Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Educación Matemática

México • vol. 32 • núm. 1 • abril de 2020

Producción
Formas e Imágenes, S.A. de C.V. Diseño y corrección, formaseimagenes@gmail.com

La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (IRMICYT), del CONACYT, SCOPUS (Elsevier, Bibliographic Databases), ZdM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (MathEducDatabase), Latindex, Redalyc (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SciElo) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en la plataforma www.autores-educacion-matematica.com
Mantenemos el contacto: revedumat@yahoo.com.mx

Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

Educación Matemática *vol. 32 • núm. 1 • abril de 2020*

Editora responsable: Avenilde Romo Vázquez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04340, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 30 de julio de 2019.

www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

DOI: 10.24844/EM3201.00

Editorial

El primer número de la revista Educación Matemática del año 2020 llega en medio de una crisis mundial provocada por la expansión del virus COVID-19. que nos obliga a plantearnos diversas reflexiones en el propio campo de la Matemática Educativa. Dos de ellas resultan inevitables: la concerniente a la Modelización Matemática y su enseñanza, y la relacionada con la Educación a Distancia.

Detener el contagio masivo de un virus como el COVID-19 requiere tener conocimientos matemáticos sólidos que nos permitan modelizar datos del contexto en cuestión; como información relacionada con el propio virus, su propagación, las formas de convivencia social, e incluso los sistemas de salud. Además de estos conocimientos y técnicas matemáticas se requiere también de una interpretación apropiada y eficaz de los resultados, que nos permita fundamentar las medidas a tomar para salvar el mayor número de vidas posibles. De alguna manera, esta realidad que nos toca afrontar es una llamada urgente a la innovación educativa y al cuestionamiento de los enfoques que pretenden la 'transversalidad' sin reconocer la naturaleza y la complejidad de las relaciones entre saberes de diversa índole. La realidad de la sociedad no puede seguir fuera de los límites de la escuela; ¡es necesario integrarla lo antes posible! Para ello, se requiere realizar investigaciones sobre la naturaleza multifactorial de la modelización matemática, y de las formas en que puede abordarse desde el aula, tanto presencial como virtual.

La Educación Virtual o a Distancia –la gran marginada del siglo XXI y etiquetada como de baja calidad– se erige hoy como la opción para mantener viva la tarea social de educar. Se hace hoy, más necesario que nunca impulsar la producción de saberes en una modalidad tan importante y tan poco explorada como la enseñanza virtual. Ciertamente, existen investigaciones en el campo de la Matemática Educativa centrados en estudiar el rol de la tecnología y la enseñanza virtual. De hecho, en este número presentamos dos artículos al respecto, el de Irene Sánchez, Juan L. Prieto, Rafael Gutiérrez y Stephanie Díaz, y el de Alberto Alnar y Antonio Oller. Investigaciones que provienen de escenarios presenciales y hacen más visible aún la demanda de una formación didáctica especializada en la modalidad virtual. La atención a esta demanda es urgente, tanto como la de combatir el virus de la marginación social: ¿cuántos niños y jóvenes de comunidades sin acceso a la tecnología digital y al internet han quedado sin formación durante este tiempo?

En este número incluimos también una mención al fallecimiento de dos educadores matemáticos acaecidos recientemente –Eugenio Filloy y François Pluvinage– baluartes de la Matemática Educativa en todo el mundo y principalmente en Latinoamérica. Su solidez como investigadores y como seres humanos se queda con nosotros a través de su basta obra: leerlos es privilegio y homenaje a su memoria.

En este escenario gris, aparece un atisbo de esperanza venido del norte de este país y de una instancia cuyo rol es determinante en la educación estatal y nacional: la Secretaría de Educación del estado de Zacatecas. El texto de Gema Mercado muestra con claridad el rol de las matemáticas y de su enseñanza, en esta contingencia, y ofrece una reflexión que toca tanto a los órganos gubernamentales de la educación como a los de difusión de la ciencia, como la revista Educación Matemática. La colaboración efectiva entre estos órganos es una vía compleja, pero ineludible para que la educación matemática de calidad contribuya a preservar la vida de todos los ciudadanos.

Avenilde Romo Vázquez
Editora en jefe

ARTÍCULO INVITADO DOI: 10.24844/EM3201.01

Las matemáticas en los tiempos del Coronavirus

Gema Alejandrina Mercado Sánchez[1]

Saludo con aprecio la publicación de un volumen más de la *Revista Educación Matemática* que nos ha acompañado desde hace más de 32 años ininterrumpidos para garantizar un espacio libre al razonamiento matemático y sus retos educativos.

Ahora, en pleno momento de oleadas diferidas de la pandemia COVID-19, la ciencia y la técnica se revaloran en la discusión global procurando documentar lo que hacemos, lo que aprendemos diario y lo que quisiéramos predecir. La matemática se anuncia en cadena nacional, en voz de médicos, epidemiólogos, especialistas de salud pública y políticos. La ciudadanía se apresta a entender las tablas y gráficas. Nos llaman a cambiar la curva para mitigar los efectos de la fatal pandemia. Nos piden que nuestro confinamiento, en medida de sana distancia, modifique la dinámica del comportamiento de contagios y buscar, entre todos, "aplanar la curva". Muchos, sin saberlo, participan de un esfuerzo mundial para cambiar el valor de la segunda derivada en la curva que parece advertir una mayor amenaza de la pandemia COVID-19. Aún más, gráficas coloridas inundan las pantallas explicando que existen diferentes modelos para enfrentar la amenaza global y el cálculo multivariado se parafrasea de diferentes formas: los modelos de contención y mitigación dependen de diversas

[1] Secretaría de Educación de Zacatecas, México, gemaa.mercado@gmail.com

circunstancias: de la economía, de la cultura, del régimen político, de la capacidad hospitalaria, de los hábitos alimenticios, de la salud pública y muchas más variables. En cada país se analiza: ¿cómo somos? ¿qué tenemos? ¿cómo lo haremos distinto? La solución no es copiar lo que otros hacen porque las variables son diferentes. Es decir, somos distintos. El problema es profundamente multivariable, no lineal, difícil predecir el final.

