución del problema y, en una segunda instancia, socializan a la clase sus producciones.

La técnica que se emplea para el registro de datos es la observación participante. El investigador tiene una participación activa, apela a la escritura de extensas notas de campo durante la implementación de las actividades para documentar lo que acontece en el desarrollo de las tareas: interacciones, intervenciones, acciones y otros tipos de aportes de todos los participantes. Además de estos registros escritos se incluyen las grabaciones de audio y video de las clases en las que se efectúan las tareas, los archivos que producen los alumnos con el software y sus registros escritos mientras resuelven la actividad. Vale aclarar que los estudiantes participantes dan su consentimiento para que su trabajo sea grabado y filmado, y para que el material recogido sea utilizado para difundir los resultados del proyecto de investigación.

En seguida, se realiza un análisis cualitativo de los datos que tiene como propósito comprender el contexto que los rodea y describir las experiencias de los estudiantes, relacionando los resultados de dicho análisis con el marco teórico elegido.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

El problema presentado forma parte de una secuencia didáctica que tiene como objetivo resignificar la definición de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplan sólo algunas de las condiciones exigidas por la definición, con el uso de software de geometría dinámica. Esta secuencia forma parte de un trabajo de investigación más amplio que tiene como objetivo analizar si los estudiantes tienen construido el concepto figural de poliedro.

Propuesta de trabajo

Considerando que la situación problemática, que se presenta en este artículo, aborda el concepto de poliedro regular, se tienen en cuenta los aportes de Guillén Soler (1997) quien hace una clasificación de poliedros regulares y no regulares atendiendo a las características de la definición. En este sentido, se propone una clasificación con las características de los poliedros involucrados en los problemas que se plantean en el taller.

En esta asignatura se consideran poliedros regulares convexos, aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas. En las actividades presentadas en el taller se proponen construcciones de poliedros que cumplen sólo dos de estas tres condiciones, por lo que no son regulares. Se realiza una categorización de poliedros a los efectos de analizar los tipos de no ejemplos que podrían proponerse. Se considera no ejemplo de un poliedro regular a un poliedro que cumple una o dos de las tres condiciones exigidas por la definición de poliedro regular pero no las tres.

A continuación se presenta la categorización que tiene en cuenta solamente aquellos poliedros que surgen de cumplir únicamente dos condiciones exigidas para la regularidad, dado que corresponde al problema involucrado en este artículo. Las condiciones exigidas son:

X: Sus caras son polígonos regulares.

Y: Sus caras son polígonos iguales.

Z: En cada vértice concurren el mismo número de caras.

Tipo	X	Y	Z	Denominación
1	Si	No	Si	No regular Tipo 1
2	Si	Si	No	No regular Tipo 2
3	No	Si	Si	No regular Tipo 3

Figura 1. Posibles poliedros

Los problemas de la secuencia plantean una reflexión acerca de las condiciones que debe cumplir un poliedro para ser regular, esto contribuye a que se generalice el objeto mental de esta determinada familia de sólidos. Así, "se pretende que los estudiantes incluyan en el objeto mental correspondiente todos los ejemplos de la familia de sólidos, en diferentes posiciones, junto con propiedades de la familia y relaciones de sus elementos o con ejemplos de otras familias". (Guillén Soler, 2000, p.50)

El problema presentado se relaciona con la existencia y construcción de poliedros no regulares de los denominados tipo 2.

Consigna del problema   Construir, si es posible, un poliedro no regular de modo que todas sus caras sean triángulos equiláteros iguales.   a) Si no es posible, justifica la no existencia.   b) Si es posible: i. Indica qué condiciones son necesarias para construirlo.[3]   ii. Analiza si el poliedro es único.   iii. Justifica por qué el poliedro obtenido no es regular.

Análisis de lo realizado por los estudiantes:

A continuación se expone y se transcribe lo realizado por los seis estudiantes que cursan la asignatura, quienes se reúnen en grupos de dos integrantes para resolver el problema, y que posteriormente socializan sus producciones al grupo clase.

Se aclara que los fragmentos de diálogos textuales[4] que se expresan están representados utilizando para cada estudiante la primer letra de su nombre y para el docente utilizando la letra P.

Grupo D y A

Los estudiantes leen la consigna y recurren al docente para comentar su interpretación. Acuden a la definición de poliedro regular, determinando la condición que no debe cumplir según la consigna.

---

[3] En el desarrollo de la asignatura se plantean habitualmente problemas de construcciones con el objetivo de problematizar y potenciar los objetos matemáticos involucrados. Se parte del supuesto de que bajo ciertas condiciones las construcciones con elementos clásicos de geometría o software de Geometría Dinámica permiten explorar, identificar, conjeturar y validar propiedades de dichos objetos geométricos. La secuencia en la que se enmarca el problema exige el uso del SGD GeoGebra.

[4] La forma lingüística empleada es la variedad dialectal del español rioplatense.

A: - Un poliedro no regular de modo que sus caras sean triángulos equiláteros iguales. Para que un poliedro sea no regular no se tiene que cumplir una de estas dos condiciones: que sus caras sean polígonos regulares iguales, eso sí o sí pasa porque son triángulos equiláteros iguales. Y la otra, en sus vértices concurren el mismo número de aristas. Debe*ría no cumplirse esta condición.*

Comienzan pensando en la modificación de un tetraedro regular para que no se cumpla la condición que en cada vértice concurran el mismo número de caras. Piensan en agregar triángulos equiláteros de modo que en el vértice que están considerando concurran más de tres aristas, lo cual les parece imposible en un comienzo. Se posicionan en un vértice de un tetraedro regular e intentan abrir el triedro de manera tal que se agreguen más caras (fig. 2). Así pretenden construir una pirámide cuyas caras sean triángulos equiláteros iguales pero encuentran que no es posible de esta manera que la base sea un triángulo. El problema es que esta cara no les permite cerrar la figura tridimensional que están construyendo y por tanto no quedaría determinado un poliedro. Esto evidencia que los alumnos tienen construida una imagen de poliedro como figura tridimensional cerrada.

A: - Lo que yo pienso no se puede, es decir, no nos entra en la cabeza. Vos tenés un triángulo equilátero abajo y lo pensamos como un tetraedro regular. Tenés la cara así y si lo abrimos para meterle más caras, éste que está así...[5] *acá tiene que entrar otro triángulo equilátero, y acá otro... porque todas las caras tienen que ser triángulos equiláteros iguales.*

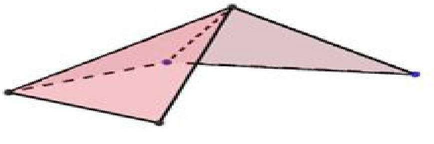


Figura 2. Triedro considerado

[5] Se posicionan en un triedro del tetraedro.

Los alumnos descartan este procedimiento. Retoman nuevamente el tetraedro regular y realizan una simetría central respecto de uno de sus vértices. En la figura obtenida intentan nuevamente abrir los triedros opuestos por el vértice para agregar triángulos, pero se dan cuenta que esto no los conduce a una construcción que cumpla las condiciones solicitadas en la consigna. Luego recurren a otro concepto trabajado en la asignatura que es el Teorema de Euler. Como este teorema es válido para todos los poliedros convexos, no solo para los regulares, lo descartan. Se evidencia que no logran, en un comienzo, desprenderse de la imagen del tetraedro regular y esto les impide visualizar una construcción que cumpla la consigna. Continúan debatiendo, pero siempre considerando la posibilidad de agregar más caras que concurran en un vértice de un tetraedro regular para negar la condición que en todos los vértices concurran el mismo número de caras.

Iniciada la puesta en común, uno de los integrantes del grupo continúa trabajando con el software y logra una construcción correcta, que explica posteriormente al resto de la clase. En ningún momento debate con su compañera acerca del poliedro construido, que es una bipirámide.[6] Se evidencia que siempre piensan en el tetraedro regular, primero, en agregarle caras y luego en "acoplarle" (término utilizado por el alumno) otro tetraedro regular, unido por una cara.

Figura 3. Puesta en común Grupo D y A

[6] "Las bipirámides son las formas que se obtienen cuando se juntan dos pirámides de bases iguales, de manera que ajusten completamente sus bases"(Guillén Soler, 1997: 18)

Luego justifica utilizando propiedades geométricas cómo obtendría, a partir de un tetraedro regular, la bipirámide.

Se considera que la construcción del poliedro obtenido puede estar influenciada por la demostración realizada para probar la existencia del octaedro regular en la que se parte de dos pirámides cuadradas unidas por la base.

El alumno, en la puesta en común, primero expone cómo le quedó el poliedro y después fundamenta cómo hace para obtenerlo. Expresa que obtuvo el poliedro que cumple las condiciones pedidas de la siguiente manera:

> *A: - Partimos de un tetraedro regular, usamos el comando de tetraedro regular y lo que hicimos fue acoplarle el mismo pero le aplicamos una simetría especular respecto del plano que contiene a la base. Nos quedó este poliedro. En este vértice concurren las tres aristas del primer tetraedro, y en éste... uno, dos, tres, cuatro. Está formado por triángulos equiláteros como lo pedía el enunciado pero no es un poliedro regular convexo.*
>
> *D: - Ah, parece un octaedro, solo que tiene tres caras arriba y tres abajo.*

En la puesta en común, cuando el alumno explica, se evidencia que la imagen que tiene de poliedro regular pareciera estar controlada por la definición, dado que siempre contrapone la imagen y la definición. Por esto, logra descartar las primeras imágenes de poliedros que trabaja agregando caras a los triedros cuyos vértices coinciden con los vértices del tetraedro regular porque siempre compara la imagen obtenida con su imagen de poliedro como figura cerrada.

La asociación entre la imagen del octaedro, la definición de poliedro regular y lo solicitado por la consigna permite que encuentre este poliedro (bipirámide) que surge de "acoplar" dos tetraedros regulares.

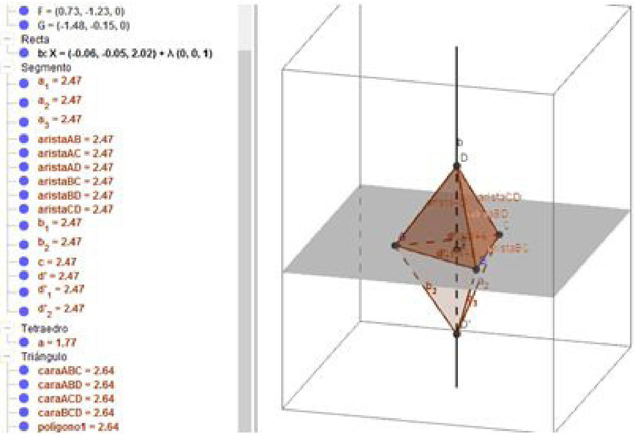


Figura 4. Protocolo de construcción de bipirámide

Si bien el estudiante pone en valor su imagen de poliedro para la construcción y para la justificación del poliedro obtenido que cumple las condiciones solicitadas en el problema, en la puesta en común hace referencia a la definición y a la figura logrando una buena fusión entre ambas.

Vale aclarar que no hace referencia a la problemática de la unicidad en sus conclusiones ni reflexiona expresamente sobre las condiciones necesarias para la construcción. Esto puede deberse a que la construcción de la bipirámide la realiza uno de los estudiantes del grupo minutos antes de su exposición.

Grupo T y M

Las alumnas comienzan a pensar en el posible poliedro no regular tipo 2 (X, Y, no Z) haciendo referencia a la definición de poliedro convexo.

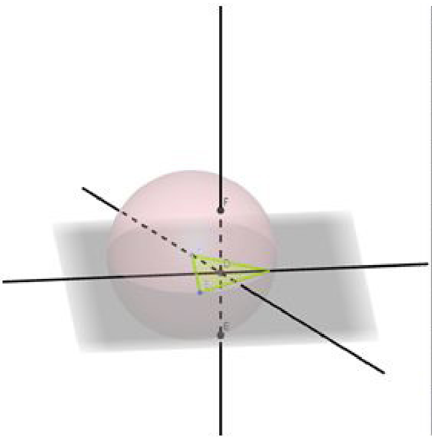
M: - El poliedro regular es el que deja a las otras caras en el mismo semiespacio.

En la cátedra, se trabaja la definición de poliedro regular convexo, y es tal vez por esta razón que las alumnas parecieran estar considerando la condición de convexidad de un poliedro para abordar el problema.

Continúan dialogando acerca de una posible construcción, recurriendo al tetraedro regular y analizando cómo modificarlo para que no se cumpla la condición que en cada vértice concurra el mismo número de caras. A esta construcción la llaman "reloj de arena".

M: - Podrías hacer la pirámide, o sea el tetraedro de triángulos equiláteros, y el opuesto también. ¿Viste como el reloj de arena?[7] Es un no regular y todas sus caras son triángulos.
T:- ¿Por qué es un no regular?
T: - Porque en un vértice, el del medio,[8] no van tres caras, van muchas más.

Las alumnas construyen el tetraedro regular siguiendo los mismos pasos que hicieron en clases anteriores para probar la existencia de dicho poliedro tal como se observa en el protocolo de construcción.



N°	Nombre	Descripción	Valor
1	Punto A	Punto sobre EjeX	A = (1, 0)
2	Punto B	Punto sobre EjeX	B = (3, 0)
3	Polígono polígono1	Polígono(A, B, 3)	polígono1 = 1.73
3	Segmento f	Segmento [A, B]	f = 2
3	Segmento g	Segmento [B, C]	g = 2
3	Punto C	Polígono(A, B, 3)	C = (2, 1.73)
3	Segmento h	Segmento [C, A]	h = 2
4	Recta i	Bisectriz de A, C, B	i: x = 2
5	Recta j	Bisectriz de B, A, C	j: -0.5x + 0.87y = -0.5
6	Punto D	Intersección de j, i	D = (2, 0.58, 0)
7	Recta k	Recta que pasa por D perpendicular a Plano xOy	k: X = (2, 0.58, 0) + λ(0, 0, 1)
8	Esfera a	Esfera a través de B con centro en A	a: (x - 1)² + y² + z² = 4
9	Punto E	Punto de intersección de a, k	E = (2, 0.58, -1.63)
9	Punto F	Punto de intersección de a, k	F = (2, 0.58, 1.63)

Figura 5. Protocolo de construcción tetraedro regular

Las estudiantes intercambian ideas acerca de qué simetría utilizar para obtener el poliedro cuya imagen es la que se asemeja a un "reloj de arena". Aseguran que cumple la condición pedida aceptando que la figura construida es un

[7] Se refieren a dos tetraedros que tienen en común sólo un vértice.
[8] Se refiere al vértice compartido por los dos ángulos triedros.

poliedro y retoman la definición de poliedro regular para justificar su afirmación.

> *T: - No es regular.*
> *M:* - ¿Por qué sabemos que no es regular?
> *T: - Porque en el vértice H concurren 6 caras y en los demás sólo 3. además...poliedros regulares son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.*
> *M: - Entonces, ¿No es regular, o no es convexo?*
> *T:* - ¿Dónde estaba la definición *de poliedro regular? Porque ésta es la de poliedro regular convexo.*

Las estudiantes preguntan al docente acerca de la definición de poliedro regular. Se analiza que el tetraedro regular siempre es convexo.

Las alumnas centran la discusión en la concavidad o convexidad de la figura tridimensional obtenida. Si bien la figura construida no se corresponde con las imágenes habituales de poliedro, las estudiantes no se cuestionan en ningún momento si la misma cumple las condiciones exigidas por las definiciones consideradas en la cátedra.[9]

A lo largo de la escolaridad, en general, se presentan ejemplos estereotipados de poliedros contando en escasas o en ninguna ocasión con no ejemplos. En particular, los poliedros con los que se trabajan suelen ser convexos.

La construcción que realizan se corresponde con uno de los monstruos que menciona Lakatos (1978) que está constituido por dos "gemelos" conectados por un vértice. Utilizaremos este término en el texto para referirnos a esta figura tridimensional al trabajar en la puesta en común.

[9] Llamaremos superficie poliédrica al conjunto de un número finito de polígonos, llamados caras de la superficie, que cumplan las siguientes condiciones: Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo otra (caras contiguas); y dos caras contiguas están en distinto plano. La superficie se llama convexa si además se cumple que el plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a las demás.

Llamaremos poliedro convexo al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiespacios. Los vértices y lados de las caras se llaman vértices y aristas del poliedro. (Mántica y Götte, 2017)

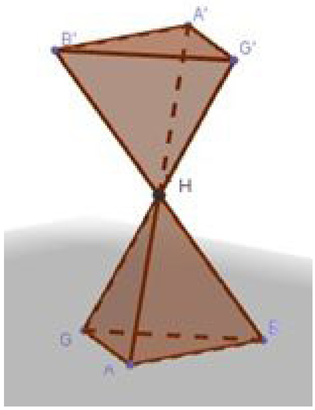


Figura 6. "Gemelos" conectados por un vértice

Una vez construida una figura que consideran solución del problema, comienzan a analizar si esa construcción es o no única. Para esto, deciden efectuar otra construcción. Esto puede tener que ver con lo realizado para probar la existencia de los poliedros regulares, los cuales fueron construidos con este propósito.