Y el despertar humanitario llamando a la solidaridad, a la reflexión, a la perspectiva diferente. La economía del mercado es brutal porque es muy celosa, ¿salud o economía? Todos claman "la salud es lo más importante, ¡paremos!". Y la economía se desploma. Y la matemática lo documenta: otras gráficas y curvas aparecen, éstas para explicar que la economía va cayendo, que el índice del PIB se redujo, que la balanza comercial se desequilibró, que el daño económico será inmenso. La matemática no se puede esconder ni desprestigiar como una asignatura aburrida, repetitiva, estéril. No es un lujo de algunos expertos, todos queremos entender, ¿adónde va la curva? ¿qué anticipa? La respuesta no es sencilla. Es ciencia, es un modelo matemático, que cambia según cambian las variables en cada país, en cada territorio. Es una aproximación. Sabemos tanto, pero la realidad se nos presenta sin exhibirse por completo y es mutante vertiginosa, se escabulle a la predicción científica. Abundan las interpretaciones ingenuas que junto con las *fake news* abruman las redes sociales, ¿cómo explicar que en San Diego haya 80 infectados mientras que del lado mexicano sólo seis? La respuesta está en los modelos matemáticos de flujo migratorio y movilidad poblacional. Pero esto no se ignora, porque lo que importa es generar confusión, así, la política intenta sustituir a la ciencia y la técnica.

La matemática puede considerarse un aditamento extraordinario a nuestro lenguaje natural, incorpora una posibilidad para describir aspectos y relaciones cuantitativas del mundo que nos rodea, y nos permite capturar, en las relaciones entre funciones, la dinámica del universo, su forma y complejidad. Los seres humanos hemos podido construir el lenguaje y una estructura interna de variables, ecuaciones y desigualdades geometrías y capacidades de análisis de grandes datos para describir, cuantitativamente, la esencia fundamental de aspectos de nuestra realidad. La obra intelectual ha sido un ejercicio portentoso y global, de abstracción de la realidad. La representación tiene lógica y belleza. La abstracción impone una gran asepsia, sólo lo fundamental puede participar. No todos los detalles de la realidad caben; sólo ella se representa a sí misma completa. Y de esa misma selección entre lo esencial y lo extrínseco surge la belleza que se compacta en una ecuación, en una gráfica, en un conjunto de relaciones de funciones. Y así, capturada la esencia, paradójicamente, se libera para conocer su pasado, su dinámica, su porvenir. Y se establece el desafío constante, mientras más detalles incorporamos al modelo matemático, más complejo se vuelve resolverlo y conocer; la belleza interna también se compromete. Por otro lado, mientras más elevada sea la abstracción, más perdemos la realidad que queremos capturar en la representación matemática. La delgada línea, entre abstracción y realidad, es frágil. Los grandes han sido certeros. ¿Quién no reconoce la imagen de $F = ma$? ¿o aquella de $E = mc^2$? Aun los legos presienten su simetría y su poder.

La modelación matemática es una estrategia del razonamiento para traducir, interpretar de forma compacta y cuantitativa, el comportamiento de nuestro universo, de la naturaleza, de la sociedad, de la economía y un interminable etcétera. Extendiendo nuestro lenguaje y codificando magnitudes podemos interpretar nuestro entorno, reconocer su estructura y su dinámica, su pasado y su presente. Es tan poderosa esa posibilidad, que es inconcebible el desarrollo técnico y científico, ni el mundo como lo conocemos sin el gran fundamento representativo de la matemática. Y esta ciencia, con su propia sintaxis y semántica, no es exacta, ni rígida, ni inhumana, como sus detractores la anuncian sin gracia. Al contrario, es una aproximación sustantiva, aunque es precisa en su propia lógica interna. Se deriva de una actividad profundamente humana, deviene del triunfo de la argumentación sobre el dogma. En el ejercicio matemático se convoca a los presentimientos fundamentados, a la emoción de lo posible y de lo imposible, a la ilusión de la esperanza sobre el desaliento. La matemática evoluciona, crece, se afina, incorpora nuevas rutas de pensamiento y estructuras, se vincula con otras ciencias para construir nuevas formas del pensamiento y nacen nuevas áreas del conocimiento, nuevas ciencias. Es profundamente humana y sólo el optimismo explica su origen y evolución. Las matemáticas son una de las creaciones intelectuales más sofisticadas del razonamiento humano y junto con las otras ciencias, incluyendo las humanas, el arte y la ética, representan los aspectos más brillantes de nuestra civilización. Son así, el único asidero de sobrevivencia de la especie humana.

En la inercia previa a la contingencia sanitaria global por la pandemia, hasta la ciencia parecía prescindible. Hoy todos somos convocados a revisar el modelo de vida, el modelo económico y el modelo de crecimiento. La ciencia salta al escenario principal y se reinstala en la necesidad de que, en tiempos sombríos, el brillo más portentoso de la creación humana señale el camino. Coinciden los antropólogos, los epidemiólogos, los religiosos y los políticos: la vida futura debe ser diferente. Debe incluir la ética, la generosidad, el reconocimiento de revalorar la otredad y desmontar el vínculo fatal de economía y modo de vida vertiginoso y con programación acrítica. La educación de las ciencias, su entendimiento masivo y difusión renuevan su pertinencia. La ciencia, y las matemáticas particularmente, como todas las obras humanas, son también elementos que modifican la vida de las civilizaciones. En la discusión pública, se anticipa con cierta claridad el papel que ocupan las matemáticas en la distribución de los saberes, en la legitimación social, en la exclusión y en la desigualdad y su profundo impacto en la salud pública.

Por eso, la Secretaría de Educación del Gobierno del Estado de Zacatecas responde al llamado y se compromete a apoyar la edición de la *Revista Educación Matemática* en este año axial, el año que nadie olvidará, el de la pandemia COVID-19. Queremos que la revista continúe sus 32 años de educación y difusión de la Educación Matemática. Ojalá su tarea educativa se acentúe y pueda dedicar un número especial a la epidemiología matemática; a la economía matemática y financiera que explique el efecto y consecuencias múltiples de la pandemia que nos ha tocado vivir. La epidemiología es una ciencia cuantitativa, pero detrás de cada dato, de cada cifra hay personas y familias. Ojalá haya matemáticas/os que expliquen ese vínculo esencial entre los modelos para contener la pandemia del COVID-19 dependiendo de variables como la pobreza, la migración y la desigualdad social que parecen describir el entorno nacional, y en particular el de Zacatecas, en el cual se desenvuelve el gran reto de salud pública que enfrentamos.

Es nuestro anhelo y queremos contribuir a que la *Revista Educación Matemática* siga siendo un referente obligado para los estudiosos de esta disciplina en el mundo hispanoparlante. Ojalá otras instituciones y actores revaloremos su importancia en la educación de nuestros pueblos para evitar que sigamos siendo únicamente testigos o víctimas fatales de una pandemia como la que hoy vivimos.

Gema Alejandrina Mercado Sánchez

Domicilio postal: López Portillo #305, C.P. 98618
Guadalupe, Zacatecas, México
Teléfono: 01 (492) 92-39600

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3201.02

La transformación de conocimientos matemáticos en situaciones de escritura ligadas al proceso de institucionalización

The transformation of mathematical knowledge in writing situations related to the institutionalization process

Inés Sancha[1]
Claudia Broitman[2]

Resumen: En el presente artículo se exponen las principales ideas de una investigación[3] centrada en analizar el funcionamiento de algunas situaciones de escritura desarrolladas en clases de Matemática con el propósito de explicitar, reorganizar y sistematizar conocimientos que circularon durante la resolución previa de problemas. La indagación se realiza a través de la implementación y posterior análisis de una secuencia didáctica de Matemática sobre Números Racionales en un aula de 5° año de Nivel Primario. El proceso de institucionalización que se desarrolla a lo largo de la secuencia involucra diversos intercambios orales y prácticas de lectura y escritura. Entre ellos estudiamos particularmente cómo el proceso de escritura posterior a la resolución de los problemas abona a la conceptualización matemática. Partimos del supuesto de que el conocimiento se transforma en las situaciones de escritura ligadas al proceso de institucionalización y nuestro interrogante principal se refiere al modo en que sucede tal transformación.

Fecha de recepción: 03 de septiembre de 2019. **Fecha de aceptación**: 14 de enero de 2020.

[1] Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de la Plata, Argentina, inesancha@yahoo.com.ar, orcid.org/0000-0002-4708-506X

[2] Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de la Plata, Argentina. claubroi@gmail.com, orcid.org/0000-0002-1774-6752

[3] Sancha, I. (2017). *Escrituras en las clases de matemática para explicitar, reorganizar y sistematizar lo aprendido: Análisis de una secuencia* (Tesis de maestría). Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

Palabras clave*: Escrituras - Matemática – Prácticas de estudio - Institucionalización - Educación Primaria*

Abstract: This article contains the main ideas of an investigation centered in the analysis of the functioning of certain writing situations developed in Math classes with the purpose of explaining, reorganizing and systematizing knowledge that circulated during the resolution of the problems. The investigation is done through the implementation and further analysis of a Math didactic sequence regarding Rational Numbers in a fifth year classroom, primary level. The institutionalization process developed throughout the sequence involves diverse oral, reading and writing exchanges. Among them we specifically studied in what way the writing process upon the resolution of the problems contributes to the conceptualization of math. As a starting point we assumed that knowledge is transformed in writing situations connected to the institutionalization process and our main question is referred to the way in which such transformation occurs.

Keywords*: Writing – Mathematics - Study practices – Institutionalization - Primary school*

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las prácticas que se desarrollan tanto en el hacer propio de la disciplina matemática como en el hacer del aula para su aprendizaje, están necesariamente asociadas a prácticas de lectura y escritura. La escritura está relacionada con la posibilidad de crecimiento de las matemáticas. Particularmente la explicitación, la sistematización y la reorganización de conceptos generan nuevas relaciones, nuevos problemas y constituyen parte importante del trabajo matemático. En las clases, los alumnos pueden participar en instancias que les permiten clasificar problemas resueltos o establecer relaciones entre conocimientos que aparentan ser independientes. Se trata de prácticas que se aproximan a la idea de producir y usar modelos matemáticos. Aquí la escritura ocupa un lugar central; al escribir sobre estas relaciones establecidas es posible distanciarse, objetivar el pensamiento y enfrentarse a exigencias lingüísticas que favorecen el progreso en la conceptualización.

La investigación que se presenta estuvo centrada en el funcionamiento de las situaciones de escritura cuyo propósito era explicitar, reorganizar y sistematizar conocimientos que habían circulado en clases de Matemática a partir de la resolución de ciertos problemas. Nos detuvimos en cómo el proceso de escritura posterior a la resolución de los problemas abona a la conceptualización matemática, partiendo de la idea de que el conocimiento matemático se transforma cuando se promueven interacciones sociales a propósito de la escritura durante el proceso de institucionalización.

2. MARCOS TEÓRICOS DE REFERENCIA

El saber a enseñar en la secuencia didáctica implementada involucra prácticas de escritura al servicio de la adquisición de conocimientos matemáticos. Se trata de un saber a enseñar que requiere, para su análisis, de una mirada desde la intersección de dos didácticas específicas en términos de sus contenidos, la Didáctica de la Matemática y la Didáctica de la Escritura.

La indagación se inscribe en la perspectiva de la Didáctica de la Matemática francesa que concibe a las matemáticas como un producto cultural y social, en permanente transformación y construido a través del trabajo de la humanidad al enfrentarse a diferentes clases de problemas. Desde esta perspectiva, la enseñanza de las matemáticas busca generar condiciones para involucrar a los alumnos en procesos colectivos de producción de conocimientos en torno a ciertos objetos matemáticos y de maneras específicas de pensar y producir en esta disciplina (Artigue, 1986; Charlot, 1991).

Un importante marco de referencia para la construcción y análisis de la secuencia implementada en este estudio ha sido la Teoría de Situaciones de Brousseau (1993, 1994, 2007). Sus situaciones de formulación son un referente que nos permite pensar sobre cómo se transforman los conocimientos al ponerlos en palabras para explicitarlos o formularlos por escrito. Apelamos a esta teoría para el estudio de las condiciones didácticas que favorecen que los alumnos produzcan, expliciten y validen sus conocimientos. Además, el concepto de institucionalización como proceso (Perrin-Glorian, 1995; Margolinas, 1993) es central para esta investigación, dado que se pretende analizar cómo funcionan las situaciones de escritura al explicitar, reorganizar y sistematizar lo aprendido.

Un concepto potente para la presente indagación es el de memoria didáctica. Brousseau y Centeno (1991) mostraron que sostener la memoria didáctica evocando la experiencia matemática de los alumnos con relación a conceptos cercanos a los que se están trabajando incide fuertemente en sus aprendizajes. En este estudio, las escrituras producidas en las situaciones de enseñanza resultan un punto de apoyo para el sostenimiento de la memoria didáctica de los alumnos a lo largo de la secuencia implementada.