T: - ¿Querés que lo construyamos?
M: - Sí, total lo hacemos como lo hicimos hoy, para mostrar.
T: - Entonces en vez de trazar una perpendicular trazá una chanfleada.[10]

Con esas consideraciones realizan una nueva construcción que se expone a continuación. Vale aclarar que si bien la idea es correcta, en los procedimientos empleados no tienen en cuenta para uno de los tetraedros que sus caras sean triángulos equiláteros.

---

[10] Se refieren a una recta que pase por H no perpendicular al plano que contiene al triángulo GAB.

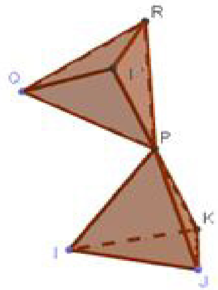


Figura 7. Variación de los "gemelos" conectados por un vértice

A continuación, reflexionan sobre la existencia de otro poliedro que cumpla las condiciones establecidas. Piensan en el tetraedro, y a partir de él, qué construcción podrían realizar de modo que en un vértice concurran más de tres caras. Plantean que los tetraedros podrían estar unidos por una arista, de modo que en la misma concurran más de dos caras. Si bien no lo construyen en GeoGebra, realizan un dibujo en la hoja que se corresponde con la figura que Lakatos llama "gemelos" conectados por una arista, nombre que utilizaremos para nombrar esta figura tridimensional.

> *M: - Yo podría decir que en una arista concurran más de dos caras. Porque en vez de hacerlo por el vértice podría haberlo hecho por la arista. En un vértice vuelven a concurrir más de tres caras.*

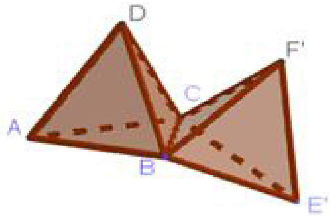


Figura 8. "Gemelos" conectados por una arista

La construcción no cumple la condición que cada lado de una cara pertenece a otra y sólo a otra siendo estas caras contiguas porque en el caso representado algunas caras comparten un lado con más de una cara.

Las estudiantes continúan su debate, planteando que una arista puede ser compartida por más de dos caras. Recurren a la definición de superficie poliédrica y de poliedro convexo en la que se expresa que cada lado de una cara pertenece a otra y sólo a otra. No obstante, después de leer la definición continúan sosteniendo que una arista puede ser compartida por más de dos caras.

Lo expresado anteriormente puede verse en su conclusión escrita en la cual se evidencia la posibilidad de construcción de los dos tipos de "gemelos" aunque uno no sea construido en GeoGebra. (fig. 9)

Se puede apreciar que las estudiantes T y M no poseen el concepto figural de poliedro que según Fischbein (1993) constituye la integración entre imagen y concepto. Las estudiantes no reflexionan acerca de esta construcción teniendo en cuenta la definición de poliedro y las imágenes relacionadas con las que habitualmente se encuentran.

Luego de estas construcciones, vuelven a considerar la posibilidad de otra solución para la consigna, en este caso, realizan una bipirámide. Lo hacen teniendo en cuenta el simétrico de un vértice del tetraedro regular respecto del plano que contiene a la cara del mismo que no contiene a dicho vértice.

Manifiestan que esta construcción surge de lo realizado en la prueba de la existencia del octaedro regular.

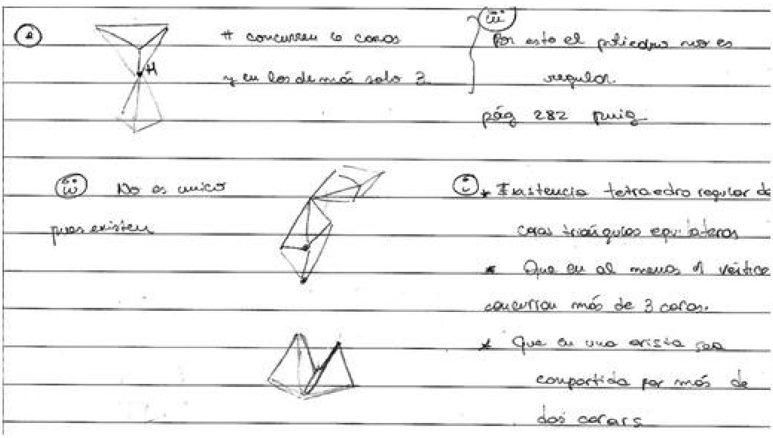


Figura 9. Conclusión escrita Grupo T y M

En la puesta en común expresan haber encontrado más de una solución al problema. Comienzan presentando los "gemelos": los conectados por un vértice y los conectados por una arista. En este caso el docente cuestiona si estas figuras tridimensionales son o no poliedros. Para esto recurre a la definición de superficie poliédrica (dado que solo se define poliedro convexo) lo que propicia un momento de debate y reflexión por parte de los alumnos. El estudiante A expresa que en los gemelos por la arista no se cumple la condición que cada lado de una cara pertenece a otra y sólo a otra, y por esta razón estos gemelos no se corresponden con la definición. Si bien es el estudiante A quien expresa por qué la figura 8 no es poliedro, luego de su intervención, el resto de la clase acuerda con que esta figura no es un poliedro.

En este caso la figura realizada por los estudiantes se corresponde con lo que han definido como superficie poliédrica no convexa, sin embargo la discusión no se centra en las definiciones que disponen de superficie poliédrica y poliedro convexo. Ello podría llevarlos a la búsqueda de una definición de poliedro, que incluya a poliedros no convexos. Esta discusión genera que la cátedra revise y reelabore las definiciones disponibles. Se establecen las siguientes definiciones:

"Llamaremos **superficie poliédrica** al conjunto de un número finito de **polígonos**, llamados **caras** de la superficie, que cumplan las siguientes condiciones:

- Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo otra. Ambas caras se llaman contiguas.
- Dos caras contiguas están en distinto plano.
- Dos caras no contiguas pueden unirse por una sucesión de caras contiguas.
- Dos caras no contiguas no pueden tener más punto común que un vértice y si lo tienen deben pertenecer ambas a un mismo ángulo poliedro.

La superficie poliédrica se llama **convexa** si además de las condiciones de la definición anterior se cumple que el plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a las demás.

Llamaremos **poliedro** al conjunto de los puntos de la superficie poliédrica y los interiores a la misma. Los vértices y lados de las caras se llaman vértices y aristas del poliedro.

Si la superficie que determina al poliedro es convexa el **poliedro** se llama **convexo**. De lo contrario lo denominaremos **poliedro cóncavo”**. (Mántica y Götte, 2018)

Las definiciones que se revisan atienden por un lado a descartar a los “gemelos por un vértice” que no se corresponden, en general, con las imágenes usuales de poliedros. Para esto se introducen mas requisitos en la definición de superficie poliédrica. Por otro lado, para subsanar el “agujero” que ocasionan las definiciones empleadas anteriormente que solo contemplan a los poliedros convexos, se incorpora la definición de poliedro. Una cuestión a destacar es que las reflexiones de los estudiantes llevan a la revisión del material teórico utilizado por la cátedra.

Grupo G y C

Este grupo, para resolver la consigna, recurre a la imagen visual que tiene de prisma, que es una imagen estereotipada. Consideran un prisma apoyado sobre una de sus bases utilizando las expresiones “arriba” y “abajo” para referirse a las mismas. Manifiestan que el prisma al igual que el tetraedro es un poliedro. Recurren a poliedros conocidos y a partir de ellos obtienen otro que cumpla la consigna.

G: - Un poliedro no regular… ¿Un tetraedro es un poliedro?
C:- Los que son así iguales arriba y abajo ¿Cómo se llaman?
G: - Prismas, que también es un poliedro…

Analizan que para que un poliedro sea regular debe cumplir solamente la condición que las caras sean polígonos regulares iguales. No recurren al material teórico de modo de considerar la definición donde se establecen todas las condiciones. No conciben en un principio la posibilidad de construir el poliedro que pide la consigna.

C: - El tema es que dice que las caras sean triángulos equiláteros iguales, éste es un triángulo, éste también tiene que ser un triángulo…
G: - Pero no es posible que no sea regular, si sus caras son triángulos equiláteros iguales…

Consideran la posibilidad que se pueda partir de un prisma para obtener el poliedro. Nuevamente utilizan la imagen visual que tienen de prisma pero en ningún momento hacen referencia a su definición.

C: - Por eso no se puede, ponele que vos tenés en esta cara un triángulo equilátero. Aunque podría ser un prisma...
G: - No, porque tienen que ser todas sus caras iguales, y van a ser triángulos. No, un prisma no me parece. Si es un prisma vas a tener cuadrados, rectángulos, como caras.

Vuelven a leer la consigna y se centran en el punto en el cual se cuestionan si la construcción es única y recurren a otra familia de poliedros trabajados: pirámide. Pareciera que el trabajo con las familias de prismas y pirámides influye en el conjunto de imágenes disponibles de poliedro limitando ejemplos que no pertenezcan a estas familias.

C: - Y si yo hago tipo un tetraedro, me queda un tetraedro regular que es lo que no quiere. y otra cosa...sí, dice aparte analizar si el poliedro es único...
G: - ¿Qué otro poliedro puede ser?
C: - Prisma...

Trabajan con el software y descubren la herramienta *Desarrollo*. Comienzan a indagar sobre desarrollos planos de poliedros de fácil construcción en el software.

G: - Te está diciendo caras iguales...
C: - Tenemos poliedros, pueden ser una pirámide o un prisma, nada más.
G: - Mirá este desarrollo...[11]
C: - A ver...
G: - Pero no sé lo que tengo que hacer... ¡Ah! yo dibujo el poliedro y me hace el desarrollo...

Vuelven a considerar el poliedro regular sin recurrir a la definición, por tanto, tienen la imagen de los cinco poliedros regulares y consideran que negar la regularidad equivale a que las caras no sean iguales.

[11] Se refiere al desarrollo plano en el software de algún poliedro.

C: - Pero no te puede decir en la consigna que no se puede...poliedro no regular... sus caras no son iguales... y acá dice que las caras sean iguales...
G: - Si un poliedro va a tener triángulos equiláteros... todos iguales, ponele no me importa cuántos sean, pero tienen que ser iguales.

Descartan el tetraedro y continúan recurriendo a otros poliedros regulares cuyas caras son triángulos equiláteros, con la intención de obtener el poliedro solicitado.

G: - ¿Cuál es el poliedro *que tiene una pirámide arriba y abajo?*
C: - El icosaedro creo que es.
G: - ¿Es regular? Sí, es un poliedro convexo regular.
C: - Yo digo éste..[12].
G: - Ah, el octaedro...
C:-¡Ah! porque las caras son triángulos, y ésta del medio no es una cara, el cuadrado.

Puede decirse que vuelven constantemente a sus imágenes de poliedros regulares pero desde una visión global de las mismas considerando sólo forma y regularidad de las caras. No tienen en cuenta que en el texto disponible está la definición de poliedro regular que les permitiría hacer visible la condición que no están considerando: en cada vértice de un poliedro regular concurre el mismo número de caras.

G: - Nosotros queremos que las caras sean triángulos equiláteros iguales y que sea un poliedro no regular...
C: - ¿Pero no es que cuando un poliedro tiene todas las caras iguales es regular?
G: - Pero capaz son equiláteros no todos iguales...
C: - Pero acá te dice equiláteros iguales.

Las alumnas continúan debatiendo haciendo referencia a los cinco poliedros regulares, en particular a los polígonos que forman sus caras.

Recurren a la definición de poliedro regular por una sugerencia de la docente luego de haber transcurrido aproximadamente diez minutos de debatir acerca de la posibilidad de solución del problema.

[12] Se refiere a una imagen del material teórico.

> *P:- ¿Qué dice la definición de poliedro regular? Porque la semana pasada hicimos las construcciones...*

La componente figural que las alumnas tienen de poliedro regular es para ellas suficiente y por tanto no sienten la necesidad de acudir a la definición. Parecería ser un impedimento para lograr una adecuada fusión entre la imagen y la definición de poliedro regular que les permita pensar en poliedros que no cumplen alguna de las condiciones exigidas en la definición. La imagen visual que tienen de poliedro regular es tan resistente y estereotipada que condiciona un análisis minucioso de la definición y por tanto el concepto figural que logran es incorrecto.

Luego de leer la definición por la sugerencia de la docente, inmediatamente encuentran una imagen de un poliedro que cumple la condición solicitada en el problema y realizan la construcción del mismo en el software sin mayores inconvenientes.

Las alumnas consideran una pirámide triangular cuyas caras son triángulos equiláteros iguales y en cuyos vértices concurren tres caras, es decir, un tetraedro regular. No obstante, no utilizan en el software la herramienta *Tetraedro*. Construyen la pirámide triangular empleando el mismo método que utilizaron la clase anterior para probar la existencia del tetraedro regular. Luego utilizan una esfera para determinar los dos vértices faltantes (fig. 10).

En la puesta en común, presentan su construcción explicando los procedimientos empleados y justifican por qué cumple con lo exigido por la consigna. Manifiestan no haber analizado la condición de unicidad por falta de tiempo.

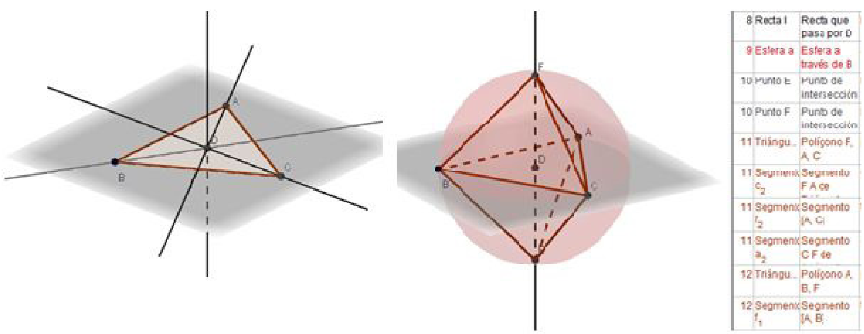


Figura 10. Construcción de bipirámide

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo del problema de este trabajo es resignificar la definición de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplan sólo algunas de las condiciones exigidas por la definición con el uso de GeoGebra. En el análisis se tienen en cuenta dos aspectos, por un lado, la formación de los conceptos geométricos de los estudiantes considerando la fusión que existe entre la figura y la definición del concepto de poliedro regular se hace hincapié especialmente en el uso de no ejemplos; y por otro lado, el uso de un software dinámico en la construcción de dicho concepto. A continuación se expresan algunas reflexiones teniendo en cuenta el objetivo y aspectos considerados para el análisis.

Respecto a la relación imagen, definición y concepto figural

En algunos estudiantes se evidencia una dificultad en la construcción del concepto figural de poliedro que es previo al de poliedro regular. Se observa que los estudiantes no tienden a recurrir a las definiciones disponibles para construir las figuras tridimensionales solicitadas. Si bien las construcciones realizadas no son las que habitualmente encuentran en los textos y actividades usuales, es llamativo que los estudiantes no se cuestionen si éstas son o no poliedros. Esto podría deberse a que sólo disponen de la definición de poliedro convexo, no obstante, podrían recurrir a la definición de superficie poliédrica que sí se da en general.

La construcción de los "gemelos" conectados por un vértice que realiza el grupo T y M es relacionada con un elemento conocido por ellas, que es el "reloj de arena". Esto representa una superficie poliédrica de acuerdo a la definición acordada por la cátedra, sin embargo, las estudiantes no recurren a la definición y esto se evidencia en la construcción de los "gemelos" conectados por una arista, figura que no cumple con la definición de superficie poliédrica. Fischbein (1993) sostiene que algunos errores en el razonamiento geométrico que tienen los estudiantes, pueden explicarse con la falta de congruencia entre el aspecto conceptual y figural de los conceptos figurales, en este caso relacionado al concepto de superficie poliédrica.

Por lo tanto, se considera que el hacer hincapié en poliedros convexos podría limitar el conjunto de imágenes con las que interactúan los estudiantes, influyendo en el concepto figural de poliedro construido lo que representa una limitación para la resolución del problema.

La estructura figural que poseen los estudiantes del grupo T y M de poliedro domina la dinámica del razonamiento ya que pareciera que éste último no está controlado por las restricciones formales que impone la definición. Se destaca que los alumnos cuentan con el apunte de cátedra en el que tienen disponibles las definiciones lo que les permitiría revisar si las construcciones cumplen con las condiciones exigidas por éstas.