Otra contribución es tomada de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1997). El autor plantea que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son aspectos particulares del proceso de estudio, entendiendo la palabra "estudio" en un sentido amplio que engloba tanto el trabajo matemático del alumno, como el del matemático. Las situaciones de escritura que se incluyen en la secuencia de enseñanza pretenden formar parte de este proceso.

Como marco referencial de la Didáctica de la Escritura se toman aportes del enfoque de base psicogenética que comparte supuestos epistemológicos considerados en el marco proveniente de la Didáctica de la Matemática. En esta línea, Castedo (2003) conceptualiza la escritura como un proceso cognitivo inserto en un contexto histórico y social y señala que enseñar a escribir es enseñar a participar en una comunidad de discurso con tareas auténticas y en interacción con los otros.

La propuesta de incluir situaciones de escritura en las clases de matemática involucra el supuesto de que el proceso de escritura favorece la transformación de conocimientos. Miras (2000) distingue la función epistémica o heurística de la escritura, como función específica en el marco de la función representativa, y subraya su potencia como instrumento de toma de conciencia y autorregulación intelectual y como instrumento para la construcción del propio pensamiento.

Otros estudios que constituyen una referencia conceptual son los que se han ocupado de la enseñanza y el aprendizaje de la escritura como herramienta para la apropiación de contenidos escolares de algunas disciplinas específicas (Vérin, 1988, 2004; García-Debanc, 1995; Lerner, Aisenberg y Espinoza, 2012). Estos parten de la idea de que la producción de escritos por parte de los alumnos puede jugar un papel decisivo en la elaboración del pensamiento, así como facilitar la puesta en juego de las ideas propias y su transformación progresiva. Uno de los trabajos especialmente relevante es el de Chabanne y Bucheton (2002) vinculado con el papel de los escritos de trabajo o "escrituras intermedias" en la construcción del conocimiento en la escuela primaria. Se trata de escritos destinados a acompañar y estimular la actividad reflexiva durante las tareas de recolección o recuperación de la información.

3. DECISIONES METODOLÓGICAS

La investigación reportada consiste en un estudio cualitativo de carácter exploratorio que asume el marco metodológico del estudio de casos y toma algunos aportes de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995).

La indagación se llevó a cabo a través de la implementación de una secuencia de situaciones de enseñanza de un contenido matemático: los números racionales en su expresión fraccionaria, en un grupo de 5° año de Educación Primaria. Para elaborarla se utilizaron y combinaron problemas matemáticos que involucraban diferentes sentidos de las fracciones extraídos de otras ingenierías (Block, 1987; Block y Solares, 2001), de documentos curriculares y de libros de texto escolares. Para su selección se tuvieron en cuenta la potencia de esos problemas para producir ideas que pudieran ponerse en discusión con las de sus pares, que promovieran rupturas con respecto a los conocimientos anteriores de los alumnos sobre los números naturales y que incluyeran sentidos diversos de las fracciones. En las 17 clases de la secuencia se presentaron distintos momentos de resolución de problemas, de intercambio oral acerca de las resoluciones, así como también instancias de explicitación, reorganización y sistematización de conocimientos en situaciones de lectura y escritura diferentes. Se incluyeron situaciones de escritura individual, en parejas y colectiva por dictado al docente, situaciones de lectura de estas escrituras para recuperar la información y situaciones de revisión y reescritura, todas ellas vinculadas al proceso de institucionalización de los conocimientos matemáticos que circularon en la clase durante la resolución previa de problemas.

Para seleccionar el aula en la que se implementó la secuencia se consideró la formación didáctica del docente,[4] su disposición a participar de la investigación, experiencias previas suficientes del grupo de alumnos en prácticas matemáticas y prácticas de escritura con sentido y condiciones institucionales favorables para implementar la secuencia. El contenido elegido fue los números racionales, en su expresión fraccionaria, dado que su estudio supone enfrentar a los alumnos a numerosas rupturas con respecto a los conocimientos construidos en torno a los números naturales (Block, 1987; Centeno Pérez, 1988; Block y Solares, 2001). Supusimos que ello podría potenciar los intercambios y la diversidad de ideas que incluyen los niños en sus escritos.

[4] Se consideró que el docente seleccionado tuviera un recorrido formativo tanto en los enfoques didácticos que sustentan esta investigación, como en el análisis de sus prácticas de enseñanza.

El diseño de la secuencia se realizó en un espacio de trabajo compartido con el docente en el que, a partir de un esquema de situaciones presentado por el investigador, se hicieron modificaciones de acuerdo al nivel de conocimientos de los niños y al recorrido didáctico ya realizado. Durante la implementación de la secuencia se sostuvo este espacio de intercambio con el docente para realizar ajustes.

Las fuentes para la reconstrucción de la secuencia implementada y su posterior análisis se realizó a partir de un conjunto de insumos: registros de las interacciones que tuvieron lugar en el aula a propósito de la resolución de los problemas y de las escrituras vinculadas al trabajo de explicitación, reorganización y sistematización de conocimientos. Además, producciones escritas de manera colectiva en pizarrón y afiches y las que realizaron los alumnos por sí mismos en sus carpetas.

En este artículo presentamos un recorte de los resultados que forma parte de la dimensión de análisis referida a la transformación de los conocimientos matemáticos en situaciones de escritura ligadas al proceso de institucionalización.[5] Entre los numerosos problemas que resolvieron los alumnos seleccionamos, para este recorte, solo uno de ellos denominado en la secuencia *repartos de "X" chocolates entre "Y" niños*.[6] Para llevar a cabo este análisis se confrontaron las formulaciones realizadas por los alumnos en dos situaciones de intercambio, la puesta en común sobre la resolución del problema y la escritura colectiva de conclusiones en la que se proponía a los alumnos que agregaran nuevas ideas al cartel que venían elaborando desde clases anteriores, titulado: "*¿De qué maneras puedo resolver un reparto?*".

El problema matemático consistía en la comparación de 8 repartos diferentes de chocolates entre niños, en partes iguales y sin que sobrara nada:

---

[5] La necesidad del recorte obedece a la extensión posible de este trabajo. Hemos seleccionado este problema por la relevancia que ha tenido para los alumnos durante la secuencia didáctica y en particular en las siguientes situaciones de escritura.

[6] Se trata de un problema extraído de la tesis de Maestría de David Block (1987), a quien agradecemos por su lectura atenta de las adaptaciones realizadas.

Repartos	Número de chocolates	Número de niños	A c/u le toca
Reparto 1	*2*	*3*	
Reparto 2	*2*	*4*	
Reparto 3	*1*	*3*	
Reparto 4	*3*	*2*	
Reparto 5	*1*	*2*	
Reparto 6	*3*	*6*	
Reparto 7	*2*	*6*	
Reparto 8	*6*	*4*	

A. ¿A los niños de qué repartos les tocará, a cada uno, más de un chocolate?
B. ¿A los niños de qué repartos les tocará la misma cantidad de chocolate?
C. ¿A los niños de qué repartos les tocará más chocolate que a los del reparto 1?
D. Elijan por lo menos un reparto del que estén seguros que a cada chico le toca lo mismo de chocolate que a cada uno del reparto 5.

Para el momento de resolución se organizó a los niños en parejas. Debían responder en primer lugar las preguntas que requerían el establecimiento de ciertas relaciones entre los números intervinientes en los repartos, sin resolverlos, y posteriormente debían resolver uno de los repartos que era indicado por la docente a cada pareja.

4. RESULTADOS

A continuación se presentan algunos resultados referidos a la resolución del problema en parejas, a la puesta en común de las resoluciones de los repartos y a la escritura colectiva.

4.1. Resolución del problema en parejas

Seleccionamos a modo de ejemplo fragmentos del intercambio de una de las parejas, la de Yael que oficiaba de dictante y Natalí que tenía a su cargo la escritura en el papel. Mientras responden la pregunta B, Yael parece tomar conciencia de un conocimiento a partir de enunciarlo para que sea escrito por su compañera.

> [1][7] Yael: Acá (señala reparto 2), tiene que ser la mitad. Y en esta, y en esta (señala muy segura los repartos 5 y 6).
> (Ambas niñas verifican en la tabla mirando los números, nuevamente sin hacer cálculos, "en esta no..., en esta sí..." y concluyen que los que cumplen la condición solicitada en la pregunta son solo los repartos 2, 5 y 6 que permiten obtener las fracciones 2/4, ½ y 3/6, respectivamente)
> [2] Yael: Bueno, poné..., dibujá 2 chocolates. (Da esta indicación a Natalí para representar el reparto de 2 chocolates entre 4 niños). Poné (dicta) les toca la misma cantidad, (dice) porque no es nuestro trabajo poner cuántos sino por qué (no se pedía en la consigna que explicaran por qué). Y abajo ponele el 5, dibujá los chocolates, dibujá los tipitos[8] y poné lo mismo, les toca la misma cantidad. Y en el 6 dibujá 3 chocolates y 6...
> [3] Natalí: (sigue resolviendo en la hoja sin detenerse, de manera casi automática) después hago una llave y pongo (se autodicta) porque son el doble.
> [4] Yael: (dicta) Porque son el doble, (dice) ponele eso... De personas, porque habla de personas y la mitad de chocolate...
> (Natalí continúa resolviendo en la hoja y Yael se queda pensando)
> [5] Yael: Yo no sabía eso de que si era el doble o la mitad... (se queda pensando)
> [6] Natalí: (va diciendo lo que escribe y preguntando) Porque son el doble, ¿de personas?
> [7] Yael: Porque son el doble de personas y la mitad de chocolates. De cantidad, que quede eso, de cantidad. Entre paréntesis ponele (dicta) de cantidad.
> [8] Natalí: ¿Qué pongo?
> [9] Yael: Cantidad. Porque estamos hablando de la cantidad no de la forma.
> (Queda escrito: "Porque son el doble de personas y la mitad de chocolate (cantidad)")

La selección de los repartos que permiten obtener el mismo cociente no parece ofrecer dificultad para estas niñas, dado que con solo mirar los números correspondientes a la cantidad a repartir y a las partes entre las que se reparte esa cantidad, ellas pueden identificar cuáles cumplen la condición solicitada. Yael interpreta la consigna afirmando que no se pide que expliciten cuánto le toca

[7] Se enumeran las intervenciones de docente y alumnos para poder recurrir a ellas en el análisis.
[8] Diminutivo de "tipos", término de uso popular en Argentina para aludir a personas.

a cada niño en el reparto sino las razones por las que esas fracciones representan la misma cantidad [2]. Al justificar por qué esos cocientes son iguales ambas niñas acuerdan en que se debe a que son el doble de personas y la mitad de chocolates [3] [4] [6] [7]. Durante la textualización compartida de estas ideas, Yael reconoce un aprendizaje nuevo: "Yo no sabía eso de que si era el doble o la mitad..." [5]. Ella parece referirse a que si la cantidad de partes entre las que se reparte –representada en el denominador– es el doble de la cantidad a repartir –representada en el numerador–, o bien, esta última es la mitad de la primera, la fracción resulta equivalente a $\frac{1}{2}$. Esta relación que se había puesto en juego a nivel implícito en la selección de los repartos equivalentes pudo ser identificada por esta niña como un nuevo conocimiento gracias al desafío que supuso dictarlo para que su par lo incluyera en la producción escrita de la resolución.

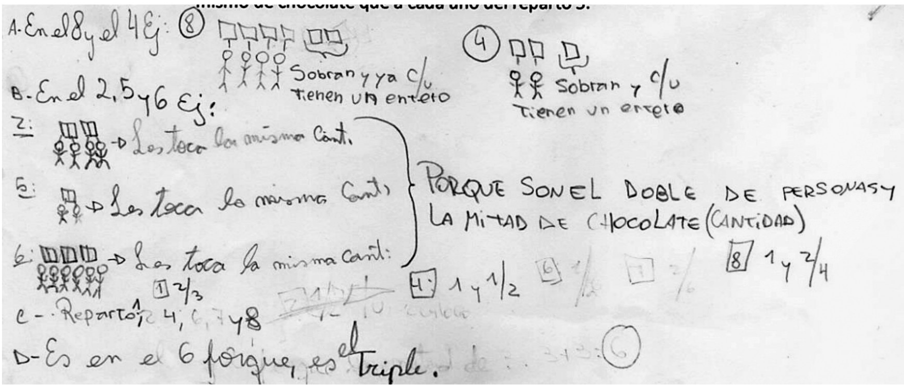


Figura 1: Detalle de la producción de la pareja de Yael y Natalí para resolver el problema de comparación de repartos de "X" chocolates entre "Y" niños.