A los estudiantes del grupo G y C no les es posible, en un principio, pensar en una imagen que cumpla sólo alguna de las condiciones que establece la definición de poliedro regular ya que sostienen que si las caras son polígonos regulares iguales sólo es posible que el poliedro sea regular. Luego de la intervención del docente, estos estudiantes comienzan a considerar la definición lo que les permite realizar una construcción adecuada.

Fischbein (1993) sostiene que los conceptos geométricos no son reducibles a una definición puramente formal sino que el concepto es una imagen enteramente controlada por una definición y sin este tipo de imágenes espaciales, la geometría no existiría como una rama de las matemáticas. En la resolución presentada por el estudiante A, pareciera que existe una buena fusión entre la definición y la imagen evidenciando una conveniente construcción del concepto figural de poliedro regular.

Los estudiantes, en general, recurren a las imágenes que tienen de poliedro regular y parten de ellas para intentar la construcción de un nuevo poliedro que no cumpla una de las condiciones exigidas por la definición de poliedro regular, en este caso que en cada vértice concurran el mismo número de caras.

Respecto del análisis de la construcción (condiciones necesarias y unicidad)

Se aprecia que los estudiantes no realizan una búsqueda sistemática basada en las propiedades que deben cumplir los ángulos poliedros de las figuras solicitadas. Esto consiste en analizar las posibilidades de que en un vértice concurran tres, cuatro y cinco triángulos equiláteros. Los estudiantes consideran el caso de tres triángulos equiláteros y descartan el de cuatro (dado que en ese caso es siempre regular) pero no tienen en cuenta el de cinco que les permitiría pensar en otra solución: una bipirámide formada por dos pirámides pentagonales.

No logran, en ninguno de los tres grupos, realizar un análisis previo a la construcción acerca de las condiciones que son necesarias para su existencia, lo que se solicita en el punto i) de la consigna.

En referencia al análisis de la unicidad del poliedro que cumpla las condiciones solicitadas, el grupo A y D no lo tiene en cuenta. El grupo T y M lo considera particularmente y construye, empleando el SGD, figuras que cumplen con lo solicitado y consideran otra que no cumple con los solicitado aunque no la construyen. El grupo G y C, una vez obtenida una figura que cumpla la condición pedida, a su criterio, no consideran otra posibilidad.

Respecto a la utilización del software en la elaboración de conjeturas

Se remarca que los estudiantes emplean el software en la construcción del concepto figural de poliedro regular durante el cursado de la materia elaborando conjeturas a partir de su uso realizando pruebas informales mediante las propiedades utilizadas en las construcciones y haciendo uso del desplazamiento de objetos libres para validar o invalidar conjeturas, previo a las demostraciones formales.

En este problema en particular, todos los grupos utilizan un criterio visual para justificar que la figura obtenida tiene las características solicitadas en el problema empleando la herramienta *Rota vista gráfica 3D*. Esto les permite a los alumnos explorar las particularidades de la figura tridimensional construida analizándola desde distintos puntos de vista, por ejemplo, pueden determinar la cantidad de caras que concurren en un vértice, entre otras condiciones.

Con un solo comando pueden construir el tetraedro regular y luego utilizan en un caso simetría central (grupo T y M) y en otro simetría especular (grupo D y A). Esto permitiría validar la construcción utilizando propiedades de una manera muy sencilla, ya que pueden asegurar la igualdad de las caras y que el tetraedro obtenido por estas simetrías es igual al tetraedro dado aunque no se evidencia en los estudiantes participantes que lo hayan realizado. El grupo G y C sin embargo, no utiliza la herramienta *Tetraedro*, lo construyen a partir de herramientas disponibles basadas en la definición de dicho poliedro regular y propiedades geométricas.

Gutiérrez y Jaime (2015) refieren a estudios cuyos resultados expresan que el uso del software permite a través de las construcciones mejorar la capacidad de visualización e intuición no solo centrando la atención en los aspectos visuales sino en las propiedades matemáticas involucradas. Las herramientas que ofrece el software brindan aspectos que favorecen la elaboración de argumentos que justifiquen los procedimientos de resolución lo que superaría inconsistencias entre los criterios utilizados en la resolución y aquellos que son verbalizados dado que al utilizar una herramienta determinada del software queda expuesta la propiedad y concepto involucrados. Podría decirse que la igualdad de los tetraedros que conforman las figuras tridimensionales construidas ("gemelos" por un vértice y bipirámide) es tan evidente para los estudiantes que no consideran la necesidad de justificarla. Como sostiene Sessa et al (2015) es trabajo del docente poner de manifiesto que las construcciones con el SGD requieren de cierta racionalidad matemática que permita validar las conclusiones obtenidas.

El uso del software contribuye a la formación de imágenes dinámicas lo que enriquece la formación del concepto figural. Gutiérrez y Jaime (2015) sostienen que

> La problemática derivada de la pobreza de las imágenes conceptuales es especialmente importante en geometría espacial. En la actualidad, el uso de programas de geometría dinámica 3-dimensional puede ser un complemento a los materiales manipulativos y a las representaciones estáticas en los libros de texto que ayude a los estudiantes a crear imágenes mentales adecuadas. (p. 59)

El uso del software según Gutiérrez y Jaime (2015) empleado de manera sistemática influye positivamente en el desarrollo de una correcta fusión entre la imagen y la definición.

Respecto al uso de no ejemplos de un concepto

El problema apunta a trabajar con no ejemplos de poliedro regular, en este caso, con poliedros que cumplan dos de las condiciones exigidas por su definición. Con esto se espera que los estudiantes valoricen las tres condiciones que deben cumplirse necesariamente para que el poliedro sea regular (caras polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de caras).

Si bien no se pretende generalizar resultados, lo analizado invita a una reflexión acerca del trabajo que se realiza con determinados conceptos geométricos, en este caso particular, el de poliedro regular. Cuando se intenta que el alumno construya un concepto figural sería interesante, además de hacer hincapié en la definición, presentar diversas imágenes del mismo tratando de que estén exentas de posiciones y formas estereotipadas. Como sostiene Guillén Soler (1997) es importante brindar imágenes ricas y desprovistas de posición y perfección al estudiante.

Generalmente no se tienen en cuenta los no ejemplos que corresponden al concepto que se trabaja, lo cual sería enriquecedor para la formación de imágenes (Vinner y Dreyfus, 1989) y les permitiría a los estudiantes ganar experiencias para la construcción de conceptos más abstractos (Tall, 1989). Las experiencias con los no ejemplos pueden influir en la necesidad del estudiante de recurrir a la definición y no quedarse sólo con el aspecto figural para decidir si una imagen es representante o no del concepto que se está desarrollando. El trabajo con no ejemplos brinda un conjunto fructífero de imágenes no estereotipadas con las que el alumno puede contraponer la definición y exige al estudiante recurrir constantemente a la definición contrastando la imagen.

Se considera este aspecto muy importante ya que en general las figuras que proveen los libros de texto son estereotipadas y corresponden solo a ejemplos del concepto. Con respecto al software GeoGebra la herramienta *Tetraedro*, por ejemplo, refiere a la construcción de un tetraedro regular lo que podría limitar a los estudiantes a pensar que un tetraedro siempre es regular. De igual modo ocurre con el resto de los poliedros regulares. El uso de no ejemplos apunta a romper con esta interpretación errónea. Por este motivo el problema propuesto en este artículo se basa en la construcción de un no ejemplo.

La presentación de no ejemplos de esta manera contribuye a reflexionar sobre las condiciones que se expresan en la definición y a pensarla como una condición necesaria y suficiente analizando las restricciones formales del concepto además de enriquecer las imágenes visuales redundando en beneficio de la construcción del concepto figural.

Se pretende poner en evidencia la necesidad de analizar todas las condiciones que debe cumplir una definición. La propuesta presentada, al considerar que existen poliedros que cumplen algunas de las condiciones exigidas por la definición de poliedro regular y no otras, contrapone lo que generalmente se presenta en los libros de texto de nivel superior en los que solo se analiza la existencia de los poliedros regulares.

Las ventajas que propone la utilización de no ejemplos fundamenta la elección de esta propuesta que solicita especialmente construcciones de no ejemplos. Los estudiantes de los grupos G y C y T y M no consideraron relevante el uso de la definición de poliedro regular al comienzo de la resolución del problema. No obstante, la aparición de estos no ejemplos en su componente figural los hace reflexionar sobre la existencia de poliedros que cumplen algunas de las condiciones exigidas por la definición y no otras. Luego de la presentación del trabajo realizado de los tres grupos con el empleo del software, la estudiante C cuestiona la herramienta *Tetraedro* de GeoGebra ya que limita la construcción a un tetraedro regular. Esto da cuenta que el uso de los no ejemplos influye en la formación del concepto figural de poliedro regular dado que permite pensar que existen tetraedros que no son regulares.

El trabajo con software de geometría dinámica y materiales manipulativos, si se presentan tanto ejemplos como no ejemplos sin dejar de lado la definición de los conceptos, podría contribuir positivamente en la formación de conceptos figurales.

Para continuar el trabajo sería interesante efectuar el análisis de lo realizado por estudiantes en otros problemas de la secuencia donde se presentan otros tipos de poliedros, según la categorización realizada en el punto 4.1 de propuesta de trabajo, que también constituyen no ejemplos de poliedro regular. Este estudio podría dar más indicios acerca de la influencia del uso de no ejemplos en la fusión entre las imágenes y definición del concepto de poliedro regular.

REFERENCIAS

Argentina. Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada.* Recuperado de https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf

Argentina. Ministerio de Educación. (2012) *Núcleos de aprendizaje prioritarios Campo de formación general Ciclo Orientado Educación Secundaria*. Recuperado de http://entrama.educacion.gov.ar/uploads/nap/6-Matem%C3%A1tica%20OR%20completa.pdf

Argentina. Ministerio de Educación. (2011) *Núcleos de aprendizaje prioritarios Ciclo Básico Educación Secundaria*. Recuperado de http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL004315.pdf

Fischbein, E. (1993) *The theory of figural concepts.* Revista Educational Studies in Mathematics.24 (2): 139-162.

Grossi, S. y Sgreccia, N. (2016).Perspectivas docentes acerca de habilidades de representación y comunicación de lo tridimensional.En *Libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM* (pp. 73-79). Recuperadode http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Guillén Soler, G. (2000) Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias*, *18*(1), 35-53.

Guillén Soler G. (1997)*El mundo de los poliedros*. Madrid, España: Síntesis.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015) Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, *9*(2), 53-83.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H. (2007) *La matemática escolar.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Lakatos, I. (1978) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid, España: Alianza Editorial.

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. 5° edición. Madrid, España: Pearson. Addison Wesley.

Puig Adam, P. (1980) *Curso de geometría métrica. Tomo I. Fundamentos*. Madrid, España: Gómez Puig Ediciones.

Schaefer, L. y Sgreccia, N. (2016). Conocimiento especializado del contenido al enseñar a medir segmentos y ángulos a futuros profesores en matemática. En*Libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM* (pp. 66-72). Recuperado de http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Sessa, C., Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R. Di Rico, E. y Duarte, B. (2015) La actividad docente mediada con TIC. La transformación del trabajo matemático en el aula del secundario a partir de la integración de las computadoras. En A. Pereyra y D. Fridman (Ed.) *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense.* (pp. 137-164) Buenos Aires, Argentina: UNIPE: Editorial Universitaria.

Tall, D. (1989).Concept images, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics,9*(3), 37–42.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989) Images and definitions for the concept of function.*Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Ana María Mántica

Domicilio postal: Avellaneda 5094. Santa Fe. Argentina. CP: 3000

Teléfono: +54 3424558036

 DOI: 10.24844/EM3101.09

Promover o ensino da matemática num contexto de formação profissional com STEM

Promote mathematics teaching throught a teachers' professional development context with STEM

Maria Cristina Costa[1]
António Domingos[2,3]

Resumo. Este artigo descreve uma forma de promover o ensino da matemática, através de um contexto formativo que envolve atividades experimentais *hands-on* de STEM, recorrendo ao questionamento investigativo. Com uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa, daremos conta deste contexto formativo, dando destaque à forma como a matemática foi trabalhada, a partir do tópico do som. Serão apresentados, com mais pormenor alguns estudos de caso envolvendo professores que implementaram este tema, de forma interdisciplinar. Conclui-se que é possível trabalhar a matemática, a partir de STEM, ao nível do ensino básico, através de um contexto de desenvolvimento profissional colaborativo, onde os professores são apoiados na implementação das suas práticas.

Palavras chave: *Desenvolvimento profissional, hands-on, STEM, interdisciplinaridade, questionamento investigativo.*

Fecha de recepción: 23 de noviembre de 2018. **Fecha de aceptación:** 23 de octubre de 2018.

[1] UIED, UDMF, ESTT do Instituto Politécnico de Tomar, Portugal, ccosta@ipt.pt

[2] UIED, DCSA, FCT da Universidade NOVA de Lisboa, Portugal, amdd@fct.unl.pt

[3] This work is supported by national funds through FCT - Foundation for Science and Technology, I. P., in the context of the project PTDC/CED-EDG/32422/2017

Abstract. This paper describes a way to promote the teaching of mathematics, through a professional development context that involves STEM hands-on experiments applied resorting to the inquiry approach. With a qualitative methodology and an interpretative approach, we investigate how teachers developed mathematical tasks, from the sound topic, according to school syllabus. We also present some case studies, involving teachers who implemented this theme in an interdisciplinary way. It is concluded that it is possible to work mathematics based on STEM experiments, at primary schools, through a collaborative teachers' professional development context, that supports the teachers when they implement their practices.

Keywords: *Professional Development, hands-on, STEM, interdisciplinarity, inquiry.*

1. INTRODUÇÃO

Este artigo descreve uma forma de promover o ensino da matemática, ao nível do 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB), através de um contexto formativo que envolve atividades experimentais *hands-on* de STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) implementadas recorrendo ao questionamento investigativo. A principal questão que queremos investigar é: Em que medida os professores que participaram num contexto formativo com STEM criam e implementam tarefas relacionadas com o som, nomeadamente tarefas que envolvem a matemática? Quais as características deste contexto formativo que motivam os professores para se envolverem neste tipo de práticas?

A formação de professores envolve *workshops* onde são introduzidos tópicos relacionados com STEM, tais como astronomia, matemática, eletricidade, som, robótica e tecnologia, entre outros. Os formadores, responsáveis pela condução dos *workshops*, são professores do ensino superior (universitário e politécnico) e investigadores nas áreas das ciências da educação, matemática, física, engenharia informática, engenharia eletrotécnica e de computadores, e tecnologias da informação e comunicação.

Em Portugal, o 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB) é constituído por quatro anos de escolaridade (dos 6 aos 10 anos), onde são ministradas as áreas curriculares de Matemática, Português e Estudo do Meio. Relativamente à Matemática uma das três finalidades assinaladas nas orientações metodológicas, é a análise do mundo natural (Ministério da Educação, 2013):

> A Matemática é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nos rodeia (...) o domínio de certos instrumentos matemáticos revela-se essencial ao estudo de fenómenos que constituem objeto de atenção em outras disciplinas do currículo do Ensino Básico (M.E., 2013, p. 2).

A interdisciplinaridade e o questionamento investigativo estão patentes nos princípios orientadores da organização curricular e programas, das áreas curriculares de Estudo do Meio e de Matemática do 1.º CEB. Nestes princípios orientadores é referido que "o Estudo do Meio está na intersecção de todas as outras áreas do programa, podendo ser motivo e motor para a aprendizagem nessas áreas." (ME, 2007, p. 101). Nos objetivos gerais do mesmo programa destaca-se que o aluno deve:

> Utilizar alguns processos simples de conhecimento da realidade envolvente (observar, descrever, formular questões e problemas, avançar possíveis respostas, ensaiar, verificar), assumindo uma atitude de permanente pesquisa e experimentação. (ME, 2007, p. 103)

As indicações metodológicas são que "A curiosidade infantil pelos fenómenos naturais deve ser estimulada e os alunos encorajados a levantar questões e a procurar respostas para elas através de experiências e pesquisas simples" (ME, 2007, p. 115). Recomenda-se, ainda, que os alunos devem usar instrumentos de observação e medida, sendo importante que os mesmos façam registos daquilo que observam.

As Ciências são ministradas na área curricular de Estudo do Meio, a qual dispõe de cerca de três horas semanais (Ministério da Educação, 2007). Nesta área curricular, o som está enquadrado no domínio "Conhecimento do Meio Natural e Social" e subdomínio "Viver Melhor a Terra".