Veamos cómo responden la pregunta D.

> [10] Yael: Ah, mirá, acabo de descubrir algo. (Señala los números de la tabla, dibuja una rayita en el medio de los chocolates y los chicos en repartos 5 y 3, y lee) Un medio y un tercio.
>
> [11] Camila (niña de la pareja frente a Yael y Natalí): Todos son así, todos son con la rayita. Es como que todos tuviesen la rayita acá (se refiere a que la rayita está entre las columnas de chocolates y de niños). Es así de fácil.

[12] Yael: ¿En serio? (sorprendida) ¿Todos?
[13] Camila: Sí.
(Natalí continúa resolviendo el problema planteado en la consigna D. Yael va haciendo aportes, hace algunos dibujos antes de afirmar que 3/6 es igual a $\frac{1}{2}$ y 2/4 también)
[14] Yael: ¿Sabés qué? Camila me dio una idea. (Va marcando la raya intermedia y va leyendo las fracciones resultantes en cada reparto) Dos tercios, dos cuartos, un tercio, tres dosavos..., no sé, como se diga, ¿entendés? Todos, si les ponés la rayita es el resultado.
(Comienzan a resolver el reparto N°3 que les había sido asignado por la docente. Yael dicta y Natalí escribe cómo lo van resolviendo)
[15] Yael: (dicta) Dividimos el chocolate en 3 y al ser 3 chicos, nos dio justo para 1/3 para cada uno... (dice) Y también anotá eso de la rayita... Es interesante.
(Natalí, que pareció no escuchar la explicación anterior de su compañera, va completando las rayitas que faltaban en la tabla)
[16] Yael: Pero no, las rayitas no, expliquemos algo de eso.
[17] Natalí: Vos explicalo, yo no tuve la idea.

Las relaciones que las niñas iban estableciendo para responder las cuatro preguntas y la disposición de las cantidades en el cuadro de los repartos promovieron que Yael comenzara a observar una regularidad sustancial [10]: los números que indican la cantidad a repartir y la cantidad de partes entre las que se reparte, corresponden respectivamente al numerador y al denominador de la fracción resultante. Si bien este descubrimiento se circunscribió en un principio a los repartos N°3 y N°5, la interacción con Camila [11] [12] [13] facilitó que Yael elaborara la idea de que era posible extender la relación a todos los repartos del cuadro.

Yael intenta compartir el hallazgo con su compañera y propone incluir la explicación –"anotá eso de la rayita"– en la resolución del reparto N°3 porque "es interesante" [14] a [16]. Natalí comienza a completar las rayitas que faltan en el cuadro pero no está dispuesta a incluir la explicación, posiblemente debido a que aún no resultaban claras para ella las razones por las que "funcionaba" tal procedimiento.

4.2. Puesta en común de las resoluciones de los repartos

Al socializar los procedimientos, algunas parejas comenzaron a explicitar la relación entre las cantidades de chocolates y de niños y los números correspondientes al numerador y denominador de la fracción resultante del reparto. Luca y Ramiro fueron los primeros en hacer circular esta nueva relación a propósito del reparto N°2 (2 chocolates entre 4 niños):

[18] Docente: ¿Ustedes lo pensaron igual?, Luca, ¿cómo pensaron?
[19] Luca: Yo de pronto estaba mirando... Hubo una parte que estaba mirando y vi el número de chocolates y los chicos y dije: 2/4, lo comprobé y me daba. Que si el número de chocolates se pone como el primer número, digamos, de arriba, y el número de chicos se pone como la parte de abajo, da igual.
[20] Docente: ¿Así como está acá, 2/4? (señala el número 2 y el número 4 en la misma fila del cuadro)
[21] Luca: Hice la cuenta, después, sí, daba en todas.
[22] Docente: A ver, ¿qué cuenta hiciste?
[23] Luca: Le fui restando a dos, que es el número de chocolates, le fui restando los 2/4 y me dio justo.
[24] Docente: ¿Y vos te das cuenta por qué llegaste a eso de 2/4?
[25] Luca: Emmm (se queda pensando).
[26] Docente: A ver, miren lo que hizo Luca. Luca sabe que tiene estos dos chocolates (los dibuja en el pizarrón), ¿no? Y él dijo, le voy a dar 2/4 a cada uno. Y él se fijó si sacándole 2/4 a esto (señala los dos chocolates) podía decir si recibía 2/4 cada uno. (A Luca) ¿Cuántas veces le sacaste 2/4 a esto?
[27] Luca: 4 veces.
[28] Docente: 4 veces, ¿por qué?
[29] Luca: Porque son 4 chicos.
[30] Docente: Porque son 4 chicos los que están en el reparto. Pero, ¿yo puedo decir que porque sí, a mí se me ocurrió decir que iba a recibir cada uno 2/4? De algún lado salió, ¿cómo llegaste a eso?
[31] Luca: Llegué porque... primero vi el número de chocolates y después vi el número de chicos y ahí se me vino a la cabeza 2/4. Cuando hice la cuenta sí daba que eran 2/4.
[32] Docente: ¿Entendieron cómo lo pensó él?
[33] Sofía O.: Yo no entendí por qué los 2/4 y no 3 (se refiere a ¾).
[34] Docente: (A Luca) ¿Por qué hiciste 2/4 y no ¾?, dice Sofía. ¿De dónde sale ese 2 y de dónde sale ese 4?
[35] Luca: El 2 sale de, del número de chocolates y el 4 sale del número de chicos. (Ramiro va señalando en el cuadro de su hoja los números que menciona Luca para que toda la clase los vea)
[36] Docente: ¿Entendés, Sofi, por qué dijo el 2 y por qué dijo el 4 y no el 3?

[37] Sofía O.: Sí.
[38] Docente: Porque 2 son la cantidad de chocolates y 4 la cantidad de chicos.

La explicación de Luca da cuenta de cierta captación visual de las relaciones entre la cantidad que corresponde al numerador y la cantidad que corresponde al denominador de la fracción resultante: "estaba mirando y vi..." [19], "primero vi el número de chocolates y después vi el número de chicos y ahí se me vino a la cabeza 2/4" [31]. Esta relación que va estableciendo de manera intuitiva necesita ser comprobada para poder ser extendida luego a los demás pares de números [21] [31]. Para validar su conjetura, Luca no realiza el reparto de los dos chocolates entre cuatro chicos sino que efectúa cuatro restas sucesivas de 2/4 a los dos chocolates que tiene para repartir y concluye que es verdadera. Este uso de la resta se vincula con el sentido de partición que tiene el problema. La docente pregunta y repregunta con la intención de que Luca haga cada vez más explícita la relación que elaboró y que se difunda en la clase para que pueda ser comprendida por el resto de los alumnos.

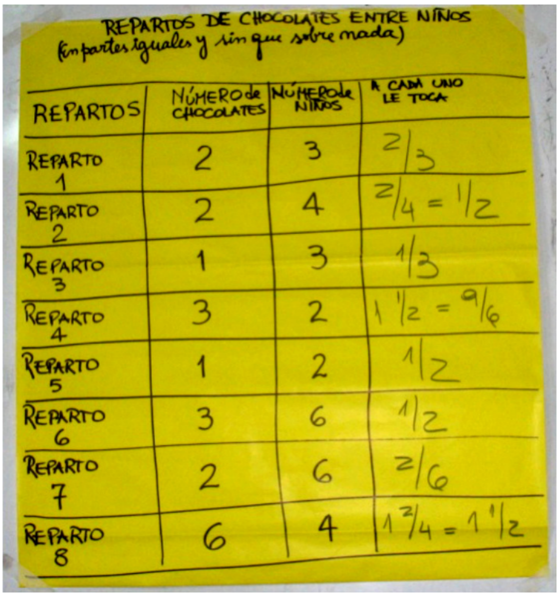


Figura 2: Afiche con el cuadro completo que resume los repartos de "X" chocolates entre "Y" niños.

4.3. Escritura colectiva

El intercambio producido en torno al procedimiento que pone en juego la relación entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b* despertó gran interés en los alumnos. Antes de pasar a la puesta en común de las respuestas a las cuatro preguntas que iniciaban el problema, la docente propuso registrar por escrito en el afiche que ya venían elaborando la nueva forma de resolución hallada. El afiche estaba encabezado por el título "¿De qué maneras puedo resolver un reparto?".

El dictado al docente se centró en un primer momento en el grado de generalidad que asumiría la formulación del nuevo modo de resolver para trascender el contexto extramatemático en que se había planteado el problema:

[1] Docente: ¿Cómo puedo poner, Yael?
[2] Yael: (dicta) Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir...
(La docente escribe: "Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir")
[3] Yael: (dicta) Y el objeto que tenés que repartir... (dice) ¿cómo se dice?
[4] Natalí: (dicta) Y el entero.
[5] Yael: (dicta) Y el entero.
[6] Lucas: La cantidad, (dicta) y la cantidad de chocolate.
[7] Natalí: Porque no siempre es un entero.
(Murmullo)
[8] Docente: ¡Paren! Yael dijo, (lee) si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y (dice) ¿el entero? Natalí está diciendo: no siempre es un entero. Macarena dice que podrían agregar 'la cantidad', él dijo lo mismo, ¿cómo podemos poner?
[9] Macarena: (dicta) Y la cantidad que tenés para repartir, (dice) lo que pasa que quedaría...(no se entiende)
[10] Docente: ¿Y la cantidad que tenés para repartir? (escribe: "la cantidad que tenés")
[11] Yael: Porque si no, sería de chocolates pero no siempre son chocolates.
[12] Docente: Escuchen esto que dice Yael. Yael dice no poner la cantidad de chocolates porque no siempre son chocolates.
[13] Natalí: De objetos podés poner.
[14] Docente: ¿Les parece que está bien esto que está diciendo Yael?
(Interrupción)
[15] Docente: (retomando) Ellas están tratando de explicar cómo es que yo puedo poner la rayita y me daba dos tercios para cada nene, ¿sí? Yael dijo, (lee) si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés.

[16] Yael: (dicta) Para repartir, ponés... emmm.
[17] Macarena: (dicta) Ponés la cantidad... (dice) Lo que pasa que queda mucho 'cantidad'.
[18] Docente: Piensen esto, es un borrador. Uno cuando escribe, por ahí escribe un montón de cosas y no siempre lo primero que escribe es lo que va a quedar, ¿o no? Vamos a ir revisándolo, si hay que tachar tachamos. Si hay que agregar, agregamos. Dale.
[19] Macarena: (dicta) Ponés... la cantidad... de... (dice) no sé.
[20] Varios alumnos: (dictan) La rayita.
[21] Docente: Maca, ¿ponés la qué?, ¿la rayita?
(Murmullos)
[22] Docente: Escuchen, Yael hizo esta introducción, (lee) si yo sé la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir ponés... (dice) ustedes qué tuvieron en cuenta, la cantidad de chocolates y entre la cantidad de personas que se hacía ese reparto, ¿y qué te indicaba cada cosa?
(Algunos niños responden pero no se entiende)
[23] Docente: (destapa el afiche de los repartos del problema y señala allí en la primera fila). Por ejemplo, vos Maca, habías dicho, si es 2 chocolates entre tres nenes es 2/3, ¿sí o no?, bueno, ¿cómo hiciste eso, cómo lo pensaste?
[24] Macarena: No sé, porque yo en realidad primero partí los chocolates dibujándolos y después mirando me di cuenta de que era lo mismo.
[25] Docente: Está perfecto, pero estamos tratando de explicar esta forma. ¿Cómo puedo hacer yo para que entiendan esta nueva forma? Ustedes acá saben la cantidad que tienen para repartir y entre la cantidad que tienen que hacer ese reparto. Yael lo empezó así. ¿Qué es lo que hicieron ustedes?
[26] Yael: La rayita. La rayita entre...
[27] Natalí: La barra.
[28] Lucas: ¡El dominador (sic) y el numerador!
[29] Yael: No entre coso, entre la cantidad de.... repartir...
[30] Docente: ¿A ver, Cami?
[31] Camila: Yo quería poner, por ejemplo, que la cantidad se transforma en el numerador y las personas en el denominador.
[32] Docente: Camila dice que esta cantidad de cosas que yo tengo para repartir se transforma en el numerador y la cantidad de personas que tengo para hacer el reparto se transforma en el denominador. ¿Están de acuerdo con eso?
[33] Varios alumnos: Sí.