O estudo, aqui apresentado, faz parte de um projeto de intervenção pedagógica mais amplo, com início em 2013 (www.academiacap.ipt.pt), que envolve atividades laboratoriais de STEAMH (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics and Heritage) promovidas por uma instituição do ensino superior em Portugal (Costa & Domingos, 2018). No âmbito deste projeto, o som foi trabalhado com os participantes nas férias escolares e nas visitas às escolas

(Ferreira, Neves, Costa e Teramo, 2017) passando de seguida a ser trabalhado com os professores, no contexto formativo acima descrito, de forma interdisciplinar procurando motivar os professores para também trabalharem a matemática.

O projeto mais amplo assenta numa metodologia baseada em *Teacher Design Research* (Bannan-Ritland, 2000), com o objetivo de promover o desenvolvimento profissional dos professores, correspondendo cada ano letivo a um ciclo de *Design Research*. Este artigo tem por base os dados recolhidos em dois anos letivos (2015/2016 e 2016/2017), procurando-se investigar que tarefas relacionadas com o som são criadas e implementadas pelos professores, nomeadamente tarefas que envolvem a matemática.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Vários autores (Osborne & Dillon, 2008; Rocard *et al.*, 2007) identificam um declíneo no interesse dos jovens pelas STEM, o que irá comprometer o futuro das próximas gerações. Os mesmos autores salientam a necessidade de novas estratégias de ensino que despertem o interesse por estas áreas, realizando atividades experimentais centradas nos estudantes, relacionandoas com aspetos do seu dia a dia. Das várias estratégias recomendadas, destaca-se o *inquiry* (questionamento investigativo), como uma abordagem que dá mais espaço à observação, experimentação e construção, dando oportunidade à criança de construir o seu conhecimento, orientada pelo professor (PRIMAS, 2010; Rocard *et al.*, 2007).

Realizar atividades experimentais *hands-on* usando o questionamento investigativo, conduz a melhorias significativas no desempenho dos alunos e desenvolve atitudes positivas relativamente à matemática e às ciências (Mody, 2015). Os professores reconhecem que esta abordagem capta a atenção dos estudantes ao colocá-los a pensar "fora da caixa", tornando a sua aprendizagem significativa (Gillies & Nichols, 2015).

Em Portugal, também são cada vez mais as recomendações para um ensino interdisciplinar e centrado nos estudantes, onde se promove a resolução de problemas da vida real, estando patentes no programa para o ensino básico e, também, no projeto de autonomia e flexibilidade curricular dos ensinos básico e secundário (Diário da República, 2017).

As ciências devem ser usadas para promover a interdisciplinaridade, por favorecerem a aprendizagem de outras áreas curriculares (Abell & McDonald, 2006) e a sua integração no currículo prepara melhor os estudantes para a vida real (Beane, 1995). Relacionar a matemática com as ciências e tecnologia tem sido amplamente defendido por vários autores (Berlin & Lee, 2005) mas não é fácil concretizar este objetivo (Baxter, Ruzicka, Beghetto, & Livelybrooks, 2014). Treacy e O'Donoghue (2014) referem a existência de pouca investigação sobre a integração da matemática e ciências, bem como a falta de um modelo de ensino que englobe esta integração. Kim e Bolger (2016) defendem a criação de um currículo que integre as ciências e a matemática, devendo-se envolver os professores no desenvolvimento de lições interdisciplinares adequadas a esta abordagem. A integração de STEM deve ser feita nos primeiros anos de escolaridade, através do desenvolvimento profissional dos professores (Kermani & Aldemir, 2015).

Os professores são a pedra basilar de qualquer processo de renovação pedagógica (Rocard *et al.*, 2007). O sucesso de qualquer intervenção nas escolas não é possível sem o seu desenvolvimento profissional (Hewson, 2007). Além disso, ser parte de uma rede contribui para melhorar a qualidade do ensino (Rocard *et al.*, 2007). É neste sentido que Geiger, Goos, Dole, Forgasz e Bennison, (2014) sugerem uma parceria entre investigadores e designers, que promova a integração de tarefas com abordagens pedagógicas adequadas, para melhorar o ensino e aprendizagem.

Ball (2003) refere que para melhorar a aprendizagem da matemática, é crucial dar oportunidades de aprendizagem aos professores, sendo fundamental o desenvolvimento cuidadoso de cursos, *workshops* e materiais bem desenhados e administrados. Os professores devem trabalhar e experimentar, os conteúdos e tarefas que se espera que venham a desenvolver em aula, num ambiente de reflexão onde se sintam apoiados (Afonso, Neves, & Morais, 2005). As inovações devem ser apropriadas pelos professores que as implementam e transformadas na sua própria prática de modo a terem efeitos reais (Zehetmeier, Andreitz, Erlacher, & Rauch, 2015). Num estudo preliminar Costa e Domingos (2017) concluem que é importante desenvolver o conhecimento dos professores sobre os tópicos de ciências e matemática, num ambiente colaborativo, onde se sentem apoiados, de modo a ganharem motivação e confiança para inovarem as suas práticas.

Ferreira *et al.* (2017) integram o som com as tecnologias recorrendo a um paradigma socioconstrutivista e concluem que esta abordagem promove o interesse das crianças e dos jovens pelas STEM. Neste estudo, recomendam implementar esta abordagem num contexto de formação profissional de professores promovendo a interdisciplinaridade.

Face ao exposto, os professores são a pedra basilar de qualquer processo de renovação pedagógica, sendo crucial promover o seu desenvolvimento profissional. Neste sentido, recomenda-se uma parceria entre investigadores e professores de forma a criar um contexto formativo colaborativo, onde os professores se sintam apoiados e tenham oportunidade de praticar o que se espera que venham a desenvolver em aula.

3. METODOLOGIA

Foi com base nos pressupostos e conclusões anteriores que foi criado o contexto formativo de professores que conduziu à investigação que aqui apresentamos. Neste sentido, foi realizado um trabalho colaborativo entre professores do ensino superior, centros de formação e agrupamentos de escolas para criar e desenvolver um programa de formação que responda às necessidades dos professores da região.

É inquestionável a necessidade de atualizar os conhecimentos dos professores sobre as matérias que lecionam e sobre o conhecimento pedagógico para ensinar (Hewson, 2007). Este é um dos motivos porque a formação contínua de professores é obrigatória em vários países, como é o caso de Portugal (OECD; 2014). No nosso país, compete ao Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua proceder à acreditação das ações de formação contínua de professores e acompanhar o respetivo processo de avaliação (http://www.ccpfc.uminho.pt/). As ações de formação frequentadas pelos professores, participantes no estudo, foram acreditadas por este Conselho de Formação e consistem num total de 26 horas distribuídas por vários *workshops* ao longo de um ano letivo, com de 2 a 4 horas cada. Nestes *workshops*, os professores trabalham os conteúdos e manipulam os materiais, com o objetivo de conseguirem realizar as tarefas propostas com os respetivos alunos. Usando a pedagogia do questionamento investigativo, procura-se que os tópicos introduzidos sejam implementados de forma interdisciplinar, nomeadamente trabalhando a matemática. Após cada *workshop*, sobre cada um dos temas trabalhados, é solicitado aos professores que apresentem propostas de tarefas destinadas a implementar com os seus alunos, que integrem o tema abordado de forma interdisciplinar, nomeadamente com a matemática. No final de cada ciclo de *Teacher Design Research* (TDR), os professores apresentam uma reflexão crítica sobre o impacto da formação recebida, descrevendo as práticas desenvolvidas com os seus alunos.

Uma particularidade deste programa de formação tem a ver com as visitas dos formadores à sala de aula dos professores, quer para realizar atividades experimentais *hands-on*, com os respetivos alunos (a fim de as exemplificar), quer para os ajudar, apoiar e observar nas tarefas por eles implementadas. Dos vários temas abordados na formação daremos destaque às tarefas de matemática criadas a partir do tópico do som.

Nesta investigação iremos usar uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa com recurso a estudos de caso (Cohen, Lawrence, & Keith, 2007). Os dados são recolhidos, essencialmente, a partir de observações participantes e de relatórios apresentados pelos professores. Para interpretar melhor alguns casos serão realizadas algumas entrevistas semiestruturadas. Um estudo de caso é uma investigação empírica que se debruça sobre um fenómeno contemporâneo dentro do seu contexto de vida real podendo permitir uma generalização dos resultados obtidos (Yin, 2005). Recorremos, assim, ao estudo de caso de professores que participaram no contexto formativo, acima descrito, para descrever a forma como estes desenvolveram as tarefas relacionadas com o som com os respetivos alunos.

A primeira autora deste artigo é observadora participante, sendo responsável pela escrita dos diários e pela coordenação do projeto mais amplo. O segundo autor é responsável pela triangulação e validação de toda a informação envolvida. A observação participante decorre essencialmente nos *workshops* da formação presencial com os professores e nas visitas às respetivas aulas.

3.1. Participantes

No ano letivo 2015/2016, participaram no programa de formação de 14 professores do sexo feminino de cinco escolas, com idades compreendidas entre os 42 e 58 anos e mais de 17 anos de serviço. No ano letivo 2016/2017 participaram 37 professores do sexo feminino e um do sexo masculino, de catorze escolas do 1.º Primeiro Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB), com idades compreendidas entre os 35 e os 61 anos de idade e mais de 10 anos de experiência de ensino.

Neste artigo, os participantes são quatro professores do 1.º CEB, envolvidos em pelo menos um dos anos letivos 2015/2016 e 2016/2017, correspondentes a dois ciclos de TDR. Começamos por destacar as perceções de uma professora que descrevem o contexto formativo. De seguida, fazemos estudos de caso de três professores que trabalharam o som. Um caso em que a professora não promoveu a interdisciplinaridade apesar de a sugerir e outro em que os professores criaram e implementaram tarefas de matemática relacionadas com o som. Para preservar a identidade dos participantes todos os nomes apresentados são fictícios.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS

Nesta seção introduzimos o contexto formativo que se devolveu durante dois anos letivos, descrevendo o tópico do som e a forma como este foi trabalhado, quer nas sessões presenciais com os professores, quer nas visitas às escolas. De seguida, discutimos com mais pormenor as conceções de alguns dos professores que participaram neste contexto formativo passando de seguida aos estudos de caso.

4.1 O tópico do Som

Nas ações de formação, destinadas aos professores, o som é introduzido de forma teórico prática, sendo realizadas diversas atividades experimentais *hands-on*, relacionadas com este tema, recorrendo a diversos equipamentos. Alguns destes equipamentos são protótipos, desenvolvidos pelos formadores (professores na área da engenharia eletrotécnica e de computadores), sendo alguns deles no âmbito de projetos finais de curso, em colaboração com alunos finalistas, quer de licenciatura, quer de mestrado da instituição onde lecionam. Além disso, também são usados recursos computacionais, tais como *softwares* gratuitos que permitem medir a frequência e/ou intensidade do som, ou gerar/reproduzir áudio, bem como editar/visualizar a forma da onda e do espectro do som (Ferreira *et al.*, 2017).

Nas sessões com os professores são dadas várias ideias de implementação de atividades experimentais para usar em aula. Por exemplo, é sugerido que se façam medições do ruído através do *sofware Sound Meter,* ou que os alunos procurem ver nas suas casas o ruído produzido pelos seus eletrodomésticos, como a máquina de lavar roupa ou o frigorífico. Depois de fazerem os registos, devem partilhar os resultados com a turma para fazerem a discussão e tratamento dos dados resultantes. Nesta altura, os professores fazem sugestões, como por exemplo gráficos de barras ou diagrama de caule e folhas. No entanto, nem sempre as concretizam, a não ser por insistência do formador, o que reforça a importância de haver apoio aos professores e acompanhamento, para estes inovarem as suas práticas.

Nas visitas dos formadores às aulas dos formandos para exemplificar as atividades, as sessões decorrem recorrendo ao questionamento investigativo, inquirindo os alunos sobre os conceitos em estudo, valorizando as experiências e conhecimentos individuais dos mesmos, levando-os a realizar e visualizar experiências, de modo a que consigam tirar conclusões. Para aferir sobre os conhecimentos dos alunos sobre o som, é realizado um questionário antes e depois da sessão destinada a este tema. Com este questionário, pretende-se por um lado identificar as perceções dos alunos sobre o som e, por outro, aferir se estas se alteraram após a sessão sobre o som. Até à escrita deste artigo o questionário já foi aplicado a mais de uma centena de alunos, distribuídos por várias turmas, dos 3.º e 4.º anos, do 1.º CEB. A figura 1 apresenta um exemplo de respostas, de um aluno, à questão n.º 2: "Faz um desenho sobre o que achas que é o som".

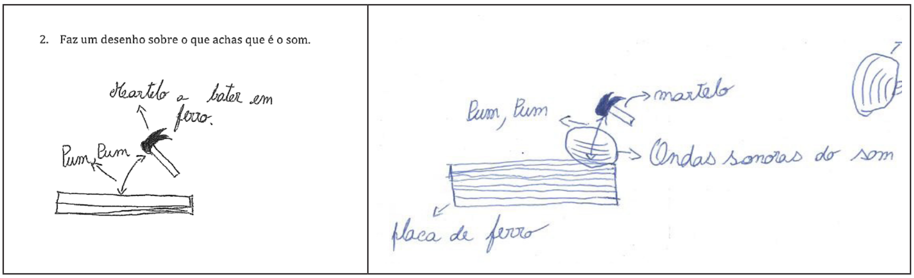


Figura 1. Resposta à questão n.º 2, antes e depois da sessão.

Nesta figura, é notório que o aluno associou o som ao ruído (assim como a maioria dos colegas) e aprendeu que o som é uma onda, tal como foi introduzido pelos formadores.

A figura 2 apresenta outro exemplo, neste caso, das respostas de um aluno à questão n.º 5, relacionada com a velocidade do som.

5. O que viaja mais depressa? O som ou a luz?

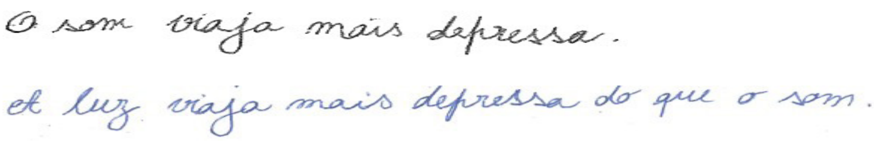


Figura 2. Resposta à questão n.º 5, antes e depois da sessão.

Praticamente todos os alunos acham que o som é mais rápido do que a luz. Depois de questionados sobre "porquê?" esta ideia, muitos respondem "ouve-se logo o barulho".

Um exemplo usado para fazer a comparação entre o som e a luz é o fenómeno atmosférico da trovoada. Os formadores mostraram vídeos de trovoadas, onde claramente se via a luz (o relâmpago) e só mais tarde se ouvia o som. Os mesmos vídeos foram aproveitados para calcular a distância a que estava a trovoada, a partir do tempo que demorava a ouvir-se o trovão depois de observado o relâmpago.

No final, analisadas as respostas dos alunos aos questionários aplicados, verificou-se que todos os alunos responderam acertadamente a esta questão, assim como também interiorizaram que o som é uma onda que se propaga.

Estas experiências com os alunos são exemplificativas para os professores em formação, mas também são importantes para os formadores, porque o feedback dos alunos também os ajuda a preparar melhor a formação dos professores, no sentido de a adequar às necessidades dos mesmos, para uma maior eficácia da intervenção nas escolas.

5.1 As perceções da professora Aúrea relativamente ao contexto formativo

Vamos começar por apresentar as perceções e reflexões da professora Aúrea (61 anos), por entendermos que estas retratam o contexto formativo. O seguinte excerto de um relatório final (RF) desta professora mostra as espectativas iniciais que ela tinha sobre a formação que escolheu frequentar, bem como sobre a pertinência da mesma:

> Tornava-se fundamental frequentar uma formação que concorresse para cabalmente configurar o modo de operacionalizar conteúdos, porventura envoltos nalguma opacidade, atenuasse ou resolvesse alguns hiatos nos meus conhecimentos teórico científicos e que transversalmente me proporcionasse uma reflexão coletiva sobre temas de Matemática, Ciências e Tecnologia através do encontro com outros professores e com especialistas teórico-práticos, para poder projetar um percurso de ensino/aprendizagem da minha turma, com mais qualidade e potenciador do sucesso dos meus alunos (RF, junho de 2017).

A professora reconhece que a principal inovação desta formação tem a ver com a abordagem usada na mesma, enfatizando a grande componente experimental, tal como indica o seguinte excerto da sua reflexão final:

> A etiqueta dada pelos formadores a esta oficina de formação foi: Matemática, Ciências e Tecnologia: uma abordagem experimental no Ensino Básico. (...) Quanto a mim, é exatamente na ação, na abordagem experimental que se centram a inovação e as novas asserções sobre o ensino/aprendizagem das ciências. Deixou de haver, segundo parece, um entendimento didático determinado e enformado por uma série de exercícios pré-estabelecidos e de resultados exatos. Há sim uma descentralização da ação do professor do resultado para o processo e, nesta perspetiva, atrevo-me a dizer que muitos dos manuais existentes não correspondem a esta visão de ensino, porque raramente enfatizam as tarefas propulsoras das verdadeiras caminhadas experimentais (RF, junho de 2017).

Logo na primeira reflexão, apresentada pela professora, após a primeira sessão presencial de formação, que decorreu em janeiro de 2017, ficaram patentes as metodologias e estratégias a implementar com os alunos em aula:

> Ficaram subjacentes três ideias transversais: construir modelos mentais que façam sentido; incutir nos alunos o "empoderamento" isto é, levá-los a acreditarem que são capazes de construir a sua aprendizagem e finalmente projetar um ensino baseado em experiências, manipulações e vivências (aliás como foi apanágio desta sessão, onde tivemos vários momentos práticos demonstrativos) (...) Registo com muito apreço a abordagem clarividente do formador que promoveu o diálogo entre as metodologias de ensino e as ciências. (Relatório, janeiro de 2017)

Mais uma vez, Aúrea destaca a forte componente experimental e as metodologias propostas nesta formação, como indica o seguinte excerto:

> Todas as tarefas experimentais partiram de situações problemáticas que serviram de ponto de partida e de ponto de chegada do processo de ensino/aprendizagem. Na verdade, o trabalho experimental promove nos alunos capacidades de exploração, conjeturas e raciocínio lógico.
> Esta formação permitiu não a repetição de ideias e fórmulas feitas, sejam elas da ordem do conteúdo, das metodologias ou dos materiais, mas sim um desenvolvimento de saberes consistentes, construídos a partir da reflexão sobre os materiais e as tarefas apresentadas pelos formadores. (RF, junho de 2017)

A professora Aúrea conclui dizendo que a formação contribuiu para reforçar os seus conhecimentos e melhorar a sua atuação em aula:

> Estou certa que reforcei os conhecimentos e a sensibilidade necessária para poder melhorar a minha atuação na sala de aula, utilizando as variações e modelações que me foram (...) (RF, junho de 2017).

Quanto às propostas de tarefas da professora, para realizar em sala de aula, foram as relacionadas com a astronomia que mais promoveram a interdisciplinaridade com a matemática. No entanto, apesar de ter implementado tarefas relacionadas com a eletricidade e com o som, faltou explorar, com mais profundidade a parte da interdisciplinaridade, não apresentando, neste tópico, tarefas que envolvessem a matemática.

5.2. As propostas dos professores relacionadas com o som

Foram vários os professores que fizeram propostas de atividades relacionadas com o som tais como construção de um megafone, de um telefone de cordel, de um estetoscópio, xilofone colorido, exemplificação da propagação do som através de uma mola, produção do som por vibração, observar que o som faz vibrar areia ou açúcar, entre outros.

Muitos professores construíram com os seus alunos o protótipo que permite visualizar a voz, que lhes foi apresentado na formação, utilizando para tal um guião que lhes foi anteriormente fornecido. Praticamente todos os professores que realizaram experiências *hands-on* reportaram o grande entusiasmo e empenho das crianças no decorrer das atividades. O entusiasmo e a participação dos alunos com empenho, nestas visitas, acaba por ser um fator que motiva e "convence" os professores que vale a pena realizar este tipo de abordagem. Este aspeto também é referido quando os formadores dinamizam atividades experimentais com os alunos dos formandos. Nos relatórios finais, estes manifestam a importância destas intervenções e insistem que estas devem continuar porque são muito enriquecedoras para os alunos e é sempre um momento especial e diferente no dia a dia dos mesmos. Este é um dos motivos que nos leva a concluir que sobre a importância destas demonstrações, em aula, para continuar a motivar os professores para estas abordagens.

Muitos relatórios dos professores, apresentam propostas de tarefas que incluem planos de aula e fichas de trabalho, criadas pelos próprios, para trabalharam com os alunos. Foram vários os que dão conta de como o trabalho foi desenvolvido com os alunos, através de fotografias que ilustram a realização das atividades e, ainda, com o trabalho feito pelos alunos, nomeadamente as respostas destes às questões das fichas, criadas pelos professores sobre os temas trabalhados.

De seguida, apresentaremos estudos de caso de professores que trabalharam o som quer recorrendo ao questionamento investigativo quer de forma interdisciplinar.

5.3. O percurso da professora Mariana

A professora Mariana (53 anos, 28 anos de serviço) participou no programa de formação no ano letivo 2015/2016 (1.º ciclo de TDR). Para além das sessões presenciais com os restantes professores, a turma de Mariana (4.º ano do 1.º CEB) recebeu os formadores para realizar experiências laboratoriais relacionadas com o som. Os formadores levaram equipamentos laboratoriais e usaram o questionamento investigativo para conduzir os alunos nas tarefas, levando-os a experimentar, discutir ideias e, por fim, tirar conclusões. Durante este processo, a professora assumiu uma postura de observadora, atenta às atividades realizadas pelos formadores com os alunos. Apesar de ter frequentado o workshop sobre o som a professora deixou os formadores conduzirem as várias atividades experimentais.

Mariana referiu já ter frequentado várias formações de ciências e que gostava de fazer algumas atividades relacionadas com as propostas no manual de

Estudo do Meio, mas que nenhuma era igual às que os formadores estavam a implementar. A professora referiu, ainda, que esta formação melhorou as metodologias habituais, nomeadamente a introdução do questionamento investigativo que reconhece ser eficaz para promover a aprendizagem dos alunos.

Numa outra sessão, a Mariana propôs fichas de trabalho para aferir os conhecimentos dos alunos, sobre o que foi trabalhado em sala de aula, de acordo com o sugerido pelos formadores. O questionamento investigativo foi posto em prática nas várias questões colocadas pela professora para despertar a curiosidade dos seus alunos e, também, para os conduzir no decorrer das tarefas, com vista à aprendizagem (figura 3).

	
Porque é que o açúcar começa a dançar em cima do plástico quando batemos no prato de metal?	Porque é que ouvimos diferentes sons a partir dos frascos? Será que a cor da água tem alguma influência nestes sons?

Figura 3. Exemplo do questionamento investigativo aplicado durante a realização da atividade experimental

No seu relatório final Mariana manifesta alguma insegurança, provocada pela falta de conhecimento de conteúdo pedagógico: "(...) falta de preparação dos professores para desenvolverem esta metodologia e a falta de conhecimentos/fundamentação científica que promove a nossa insegurança". No entanto, reconhece a importância da formação recebida: "Adquirimos mais conhecimentos para melhorar as nossas práticas sobre o ensino das Ciências e da Matemática junto dos alunos." E continua dizendo: "Com estas atividades práticas os alunos puderam mexer e manusear coisas e objetos, pensar, refletir, planear, interpretar e discutir as situações estudadas." O conhecimento pedagógico desta professora destaca-se quando refere:

> Privilegiámos o trabalho de grupo, tornando-os mais autónomos, mais sociáveis e responsáveis. Não descurámos todos os conhecimentos e conceções que os alunos possuíam e deveremos ter como ponto de partida esses conhecimentos para qualquer objeto de estudo (RF, junho 2016).

A interdisciplinaridade é referida pela professora quando fala em competências que poderão ser exploradas em disciplinas como o Português, Matemática, Cidadania e dando exemplos de como isso poderá ser feito:

> **Português**, recolhendo informação em textos sobre os assuntos em discussão, descrevendo uma ou mais experiências que efetue, utilizando vocabulário científico, partilhando saberes...,
> **Matemática**, construindo e interpretando gráficos, tabelas, cálculos, ... (RF, junho 2016).

Em resumo, notou-se uma evolução na professora Mariana ao longo da formação recebida e na forma como ela recorre a esse conhecimento, para o desenvolvimento de tarefas em sala de aula. Apesar da professora propor várias tarefas relacionadas com as ciências, ela apresentou poucas evidências de aplicações destes temas à matemática. No entanto, o questionamento investigativo foi aplicado no decorrer das tarefas (figura 3).

Tal como a professora Mariana, no primeiro ciclo de TDR, quase não houve evidências de tarefas interdisciplinares relacionadas com o som que envolvessem a matemática. Estes foi um dos aspetos que nos levou a reformular o segundo ciclo de TDR, de forma a insistir mais na importância de promover a interdisciplinaridade, nomeadamente criar tarefas de matemática a partir das atividades experimentais relacionadas com STEM. Neste sentido, foram dados mais exemplos desta abordagem bem como sugestões de implementação em aula. Nas visitas às turmas dos formandos, também se insistiu nesta abordagem incentivando os formandos a implementarem as ideias que entretanto apresentavam aos formadores. Foi o caso dos professores que apresentamos de seguida.

5.4. O professor Anacleto e a professora Micaela

Os professores, Anacleto e Micaela, participaram na formação no ano letivo 2016/2017 (2.º ciclo de TDR) e escolheram trabalhar a matemática com os alunos, a partir do tópico do som. Micaela (48 anos, 27 anos de serviço) era titular de uma turma do 2.º ano do 1.º CEB, com 16 alunos. Anacleto (48 anos, 27 anos de serviço) sem turma atribuída desenvolveu, em conjunto com a Micaela, as atividades para serem implementadas na turma de Micaela.

Os professores começaram por introduzir o tema com a seguinte questão: “O que é o Som?”. De seguida pediram aos alunos para desenharem o que achavam que era o som. Alguns destes desenhos mostram-se na figura 4.

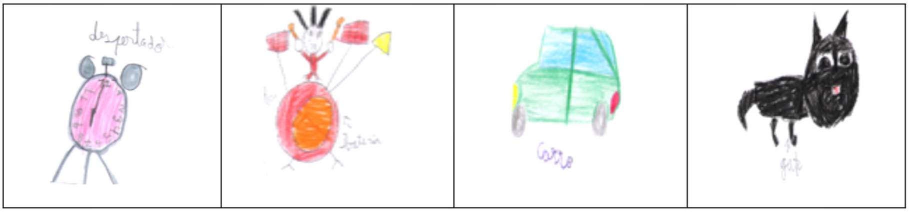


Figura 4. Perceções dos alunos relativamente ao som.

Depois de recolhidas as opiniões dos alunos, os professores conduziram os mesmos na procura de respostas às questões colocadas, recorrendo aos seus dicionários e à internet. Por exemplo, na Wikipédia aparece a seguinte definição: “É uma onda longitudinal que se propaga de forma circuncêntrica em meios materiais (sólidos, líquidos ou gasosos)”. Apesar de esta não ser uma definição adequada a alunos deste nível de escolaridade, o objetivo dos professores foi o de desenvolver práticas investigativas com os seus alunos. Além disso, os professores mostraram algumas imagens e vídeos que ilustravam a propagação do som como uma onda, de forma a dar significado à definição anterior.

Após mais alguma discussão de ideias sobre o que é o som, colocaram-se mais questões tais como: Para que serve o som? Como se produz? O que produz o som?

Novamente, ouvidas as opiniões dos alunos, passaram à discussão e investigação no sentido de obter respostas para as questões colocadas. De seguida, foi construído um protótipo (cujo guião foi disponibilizado no workshop sobre o Som) que permite “visualizar” o som da voz. Após mais algumas experiências para introduzir este tema, passou-se à medição da frequência do som (em hertz) e da intensidade (em decibéis), recorrendo a equipamentos e *softwares* tais como o *Sound Meter*. Um exemplo da medição da intensidade do som, com um dos alunos da turma, encontra-se na figura 5.

Ações / Decibéis	Sussurrar	Falar	Rir	Chorar	Gritar	Cantar	Bater Palmas
30							
40	X						
50							
60		X					
70							X
80			X	X	X	X	

Figura 5. Registo de medições do som em decibéis.

A medição apresentada na figura 5 foi realizada com todos os alunos da turma e o resultado encontra-se na figura 6.

	30	40	50	60	70	80	90
Sussurrar		12	4				
Falar				4	9	3	
Rir						16	
Chorar			3	13			
Gritar				3	8	5	
Cantar				4	8	4	
Bater palmas					16		

Figura 6. Resultado das medições do som em decibéis, dos alunos da turma.

Com os registos obtidos, a partir das medições realizadas com cada um dos alunos, foram construídos gráficos (Figura 7). No primeiro, cada "cara" representa dois alunos que registaram aquela intensidade de som (em decibéis) enquanto falavam. No segundo, estão representadas as frequências de audição dos alunos (em hertz) no eixo horizontal e o número de alunos no eixo vertical, correspondendo cada retângulo colorido às frequências de audição de cada um dos alunos.

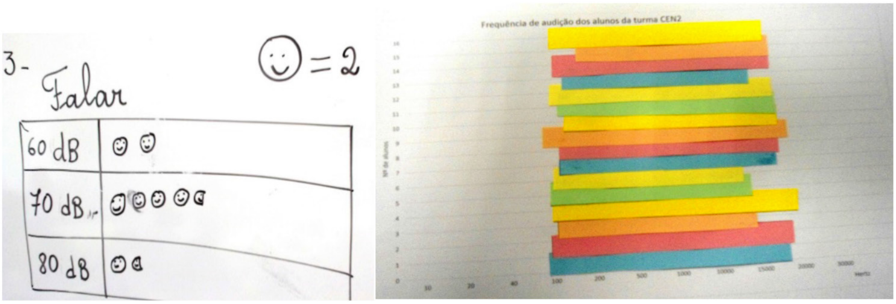


Figura 7. Organização e tratamento de dados.

Por fim, foram ainda realizados vários problemas, envolvendo cálculos a fim de trabalhar no contexto da matemática.

No relatório final, apresentado pela professora Micaela, esta reconhece que é possível trabalhar outros conteúdos a partir do som, fazendo uma abordagem transversal e destacando que:

> As atividades práticas implementadas com os meus alunos, em conjunto com o professor Anacleto, permitiram verificar que é possível fazer uma abordagem transversal de conteúdos, relacionando a matemática, o estudo do meio, a expressão musical e dramática, e revelaram que os alunos se motivam e empenham com muito mais facilidade neste tipo de tarefas (RF, junho 2017).

Micaela também refere inovações na aquisição de conhecimento de conteúdo pedagógico e das matérias a ensinar, reconhecendo que esta formação irá melhorar o seu desenvolvimento profissional:

> Saliento que a ação de formação contribuiu para a aquisição de novos conhecimentos que me permitirão melhorar o desempenho profissional e ter um impacto positivo na sala de aula, proporcionando aos alunos experiências diversificadas de aprendizagem e o desenvolvimento de competências científicas (Relatório final, junho 2017).

O professor Anacleto valoriza a forte componente prática da formação e o impacto que este tipo de abordagem teve nos seus alunos:

> Considero que esta formação vem trazer à minha prática letiva, um leque mais alargado de possibilidades de novas atividades, a realizar no contexto da sala de aula. O mais interessante mesmo, é que estas novas abordagens, que tivemos na formação, são na sua maioria, abordagens práticas, o que é muito bom. Com abordagens práticas os alunos ficam mais atentos e interessados, colaborando de forma mais ativa e empenhada, o que depois se nota na aprendizagem (RF, junho 2017).

Outro aspeto muito valorizado pelos professores é a visita dos formadores à sala de aula:

> Um dos pontos mais altos, penso que é mesmo a visita dos formadores/professores, às turmas, pois, trata-se de um momento único na sala de aula. Os alunos vão poder aprender/experimentar com a ajuda de técnicos credenciados e equipados com todo o material necessário (RF, Anacleto).

Os professores, Anacleto e Micaela, foram inovadores, no sentido em criaram tarefas relacionadas com o tópico do som que não estavam propostas nos manuais escolares, e promoveram a interdisciplinaridade, trabalhando a matemática e tecnologias, entre outros. Os professores também implementaram as tarefas recorrendo ao questionamento investigativo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os principais aspetos destacados pelos professores foram a forte componente prática, o ambiente colaborativo entre os pares e o apoio dos formadores, bem como a adequabilidade e pertinência dos tópicos abordados. As visitas às salas de aula, para além de serem muito apreciadas pelos professores, são úteis para os formadores pois esta experiência também os ajuda a preparar melhor a formação dos professores ao ficarem com a noção do impacto das atividades junto dos alunos. No entanto, nota-se que alguns professores continuam a preferir que sejam os formadores a conduzir as atividades, o que reforça a importância de continuar a promover o seu desenvolvimento profissional. Este aspeto tem vindo a ser assinalado por vários estudos internacionais (e.g., Murphy, Smith, Varley & Razı, 2015) que também referem que este processo demora tempo. Com a experiência adquirida em dois ciclos de TDR reconhecemos a importância do acompanhamento e do apoio aos professores, bem como do tempo necessário para concretizar com eficácia um projeto de intervenção pedagógica. Este aspeto foi notório ao se verificar a proposta e implementação por parte dos professores de tarefas interdisciplinares mais ricas no 2.º ciclo de TDR. Atribuímos esta diferença ao reforço do apoio aos professores dando a oportunidade aos mesmos de treinarem as tarefas propostas, bem como ao reforço do acompanhamento em aula.

Todos os professores que realizaram atividades experimentais destacaram a importância do apoio dos formadores, bem como a pertinência de realizar este tipo de atividades. Também destacam o entusiasmo e a reação dos alunos por esta abordagem, referindo, ainda, que esta é uma forma de promover a aprendizagem significativa. Defendemos que esta constatação por parte dos professores é um dos fatores que os motiva e faz reconhecer a importância de continuar a desenvolver este tipo de práticas.

A professora Aúrea refere que a abordagem experimental usada na formação, bem como as metodologias de implementação da mesma, nomeadamente a "descentralização da ação do professor do resultado para o processo", são promotoras de "tarefas propulsoras das verdadeiras caminhadas experimentais". Estas perceções da professora estão de acordo com vários estudos que indicam que um modelo de formação de professores que envolve o questionamento investigativo, em vez de um modelo centrado no professor, aumenta a probabilidade de estes adotarem formas de ensino mais construtivistas e centradas nos estudantes (OECD, 2014; PRIMAS, 2011). Deste ponto de vista, consideramos que este formato é promotor da eficácia do desenvolvimento profissional dos professores.

Os professores Anacleto e Micaela, inovaram as suas práticas, realizando atividades relacionadas com as STEM, que não eram habituais no seu quotidiano. Para além de criaram e implementaram diversas tarefas de matemática, a partir da atividade experimental relacionada com o som, reconheceram a importância de realizar este tipo de abordagem com os seus alunos.

Defendemos que foi o contexto formativo colaborativo com uma forte componente prática que motivou e deu confiança aos professores para realizarem atividades experimentais que não fazem parte da sua prática habitual. Tal como referem Afonso, Neves e Morais (2005), os professores devem experienciar o que se espera que venham a implementar com os respetivos alunos, num ambiente de grande apoio aos mesmos, de forma a tomarem como suas as práticas desenvolvidas. Este aspeto está de acordo com outros autores tais como Zehetmeier, Andreitz, Erlacher e Rauch (2015) que referem que as inovações devem ser apropriadas pelos professores que as implementam e transformadas na sua própria prática de modo a terem efeitos significativos. Consideramos que foi o que aconteceu com os professores Anacleto e Micaela que passaram por um processo de formação com STEM e desenvolveram as suas próprias práticas.

No 1.º ciclo de TDR praticamente não foram propostas tarefas interdisciplinares relacionadas com o som. Já no 2.º ciclo, os professores Anacleto e Micaela são exemplos de como podem ser desenvolvidas tarefas interdisciplinares relacionadas com o som. Consideramos que foi o contexto formativo onde foi reforçada a componente prática e o apoio aos professores que levou os professores a inovarem as suas práticas.

Conclui-se que é possível trabalhar a matemática, a partir do som, através de um contexto de desenvolvimento profissional colaborativo, que exemplifica esta abordagem e onde os professores são apoiados na implementação das suas práticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abell, S. K., & McDonald, J. T. (2006). Envisioning a curriculum of inquiry in the elementary school. In L. B. Flick & N. G. Lederman (Eds.), *Scientific inquiry and nature of science: Implications for teaching, learning, and teacher education* (pp. 249-261). Dordrecht, Boston: Springer.

Afonso, M., Neves, I., & Morais, A. M. (2005). Processos de formação e sua relação com o desenvolvimento profissional dos professores. *Revista de Educação*, *13*(1), 5-37.

Ball, D. L. (2003). *Mathematics in the 21st century: What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics*. Paper presented at the Secretary's Summit on Mathematics, U.S. Department of Education, Washington, DC.

Bannan-Ritland, B. (2000). Teacher Design Research. An emerging paradigm for teachers' professional development. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, pp. 246-262. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Beane, J. A. (1995). Curriculum integration and the disciplines of knowledge. *The Phi Delta Kappan*, *76*(8), 616-622.

Berlin, D. F., & Lee, H. (2005). Integrating science and mathematics education: Historical analysis. *School Science and Mathematics*, *105*(1), 15-24.

Baxter, J. A., Ruzicka, A., Beghetto, R. A., & Livelybrooks, D. (2014). Professional development strategically connecting mathematics and science: The impact on teachers' confidence and practice. *School Science and Mathematics*, *114*(3), 102-113.

Cohen, L., Lawrence, M., & Keith, M. (2007). *Research Methods in Education*. 6th Edition. Taylor and Francis Group

Costa, M. C.; & Domingos, A. (2018). Promoting STEAMH at primary school: a collaborative interdisciplinary project. *New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences. 4*(8), 234-245.

Costa, M. C.; & Domingos, A. (2017). *Innovating teachers' practices: potentiate the teaching of mathematics through experimental activities*. In CERME 10. Dublin. In Proceedings of CERME 10.

Diário da República (2017). Despacho n.º 5908/2017, de 5 de julho. Acedido através de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/despacho_5908_2017.pdf.

Ferreira, C., Neves, P., Costa, C., & Teramo, D. (2017, June). Socio-constructivist teaching powered by ICT in the STEM areas for primary school. In *Information Systems and Technologies (CISTI), 2017 12th Iberian Conference on* (pp. 1-5). IEEE.

Geiger, V., Goos, M., Dole, S., Forgasz, H., & Bennison, A. (2014). *Devising principles of design for numeracy tasks*. In Curriculum in focus: Research-guided practice: Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,. pp. 239 – 246.

Gillies, R. M., & Nichols, K. (2015). How to support primary teachers' implementation of inquiry: Teachers reflections on teaching cooperative inquiry-based science. *Research in Science Education, 45*(2), 171-191.

Hewson, P.W. (2007). Teacher Professional Development in Science. In Abell, S. K., & Lederman, N. G., *Handbook of research on science education*. New York: Routledge.

Kermani, H., & Aldemir, J. (2015). Preparing children for success: Integrating science, math, and technology in early childhood classroom. *Early Child Development and Care, 185*(9), 1504-1527.

Kim, D., & Bolger, M. (2017). Analysis of Korean elementary pre-service teachers' changing attitudes about integrated STEAM pedagogy through developing lesson plans. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 587-605.

Ministério da Educação (2013) Metas Curriculares de Matemática. Programa de Matemática para o ensino básico - 1.º Ciclo. Lisboa: Departamento da Educação Básica. Retrieved from http://www.dge.mec.pt/matematica.

Ministério da Educação (2007) Programa de Estudo do Meio para o ensino básico - 1.º Ciclo. Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação. Retrieved from http://www.dge.mec.pt/ estudo-do-meio.

Mody, C. C. M. (2015). Scientific practice and science education. *Science Education, 99*(6), 1026-1032.

Murphy, C., Smith, G., Varley, J., & Razı, Ö. (2015). Changing practice: An evaluation of the impact of a nature of science inquiry-based professional development programme on primary teachers. *Cogent Education*, *2*(1), 1077692.

OECD. (2014). *Education at a glance 2014: OECD indicators*. OECD Publishing. doi:10.1787/eag-2014-en. Accessed September 18, 2017.

Osborne, J., & Dillon, J. (2008). *Science education in Europe: critical reflections*. London: The Nuffield Foundation.

PRIMAS (2011). The PRIMAS project: Promoting Inquiry-based Learning (IBL) in mathematics and science education across Europe. European Union: Capacities. http://www.primas-project.eu Consultado 20/01/2017.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Bruxelas: Comissão Europeia.

Treacy, P., & O'Donoghue, J. (2014). Authentic Integration: a model for integrating mathematics and science in the classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(5), 703-718.

Yin, R. K. (2005). Estudo de caso: Planejamento e métodos (3.ª Ed). Porto Alegre: Bookman.

Zehetmeier, S., Andreitz, I., Erlacher, W., & Rauch, F. (2015). Researching the impact of teacher professional development programmes based on action research, constructivism, and systems theory. *Educational action research*, *23*(2), 162-177.

Maria Cristina Oliveira da Costa

Dirección: Unidade Departamental de Matemática e Física, Escola Superior de Tecnologia
Instituto Politécnico de Tomar, Estrada da Serra, 2300-313 Tomar, Portugal

Teléfono: +351249328100

URL: http://www.ipt.pt/

CONTRIBUCIÓN A LA DOCENCIA DOI: 10.24844/EM3101.10

Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación

An introduction to the concept of derivative in high school students

Rebeca Antonio Zambrano[1]
Dinazar Isabel Escudero Ávila[2]
Eric Flores Medrano[3]

Resumen: En México, en el curriculum de Cálculo de nivel medio superior, el concepto de derivada se muestra normalmente a los estudiantes como una recta tangente a la curva y, posteriormente, se proporciona su tratamiento analítico. Esto genera que la comprensión de dicho concepto se reduzca a la memorización de expresiones algebraicas y cálculos algorítmicos, lo que conlleva a no relacionarlo con fenómenos físicos que presentan variaciones y cambios, así como pensar que la derivada es únicamente un límite indeterminado. Dentro de las investigaciones en Matemática Educativa, el concepto de derivada ha sido ampliamente estudiado por su importancia dentro de la matemática y la dificultad que se observa en su enseñanza y su aprendizaje. Estas investigaciones aportan información suficiente a profesores para utilizar y diseñar actividades en torno al concepto, apoyándose en los resultados de investigación. En este artículo se presenta una secuencia didáctica cuyo objetivo

Fecha de recepción: 24 de noviembre de 2017. **Fecha de aceptación:** 28 de septiembre de 2018.

[1] Preparatoria Emiliano Zapata, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, azare82@hotmail.com, orcid.org/0000-0001-7743-6126

[2] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, eadinazar@hotmail.com, orcid.org/0000-0001-6380-9016

[3] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ericfm_0@hotmail.com, orcid.org/ 0000-0002-6134-729X

es introducir el concepto de derivada a través de un fenómeno que presenta variaciones y cambios, buscando, además, la coordinación entre los registros de representación en estudiantes de bachillerato que tienen un primer acercamiento a este concepto.

Palabras clave: *derivada, variación y cambio, registros de representación, secuencia didáctica, bachillerato.*

Abstract: In Mexican's Calculus curriculum of High School level, the derivative concept is commonly shown to the students as a tangent line to the curve and later it is provided its analytical treatment. That reduces its understood to the memorization of algebraic expressions and algorithmic calculations, which don't leads to the concept of physical phenomena that present variations and changes, as well as thinking that the derivative is only an indeterminate limit. Within the Mathematics Education research, the concept of derivative has been studied for its importance in mathematics and the difficulty observed in its teaching and learning. These inquiry already provide enough information to teachers to use and design activities around the concept based on research results. In this article, a didactic sequence is presented whose objective is to introduce the concept of derivative through to a phenomenon that presents variations and changes, which also allows the coordination between representation in high school students who have a first approach to this concept.

Keywords: *derivative, variation and change, register of representation, didactic sequence, High School.*

INTRODUCCIÓN

Dentro del curriculum mexicano de Cálculo de nivel medio superior, se trabaja por primera vez el concepto de derivada y suele hacerse mediante una definición de límite indeterminado para después proporcionar una serie de reglas que permitan derivar funciones.

De acuerdo con Vrancken y Engler (2014), el cálculo es la matemática de la variación. Por medio de conceptos como el de derivada podemos modelar, expresar, y predecir situaciones que presentan variaciones y cambios. Sin embargo, algunos autores (e.g. Artigue, 1998; Salinas y Alanís, 2009; Vrancken y Engler; 2014) mencionan que la enseñanza del cálculo se sigue centrando en prácticas algorítmicas y estructuras formales de la matemática que no aportan un significado al estudiante. Específicamente, la enseñanza del concepto de derivada tradicionalmente se basa en que el estudiante domine los procesos para obtener derivadas de expresiones algebraicas por medio de fórmulas sin lograr la comprensión de este concepto (Dolores, 2009).

Existen diversos trabajos de investigación dedicados a explorar el concepto de derivada, en su mayoría, con estudiantes de licenciatura que ya han tenido contacto con este concepto (e.g. Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez, 2018). En Educación Matemática, particularmente, dichas investigaciones analizan y/o promueven la comprensión del concepto a partir de distintos ámbitos según sus intereses (e.g. Robles, Del Castillo y Font, 2012).

De acuerdo con algunos de estos resultados de investigación, hemos diseñado una secuencia didáctica que permite introducir el concepto de derivada en estudiantes de bachillerato que por primera vez tienen contacto con el tema, a través del trabajo con contextos de variación y provocando el tránsito entre distintos registros de representación.

Con base en la problemática que hemos planteado y la literatura de investigación consultada, pretendemos que el estudiante logre comprender los fundamentos del concepto de derivada a través de dos enfoques, la idea de variación y cambio implícita en el propio concepto y el tránsito entre los diferentes registros en los que éste se puede representar, para que pueda aplicarla según el contexto en el que se encuentre.

ANTECEDENTES

El estudio del Cálculo presenta diversas dificultades para los estudiantes, tanto en el bachillerato, como en la universidad. Tall (1993) realiza una síntesis que incluye aspectos didácticos, epistemológicos y cognitivos que causan dificultades en la comprensión de los elementos centrales de esta asignatura. En la investigación en didáctica del cálculo se han realizado propuestas para atender a las dificultades que presentan los estudiantes para su aprendizaje. Dichas propuestas han pasado por la reestructuración del currículo (e.g. Salinas y Alanís, 2009); la identifación de enfoques didácticos para la enseñanza y de sus alcances y deficiencias (e.g. Artigue, 1995; Moreno, 2005); la determinación de conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos (o carencias de estos) de profesores en servicio o en formación (e.g. Pino-Fan, Godino y Font, 2018), y diversas propuestas para el aprendizaje de conceptos del Cálculo (e.g. Orts, Llinares y Boigues, 2016).

Por otra parte, Moreno (2005) menciona que, en la literatura concerniente a la didáctica del cálculo, existen dos enfoques con distintos objetivos para la enseñanza: que los estudiantes hagan matemáticas por medio de aplicaciones y comprendan la relación entre los elementos que conforman el cálculo o que los estudiantes formulen, propongan, conjeturen, validen, argumenten y discutan con sus compañeros de clase. Además, Artigue (1995) menciona un enfoque distinto en el cual se propone que el estudiante, desde un inicio, coordine los registros algebraico, numérico y gráfico de los conceptos y procesos que están aprendiendo. La autora propone trabajar las intuiciones y concepciones de los estudiantes para que éstas logren evolucionar a través de situaciones adaptadas.

Asimismo, García y Dolores (2016) trabajan el concepto de derivada con estudiantes de primer año de licenciatura a través de secuencias didácticas, basadas en lo que denominan Pensamiento y Lenguaje Variacional. Los autores diseñaron una secuencia para cada una de las tres fases graduales en las que dividieron la toma de datos. En la primera fase se trabajaron conceptos iniciales y fundamentales (¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?), para que más adelante estos fueran utilizados al relacionarlos con el concepto de derivada, en la segunda fase se trabajaron actividades para la formación del concepto de derivada y sus características. En la última fase se diseñó la secuencia de manera que se estableciera la asimilación y repaso del concepto. En estas actividades se trabajaron los registros: verbal (que se presenta propiamente como el lenguaje matemático), numérico (al trabajar con sucesiones numéricas), gráfico (al trabajar con figuras o imágenes) y algebraico (con el uso de expresiones algebraicas).

Mientras que, en Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) se estudia la comprensión del desarrollo del esquema de la derivada en el nivel bachillerato y primer año de la universidad. Se muestra, además, que los estudiantes pasan de un nivel a otro en el esquema a partir de la forma en que realizan la representación. Las características de los elementos matemáticos que conocen los estudiantes los ayudan a obtener nueva información para la resolución de problemas al establecer la relación lógica que se da entre dichos elementos. Otro de los resultados es que los estudiantes presentan dificultades para establecer relaciones entre comportamientos puntuales y globales del concepto, además de que existe una construcción progresiva del esquema y los modos de representación para el concepto.

En cuanto a las propuestas de enseñanza y aprendizaje del tema de derivadas, encontramos que, en gran parte de éstas, las gráficas son utilizadas para analizar comportamientos de funciones como concavidades, crecimiento, máximos o mínimos. Por ejemplo, Flores (2007) menciona que las gráficas funcionan como estrategia para el análisis de funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos. Él trabajó con estudiantes de nivel medio superior para conocer la interpretación que los estudiantes proporcionan al analizar un fenómeno que describe variaciones. En la primera parte de la actividad se solicita a los estudiantes construir una gráfica que modele los cambios en la posición de una persona que realiza un movimiento. Posteriormente, con la ayuda de sensores, se realiza la simulación para obtener la gráfica. Al realizar las simulaciones del movimiento se espera que los estudiantes describan las variaciones que se presentan y lo relacionen con la gráfica obtenida. Finalmente, se realiza una comparación entre la gráfica propuesta y la hallada con el sensor. En esta investigación se concluye que, al trabajar con situaciones como las descritas, los estudiantes adquieren aprendizajes por intuición por medio de la interpretación y construcción de gráficas.

También Vrancken y Engler (2014) trabajan con el concepto de derivada desde una perspectiva de variación y cambio. En esta investigación se trabajó con estudiantes de nivel universitario que respondieron a cuestionarios previos que ayudaron a reconocer deficiencias en la comprensión del concepto de derivada. Posteriormente se diseñó una actividad que permitiera atender estas dificultades. Los resultados obtenidos muestran que la metodología utilizada por el docente permitió a los estudiantes elaborar la definición de derivada. El trabajo grupal favoreció la comprensión de la transición entre diferentes formas de representar el concepto de derivada. Una de las dificultades detectadas fueron las deficiencias en el manejo de conocimientos previos necesarios tanto conceptuales como algorítmicos, como por ejemplo al hacer el cálculo de la velocidad instantánea.

Otros aportes esenciales de la Educación Matemática a la enseñanza y aprendizaje de la derivada son las investigaciones realizadas alrededor de la variedad de representaciones que puede tener un objeto matemático, considerándose como un elemento esencial en el pensamiento matemático la coordinación y trasferencia entre los mismos (Duval, 2006). Flores (2007) utiliza el registro gráfico para el análisis de una situación que presenta variaciones y cambio y García y Dolores (2016), además de utilizar el pensamiento y lenguaje variacional, trabajan a la derivada mediante los registros numérico, algebraico y geométrico.

MARCO TEÓRICO

La propuesta didáctica que aquí se detalla fue construida bajo la base de dos constructos teóricos principales. Por un lado, siendo conscientes de los distintos significados de la derivada (ver Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013), centramos esta propuesta en la derivada como cálculo de fluxiones (visión Newtoniana de la derivada) y el significado de Cálculo de Diferencias (visión Leibinitziana de la derivada). Para ello nos valimos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Por otro lado, nuestra propuesta didáctica enfatiza en las transformaciones entre registros de representación. A continuación, detallamos los aspectos centrales de estos dos enfoques.

El Pensamiento y Lenguaje Variacional es una línea de investigación encargada de estudiar la evolución y desarrollo del lenguaje de fenómenos que presentan variaciones. Cantoral (2013) menciona que, en la educación, esta línea de investigación estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conocimientos matemáticos relacionados con la variación y el cambio. En este contexto la predicción es una herramienta para el desarrollo y la comprensión de fenómenos dinámicos, un estudiante desarrolla Pensamiento y Lenguaje Variacional cuando es capaz de predecir el cambio y cuantificarlo.

Los estudios sobre Pensamiento y Lenguaje Variacional han aportado estrategias y herramientas didácticas basadas en la idea de predicción y cuantificación. En su mayoría, se proponen secuencias didácticas para estudiar fenómenos que presentan cambios a partir de su gráfica, expresión algebraica o con el uso de software para modelar dichos fenómenos (e.g. Dolores, 2016). Estas estrategias y herramientas van dirigidas a estudiantes, profesores y profesores en formación.

En la línea del pensamiento y lenguaje variacional la derivada se trabaja a partir de los aspectos epistemológico y didáctico. Referente al aspecto epistemológico Alanís (1996) hace uso de la predicción para llegar a lo analítico, con el análisis didáctico trabajó la transición de magnitudes constantes a magnitudes variables. Pulido (1997) apoyado en el Cálculo desarrollado por Leibniz, trabaja el concepto de derivada a partir de fenómenos de física.

Con respecto a los registros de representación, nos basamos en Duval (2006), quien menciona que dichos registros de representación deben permitir la manipulación y transformación dentro de un mismo registro y/o permitir la transformación total o parcial a otro registro, puesto que, si un estudiante logra articular al menos tres registros de representación de un concepto matemático, entonces puede decirse que ha comprendido dicho concepto.

Sánchez-Matamoros, *et al*. (2008) mencionan que la clasificación que se hace en la investigación de algunos registros de representación del concepto de derivada son:

- Numérico: Se puede obtener la derivada como una sucesión de cocientes diferenciales en un intervalo, cuando una variable aumenta y la otra se queda fija.
- Gráfico: Se analiza que ocurre cuando el cambio de longitudes en el eje cambia con respecto a la longitud en el eje Y. Dentro de este registro se pueden hacer transformaciones, por ejemplo, pasar de la gráfica de la función a la gráfica de su derivada y viceversa, como pendiente de la recta tangente a una curva.
- Algebraico: Se establece como el límite del cociente diferencial cuando las diferencias en X se aproximan a cero.
- Verbal: En el que se presenta propiamente como parte del lenguaje matemático, como pendiente de una recta tangente o como razón de cambio instantáneo.

METODOLOGÍA

El diseño metodológico

Esta experiencia didáctica se llevó a cabo en el contexto de un curso de Cálculo diferencial e Integral del ciclo escolar 2016-2017 en un grupo que cursa el tercer año de bachillerato general en México. La profesora responsable del curso es una de las investigadoras que participan en este escrito, por lo que se decide implementar un diseño metodológico de Investigación-Acción (Elliot, 2005) que permita a la profesora asumir una postura reflexiva y crítica ante su práctica, así como asumir una postura objetiva de profesor investigador.

El trabajo se divide en tres fases, la primera, referente al diseño de la secuencia, el cual implica una primera aproximación a los resultados de investigación referentes a didáctica del cálculo y en particular a lo que se refiere a la derivada. Este bagaje se muestra en los Antecedentes y el Marco Teórico de este trabajo. La segunda fase se refiere a la implementación de la secuencia dentro del aula como parte de los trabajos normales del curso de Cálculo diferencial. La última fase corresponde al análisis de la información y la reflexión sobre los resultados derivados de esta experiencia didáctica.

La naturaleza de los datos y el paradigma interpretativo bajo el cual hemos decido abordar la investigación nos conduce a utilizar un enfoque cualitativo de análisis de los datos. Esto, porque estamos realizando un estudio exploratorio acerca de los procesos y conocimientos matemáticos que ponen en juego los estudiantes al trabajar con una secuencia didáctica.

Dadas las condiciones del diseño metodológico, es natural pensar en utilizar el método de observación participante (Elliott, 2005) para la implementación de la secuencia y la recolección de los datos. Además, para minimizar sesgos en la información y controlar la subjetividad del estudio se recurrió a un método de triangulación entre investigadores, en el cual participan varios observadores que opinan sobre el análisis para detectar o minimizar los sesgos que introduce la propia persona del investigador (Hammersley y Atkinson, 1995 en Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011).

Informantes, instrumentos de recolección y análisis de información

Para la recolección de los datos se implementó la secuencia didáctica diseñada a lo largo de cuatro sesiones de cien minutos cada una. Se eligió como informantes a un grupo integrado por 27 jóvenes de entre 16 y 18 años de edad que están interesados en continuar estudios universitarios en carreras de Ciencias exactas o Ingeniería.

Debido a que el grupo de informantes ha trabajado con la profesora durante los meses anteriores a la aplicación de la secuencia, no se tuvo la necesidad de realizar alguna evaluación adicional de conocimientos previos.

En la primera sesión la profesora integró nueve grupos de trabajo, en los cuales intentó mantener un equilibrio en cuanto al rendimiento de los estudiantes, buscando que los equipos tuvieran estudiantes de rendimiento alto, medio y bajo, según su conocimiento y apreciación sobre sus estudiantes. Estos equipos se mantuvieron durante dos sesiones más y la última sesión el trabajo se realizó de forma individual.

Durante la implementación de la secuencia se realizaron grabaciones de audio y video de todas las sesiones, las cuales fueron transcritas y codificadas para el análisis, además de recopilar todas las evidencias escritas que se hubieran generado en los equipos de trabajo durante las sesiones.

Para el análisis de la información decidimos utilizar el enfoque de la *Grounded Theory*, cuyos fundamentos están en una recolección y análisis sistemático de datos, a través de una continua interacción entre el análisis y la recolección de información, generando así una parte de la teoría a la que se quiere llegar durante el proceso de investigación, emergiendo directamente de los datos (Strauss y Corbin, 1994).

Diseño de secuencia didáctica

En esta primera fase definimos lo que entendemos por secuencia didáctica y el uso que le daremos dentro de la experiencia a realizar.

La secuencia didáctica surge de la necesidad de organizar la enseñanza y el aprendizaje y se condiciona por las personas que la elaboran de acuerdo a los objetivos que se persigan y el contexto en el cual se aplique y tiene el objetivo de unificar los procesos de investigación educativa, ser innovadoras y permitir el trabajo en equipo (Fernández, 1999).

Sobre la estructura de ésta, Tobón, Pimienta y García (2010) comentan que una secuencia es un conjunto de actividades de aprendizaje y evaluación diseñadas de forma que el docente sea el guía de los estudiantes en la adquisición de nuevos conocimientos. Además, para el planteamiento de las actividades se deben tener en cuenta tareas y preguntas que representen un reto a los estudiantes, que les supongan contradicciones y que contribuyan a que hallen soluciones o propongan conjeturas de forma independiente.

Sobre el contenido y bases teóricas de la secuencia, como hemos mencionado en los primeros apartados de este escrito, los trabajos de investigación revisados en el apartado de antecedentes sugieren la idea de realizarla tomando como base situaciones de variación y cambio que permitan identificar puntos críticos y variaciones en un contexto de movimiento, esto nos lleva a proponer la actividad sobre la base de dos constructos principales: el pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral, 2013) y el tratamiento y conversión entre distintos registros de representación (Duval, 2006). Todo esto nos permitirá introducir a los estudiantes al concepto de derivada como aquella que nos indica la razón de cambio instantánea entre dos variables.

La secuencia didáctica que diseñamos consta de tres actividades (ver Anexo 1) utilizando la siguiente situación como base para el trabajo general:

Actividad 1. Conversión entre el registro gráfico y verbal

Instrucciones: Traza la gráfica posición – tiempo que representa el movimiento de Juan en la siguiente situación:

Juan sale de su casa para ir a estudiar a casa de su compañero. No es necesario tomar el camión, pues su amigo vive en una colonia próxima a la suya. Cuando sale de casa contesta un mensaje avanzando con paso lento los primeros 250 metros, en cuanto envía el mensaje continúa caminando más rápido. Cuando han transcurrido 8 minutos recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo. Llega a casa, toma su libreta y, como ya es tarde, camina a la esquina y espera 3 minutos para tomar un taxi que lo lleva a la casa de su compañero.

Figura 1. Actividad 1 de la secuencia didáctica

Uno de los principales focos de atención en la secuencia es el tránsito entre registros verbales y registros gráficos que lleven al estudiante a analizar la situación de variación y así reflexionar sobre *qué* y *cómo* cambia el movimiento para después reflexionar sobre *cuánto* cambia.

Otro punto central es el análisis de representaciones gráficas dado que en Cálculo las gráficas son utilizadas como herramientas privilegiadas para analizar comportamientos de funciones como concavidades, crecimiento, máximos o mínimos, etcétera, además de usarlas para estudiar cómo varía la posición y las relaciones entre velocidad y aceleración, con lo cual se establece un significado de la variación mediante la modelación-graficación (Suárez y Cordero, 2010).

Las actividades que proponemos promueven entre los estudiantes el análisis de diferentes cualidades de variación: ¿qué magnitudes cambian?, ¿cuánto cambian? y ¿cómo cambian? En éstas, se acerca al estudiante a la necesidad de establecer una forma para analizar las variaciones entre las magnitudes, por medio del análisis de razones de cambio donde establecerá la relación entre pendiente de una curva y razón instantánea de cambio.

Tomando en consideración los resultados obtenidos por Vrancken y Engler (2014) y Dolores (2009), nuestra intención fue provocar que los estudiantes utilizaran el estudio de la variación mediante la razón de cambio, velocidad media, razón de cambio media, relación con la recta secante, velocidad instantánea, razón de cambio instantánea y relación con la recta tangente.

Se busca que la secuencia ayude a que el estudiante pueda inferir qué es lo que ocurre en diferentes intervalos de tiempo y modelar la situación a partir de una gráfica, para posteriormente analizar los intervalos de tiempo propuestos y llegar al análisis puntual. Esperábamos que a través de estas fases el estudiante lograra construir una primera noción general de derivada como aquella que nos indica la razón de cambio instantánea entre dos variables.

RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

Como habíamos mencionado, la aplicación se llevó a cabo a lo largo de dos semanas repartidas en cuatro sesiones de 100 minutos cada una. La aplicación constaba de dos partes, una de trabajo por equipos y una puesta en común grupal a través de exposiciones en el pizarrón la cual era moderada por la profesora. Para que el lector pueda distinguir el origen que tienen los datos que se muestran en los resultados, en adelante nos referimos a las evidencias escritas de manera grupal como la participación del "Equipo #" y a las participaciones individuales de los estudiantes expuestas de forma oral como "E#".

Sobre los procesos y conocimientos que detona en los estudiantes la secuencia didáctica

Una vez que se analizaron las evidencias, hemos podido establecer cinco categorías que engloban los procesos de resolución que realizan los estudiantes según los conocimientos que ponen en juego:

Categoría 1. Identificación de la presencia de variables y relaciones entre estas

Para poder trazar la gráfica los estudiantes tuvieron que hacer una lectura del planteamiento que modela el movimiento de Juan. En la actividad 2 también fue necesario establecer la relación posición tiempo para poder hacer el análisis tanto global como puntual de la gráfica que se les proporcionó. Por ejemplo, en la pregunta 5 de la actividad dos, donde se solicita al estudiante identificar intervalos donde se cumple que la velocidad es menor en uno de ellos en distintas secciones, se deben elegir segmentos en la gráfica, donde la pendiente de la recta secante, sea menor que la pendiente de la recta secante en otro intervalo. Esto nos da indicios de cómo relacionan pendiente de recta secante con velocidad.

Categoría 2. Las gráficas muestran compresión sobre la variación en la posición

El trazo de la gráfica en la actividad 1 permite analizar si los estudiantes consideran a las variaciones constantes o no constantes. Por ejemplo, la gráfica de la figura 2 muestra variaciones no constantes. Esto nos permite decir que algunos estudiantes tienen conocimiento del tipo de gráficas que se generan con movimientos no constantes.

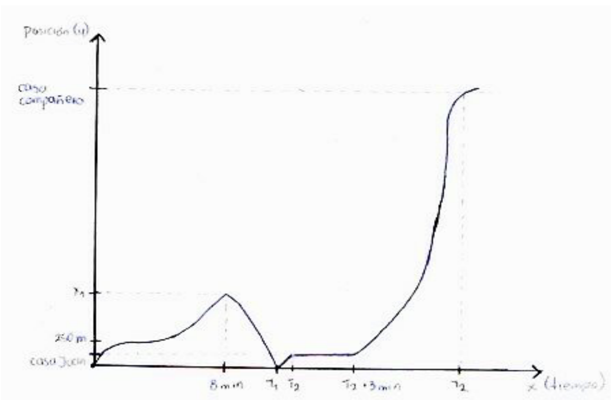


Figura 2. Gráfica posición tiempo de variaciones no constantes

Otro ejemplo, es la gráfica de la figura 3, la cual fue construida por siete de los nueve equipos. En esta se puede observar que graficaron movimientos de velocidad constante y que no tienen una idea clara de que tipo de gráficas se generan cuando los movimientos no son constantes.

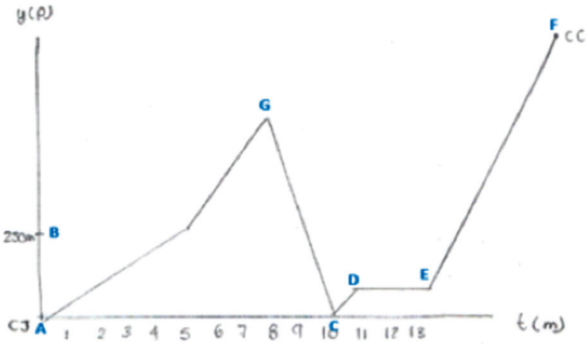


Figura 3. Gráfica que representa movimientos con variaciones constantes

Categoría 3. Uso de conocimientos que no pertenecen a la matemática formal

En todas las actividades los conocimientos no formales dentro de la matemática fueron de gran apoyo para los estudiantes. Sin embargo, en algunas actividades este hecho es más notorio que en otras. Por ejemplo, en las preguntas 2 y 3, de la actividad 2 parte II, donde los estudiantes deben contestar cómo es la velocidad en el intervalo de *a* a *b* y cómo es la velocidad de *b* a *c*, fue de gran utilidad para los estudiantes considerar qué es lo que estaba haciendo Juan en ese momento, lo cual generó que no fuera necesario trazar intervalos y trazar rectas secantes dentro de estos intervalos. Otro ejemplo, en la pregunta 4 de la actividad 2 parte II, donde se cuestiona sobre lo que ocurre alrededor del punto de inflexión, el estudiante E13 dice:

> E13: Cabe recalcar que en lo que mencionó mi compañero también utilizamos el contexto de la lectura y nos apoyamos mucho de la primera respuesta en donde vemos la gráfica. Al inicio de la gráfica [se apoya en la gráfica de la figura proporcionada en la actividad] se puede considerar en reposo y vemos cómo va acelerando de cierta manera hasta llegar a una aceleración máxima que en la gráfica seria el punto *b* y al finalizar vemos que va desacelerando hasta de nuevo quedar en un estado de reposo. Al analizar también lo que sería el problema vemos que, del punto *a* al punto *b*, está llevando cierta aceleración, está tratando de ir más rápido, por eso podemos inferir que va más rápido que de *b* a *c*.

En este caso, la experiencia sensorial de movimiento y las relaciones con velocidad y aceleración, son los elementos no formales de la matemática en los que se basa el estudiante para generar su explicación.

Categoría 4. Uso implícito del concepto de pendiente

En algunos equipos no se utilizó propiamente el término pendiente, pero se habló sobre la inclinación de la recta o inclinación de la curva como un sinónimo de pendiente de la recta, usado para poder realizar la comparación entre las velocidades. Ejemplo de ello es la respuesta del Equipo 3:

> Equipo 3: Entre más vertical sea la curva la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo es mayor. Como en la sección II la curva está más inclinada podemos decir que su razón de cambio es más pequeña. Tomamos razón de cambio como sinónimo de velocidad.

Esta afirmación muestra evidencia de que se establece una relación entre la velocidad y la idea de variación, además de proporcionar un indicio de que en este equipo podrían tener conocimiento acerca de que la pendiente de una recta también nos proporciona información sobre la velocidad.

Categoría 5. Relación de conceptos pendiente de recta secante-velocidad promedio y pendiente de recta tangente-velocidad en un punto

La relación entre estos conceptos se notó con mayor claridad en las actividades 2 y 3. Por ejemplo, en la pregunta 5 donde se solicita identificar algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII, el Equipo 2, comenta que "la sección inicial del intervalo VII entre los puntos (C, D) tiene una velocidad menor al intervalo (A, B) pues la pendiente de la recta $\overline{AB}$ es mayor a la pendiente de la recta $\overline{CD}$". Se apoyan en la Figura 4.

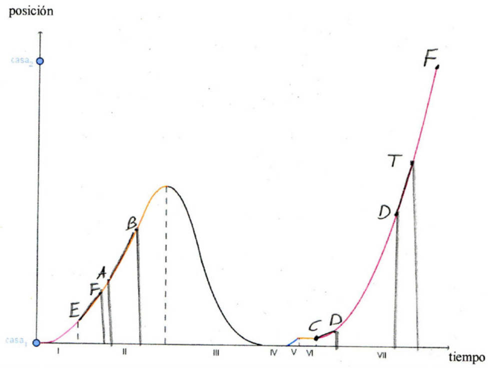


Figura 4. Comparación de velocidades.

Otro ejemplo de esta categoría se observa cuando, en la puesta en común para las preguntas 5 y 6 de la actividad 2 parte I, se retomó la respuesta de la pregunta 4, dado que no en todo el intervalo de la sección II se cumple que la velocidad es menor con respecto a la velocidad de la sección VII. Cuando se preguntó si existía alguna contradicción entre la respuesta dada a la pregunta cuatro y las preguntas cinco y seis, los estudiantes comentaron:

E13: Es posible, cuando hablamos de la velocidad entre dos tiempos distintos, sólo se hace un promedio de la velocidad que hubo en un intervalo. Podemos decir que hablamos de una velocidad promedio.

Durante esta misma discusión, el estudiante E10 complementa la participación del estudiante E13 y explicita la forma en que se relaciona la pendiente de la recta secante y la velocidad promedio.

E10: Se puede expresar como un Δx [cambio en la posición] sobre un Δt [cambio en el tiempo]. Que también es igual a la velocidad media y a la pendiente de la recta secante, porque la pendiente es el cambio en Y, que en este caso es el cambio en la posición, sobre el cambio en X, que por ahora es el cambio en el tiempo. Para nuestro problema nos va a quedar, posición final menos posición inicial todo entre tiempo final menos tiempo inicial igual a la velocidad promedio. [Escribe en el pizarrón la relación $\frac{x_f-x_i}{t_f-t_i}=\bar{v}$].

Las cinco categorías en las que englobamos el comportamiento matemático de los estudiantes frente a nuestra propuesta didáctica nos dan muestra de cuán benéfico es el manejo de gráficas en la comprensión del concepto de derivada, lo cual coincide con lo reportado por Borji *et al.* (2018). Asimismo, es de resaltar cómo la situación contextual permitió que los estudiantes hicieran un contraste entre sus gráficas y las respuestas que daban a los cuestionamientos.

Si bien es cierto que los estudiantes no habían tenido contacto con el tema de derivada, los temas que habían trabajado en sus cursos de física clásica les permitieron comprender y cuestionar las gráficas. En dicho curso se hablaba sobre velocidades promedio e instantánea, pero no se formalizaba con la noción de derivada, ya que eso era curricularmente incompatible.

REFLEXIONES FINALES

La contribución didáctica que se presenta aquí, trata de romper con el ímpetu curricular en el que la introducción al concepto de derivada se realiza mediante un tratamiento algorítmico que se desvincula de los significados del propio objeto matemático, tal como ha sido reportado en diversas investigaciones (e.g. Salinas y Alanís, 2009). Nuestra propuesta trata de favorecer el desarrollo de pensamiento variacional y el tránsito entre registros de representación. A continuación, detallamos cómo estos elementos se vieron favorecidos.

Sobre el uso del pensamiento y lenguaje variacional para el análisis de situaciones de variación

Las actividades propuestas en la secuencia permitieron al estudiante trabajar una situación en la que identificó los distintos cambios de velocidad. Por ejemplo, en la actividad 1, los estudiantes construyeron gráficas que modelan distintas velocidades en cada momento donde Juan cambia de posición, como lo muestra la figura 3. En esta figura, si bien no se está considerando las variaciones naturales en la velocidad de Juan, sí se consideran diferentes pendientes que se corresponden con la situación contextual. Lo cual nos permite interpretar que los estudiantes de este equipo están empleando nociones (básicas) de variación y cambio.

Otra evidencia que muestra cómo los estudiantes trabajaron el concepto de variación, es que en todo momento utilizaron el planteamiento, donde saben que se modelan cambios, para contestar las preguntas o para ratificar su respuesta.

Al analizar las evidencias hemos notado que las actividades 1 y 2 permiten a los estudiantes hacer uso de estrategias de trabajo, que están ligadas a pensamiento y lenguaje variacional, sin embargo, parece que esta idea se rompe en la actividad 3, dado que se limitan a la representación geométrica de la derivada sin atender el comportamiento de variación que surge alrededor de un punto. Constatamos que los conocimientos de la asignatura de física fueron determinantes en el uso de esta representación dejando a un lado el análisis de variación alrededor de un punto para determinar la velocidad puntual, como lo muestra la figura 5 y la explicación proporcionada por el estudiante E2.

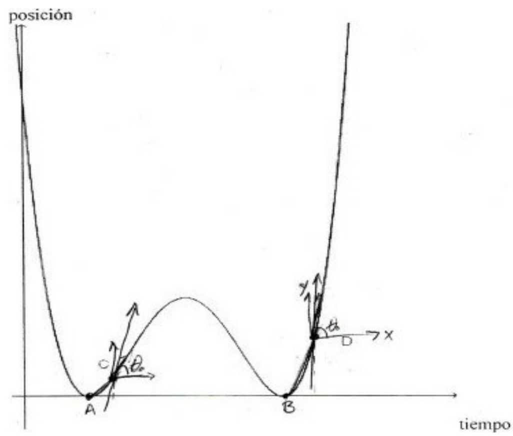


Figura 5. Comparación de la velocidad en dos puntos.

E2: La velocidad del punto D es mayor a la velocidad del punto C, debido a que, si se traza una recta tangente que sólo toca a esos puntos, se puede obtener la velocidad de cada punto; después se pueden comparar los grados de inclinación de ambas pendientes tangentes y así se nota cuál de los puntos tiene mayor velocidad.

Sobre el tránsito y conversión entre registros de representación en la secuencia didáctica

En la primera actividad se buscó, entre otras habilidades, que los estudiantes realizaran el tránsito entre el registro verbal y el registro gráfico con la representación del movimiento de Juan. Para ver si este se realizó, al analizar las evidencias de esta actividad consideramos los siguientes aspectos: identificación de momentos clave, puntos de referencia y gráficas que representan movimientos constantes y no constantes.

En el problema se pueden observar siete momentos clave: (i) Sale de su casa y camina a paso lento porque envía el mensaje, (ii) avanza más rápido, (iii) recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo, (iv) se mantiene en su casa para buscar la libreta, (v) camina a la esquina, (vi) espera el taxi y (vii) toma el taxi y se va a casa de su amigo.

De los nueve equipos, dos consideraron todos estos momentos y los equipos restantes omitieron el momento en el que Juan regresa a casa y toma su libreta. Ejemplo de esta gráfica es la que se muestra en la figura 6.

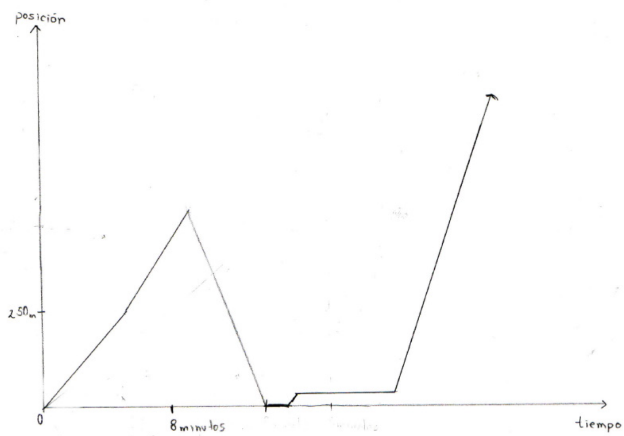


Figura 6. Posición de Juan.

De la misma forma nos fijamos en los puntos de referencia, sobre todo en la ubicación de las casas de Juan y de su compañero. Consideramos que estos son determinantes en la forma de construir la gráfica. Durante la puesta en común de la gráfica, se cuestionó acerca de la colocación de estos puntos. El estudiante E22 menciona que tuvieron problema al colocar la casa de Juan porque cuando regresa a ella pensaron que debería regresar al origen. La explicación que proporciona el estudiante E10 es:

E10: Bueno, es que de lo que decía de la casa de Juan, yo creo que no hay conflicto de que digas que la casa de Juan es el origen porque entonces estarías regresando a la posición cero en un tiempo cero. Pero, por ejemplo, en un determinado tiempo puedes regresar a la posición donde iniciaste, en t=3, las coordenadas son (3, 0) y eso significa que pasados tres minutos él regresa a esa posición, no regresa al origen. Nosotros lo tomamos así y no tuvimos ningún conflicto.

Esta discusión llevó al grupo a establecer que la gráfica debe ser una función y que, además, considerando que el tiempo es una variable, no se puede regresar de manera horizontal. En la Figura 7 también se observa que se representaron movimientos constantes y además se observa cómo hay un cambio de velocidad de un momento a otro.

En la actividad 2 y 3 pudimos observar que se promovió el tránsito entre el registro gráfico, verbal y analítico. Por ejemplo, en la actividad 3, durante la puesta en común, el estudiante E11 nos explica:

E11: Yo recuerdo que en Física vimos que la velocidad en un punto es la velocidad instantánea y se puede encontrar con un límite, el $v_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0}[\bar{v}]$ y sabemos que la velocidad promedio es posición final (x_f) menos posición inicial (x_i) entre un tiempo final (t_f) menos un tiempo inicial (t_i) y entonces el límite anterior nos queda como: $v_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]$ pero necesitamos conocer a las posiciones o una función para calcular a la velocidad.

En esta explicación se hace presente el registro algebraico y el registro verbal. También en la figura 6, que corresponde a la actividad tres de la secuencia, se puede observar cómo está presente el registro geométrico. Dadas las evidencias podemos decir que nuestra secuencia sí permite (y promueve) el tránsito entre los registros de representación para la derivada, aunque estos se logren sólo de forma parcial por los estudiantes.

Sobre aspectos generales de la propuesta didáctica

Con respecto a la primera actividad los estudiantes establecieron relaciones entre las variables del problema de Juan para plasmarlos en el plano cartesiano utilizando expresiones que están relacionadas con la idea de variación y cambio. En todos los equipos de trabajo se mencionó a la función de primer grado como la herramienta principal para modelar cambios constantes y las curvas para cambios variables, además de reconocer a la pendiente de la recta como el elemento que nos modela dichos cambios.

Se tuvieron algunas dificultades en la segunda parte de la actividad 2, puesto que no se comprendía lo que se solicitaba. Al parecer, aunque hay un cambio de concavidad de la gráfica que se muestra en la actividad 2 parte II, éste no es muy notorio y esto no fue de ayuda al pensar que los estudiantes iban a tomar intervalos a la izquierda y derecha del punto de inflexión. Aún con estas dificultades los equipos se apoyaron en conocimientos previos para hacer uso de los conceptos recta secante y velocidad promedio. Pese a las dificultades, los estudiantes lograron establecer la comparación de la velocidad entre las diferentes secciones de una gráfica.

Ninguna de las soluciones de los estudiantes a la actividad 3 satisface nuestros objetivos puesto que, aunque en la mayoría de equipos se empleó a la pendiente de la recta tangente para calcular velocidades instantáneas, no se utilizó el proceso de acercarse al punto C y al punto D, fijando un intervalo y luego hacer que la longitud de tiempo se hiciera cada vez más pequeña de acuerdo a lo que se hizo en la actividad 2 parte II.

En general la secuencia didáctica nos permitió observar el proceso de transición de los estudiantes entre el registro verbal, gráfico, analítico y geométrico. Analizar el comportamiento de la velocidad en secciones, alrededor de un punto de inflexión y en un instante dado, nos ayudó a poner atención en aspectos concretos del comportamiento gráfico (¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia?, crece, decrece, aceleración, velocidad promedio, velocidad en un instante), lo cual forma parte esencial de la construcción de los distintos significados del concepto de derivada.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el apoyo brindado por el Programa para el Desarrollo Profesional Docente, para el Tipo Superior (PRODEP), de la Subsecretaría de Educación Superior de México, para el desarrollo y presentación de este trabajo.

REFERENCIAS

Alanís, J.A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis doctoral inédita. México, D. F.: Cinvestav.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las aportaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 40-55.

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., y Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(6), 2301-2315.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México, D. F.: Gedisa.

Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Memorias del XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 99-116). Ciudad Real, España: SEIEM.

Dolores, C. (2009). Usos de las gráficas y sus representaciones en el aprendizaje de las Matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp. 499- 503). Camagüey, Cuba: Clame.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, *9*(1), 143-168.

Elliott, J. (2005). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Fernández, J. (1999) ¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras? Sevilla, España: Diada Editora.

Flores, C. (2007). Las Formas Básicas de Graficación y su Relación con Situaciones de Movimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp. 485-489), Camagüey, Cuba: Clame.

García, M., y Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la enseñanza del concepto de derivada. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 46*, 45-70.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 81-96), Córdoba, España: SEIEM.

Orts, A., Llinares, S., y Boigues, J.F. (2016) Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta Tangente. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 111-134.

Pino-Fan, L., Castro, W.F., Godino, J.D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, *34*(2), 123 – 150.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en Física y la matemática escolar.* Tesis doctoral inédita. México, D. F.: Cinvestav.

Robles, M., Del Castillo, A., y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción de la derivada. *Educación Matemática*, *24*(1), 5-41.

Salinas, P., y Alanis, J.A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355-382.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2). 267-296.

Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N. Denzin, y Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks, C.A.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 319-333.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7 1992*, 13-28, Quebec, Canadá: ICME.

Tobón, S., Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias*. México: Pearson.

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Boletín de Educación Matemática, 28*(48), 449-468.

Dinazar Isabel Escudero Ávila

Dirección: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP
FM-9 303 Av. San Claudio y 18 sur.
Col. San Manuel. Ciudad Universitaria.
C.P. 72592

Teléfono: 222 9 55 00 ext. 7509