[34] Yael: ¿Pero primero no tenemos que anotar qué es el numerador y el denominador?
[35] Docente: Si quieren después podemos poner un ejemplo. A ver, Cami, ponés ¿qué? A ver, dale (invitándola a que continúe con el dictado).
[36] Camila: No sé.
[37] Docente: Como me lo dijiste vos.
[38] Camila: Pero con 'ponés la' (era lo último que habían escrito), no sé bien. (dicta) Ponés la rayita entre medio de la...
[39] Docente: Lo que dijiste antes.
[40] Camila: Que después se transforma la cantidad de personas en el denominador y...
[41] Docente: Esperá, ¿'después', dijiste? (escribe: "después se transforma la cantidad")
[42] Camila: Sí.
[43] Docente: ¿La cantidad?
[44] Camila: (dicta) De personas en el denominador.
[45] Docente: ¿La cantidad de fracciones?
[46] Camila: No, de personas.
[47] Docente: ¿Habías dicho de personas? ¿En qué se transforma la cantidad de personas?
[48] Camila: En el denominador.
[49] Docente: (lee mientras escribe) Y después se transforma la cantidad de personas en el denominador. (dice) ¿Y qué más?
[50] Camila: (dicta) Y lo que tenés que repartir en el numerador.
(Queda escrito en el cartel: "Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, después se transforma la cantidad de personas en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador")

En sus primeras intervenciones Yael y Natalí parecen preocupadas por aludir a la cantidad a repartir usando algún término que no solo refiera a los chocolates que formaron parte del contexto del problema de origen; de allí que proponen "el objeto" o "el entero que tenés para repartir" [3] [4] [5] [13]. La propuesta de Lucas: "la cantidad de chocolate" [6] obliga a estas alumnas a explicitar que puede ocurrir que lo que se reparta no sean chocolates o que ni siquiera sean enteros [7] [11]. Se suceden entonces algunas propuestas que coinciden en escribir "la cantidad que tenés para repartir" sin especificaciones acerca de qué se reparte, aunque la repetición del término 'cantidad' no convence demasiado a Macarena [9] [17]. La preocupación que introduce esta alumna no está centrada en el contenido de la producción escrita, sino en un problema de cohesión textual, la pertinencia de la repetición léxica. Cuestiones como esta, vinculadas a la redacción, se intercalan con las que se centran en el contenido de la producción y vuelven a aparecer en el fragmento siguiente del intercambio.

Para superar el escollo que suponía para los niños la formulación en términos algo más generales, la docente se esfuerza por que reparen en la relación entre las cantidades que están intentando diferenciar y los componentes que integran la fracción resultante del reparto [22] [23] [25]. Si bien en principio solo mencionan "la rayita" y dudan al definir las cantidades que corresponden al numerador y al denominador, una de las alumnas, Camila [31], logra enunciar oralmente esta relación: "la cantidad se transforma en el numerador y las personas en el denominador". A pesar de haber propuesto la idea, ponerla en palabras aptas para poder ser textualizadas no resulta una tarea sencilla; el intercambio producido en las intervenciones [35] a [50] está dedicado a ajustar esta escritura. Es interesante la propuesta de Yael [34] de agregar la definición de numerador y de denominador a la descripción de Camila. Pareciera que esta alumna percibe la necesidad de aclarar estos conceptos ya que se han formulado de manera muy imprecisa en los intentos del grupo por describir el procedimiento encontrado.

El fragmento siguiente incluye intervenciones de los niños orientadas a mejorar la redacción del texto producido y a discutir el alcance de la generalización del procedimiento en cuestión y la información que es necesario incluir para que resulte más clara para el lector. La docente da lugar a todas las intervenciones aunque no todas las propuestas son incluidas en la producción escrita, ya que permanentemente las hace circular para que sean consensuadas:

[51] Docente: A ver, escuchen esto (lee lo que quedó escrito). ¿Están de acuerdo con esto? ¿Albertina?
[52] Albertina: Profe, dice (lee) para repartir, después se transforma (dice) y después hay que poner 'en, en la cantidad de la que tenés que repartir'.
[53] Valentina: No, para mí está bien. Porque ella dice de poner 'después se transforma en la cantidad'...
[54] Docente: Porque ¿quién es el que se transforma? ¿Se transforma la cantidad de personas? A ver, dice (lee) después se transforma la cantidad de personas en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador. (dice) ¿Están de acuerdo con eso que dijo Camila? ¿Sofi?
[55] Sofía: Yo le pondría en 'para repartir', punto, después... Porque si no, estás...

[56] Lucas: Profe, yo le pondría una rayita. El numerador, por ejemplo el uno, un medio, ¿no? (hace gesto de dibujar la línea de la fracción en el aire)
[57] Docente: Es verdad que ustedes lo pensaron así, agregarle esta rayita. Maca, Yael, Camila, habían pensado en esta rayita (completa las líneas de las fracciones en los repartos del cuadro). Al decir que esta cantidad de chocolate se transforma en el numerador (señala la columna 'Número de chocolates') y que las personas entre las que hacen el reparto (señala la columna 'Número de niños') se transforman en el denominador, ¿no estamos hablando de que ya es una fracción? De hecho, ¿ustedes no llegaron a hacer todo este tipo de anotaciones (señala la columna 'A cada uno le toca' en la que hay diferentes fracciones escritas)? Lucas, lo que estaba haciendo Camila era explicar por qué este 2 que estaba acá (señala el 2 en la columna 'Número de chocolates') pasaba acá (señala el numerador de la fracción resultante) y este 3 (señala el 3 en la columna 'Número de niños') pasaba acá (señala el denominador de la fracción resultante), ¿sí? ¿Es necesario agregar lo de la rayita? ¿Están de acuerdo con esto? (señala lo que escribieron). Valentino, ¿estás de acuerdo con esta explicación?, ¿sirve para resolver un reparto?
[58] Valentino: En este caso sí, pero por ahí en otro caso, no.
[59] Docente: ¿En otros repartos no sirve?
[60] Valentino: Para mí, no.
[61] Docente: ¿Por qué?
[62] Valentino: Por ejemplo, si no hay un entero de chocolate, hay un medio de chocolate.
[63] Docente: Lo de Camila, sí.
[64] Valentino: No… creo que no sirve.
[65] Varios alumnos: No entiendo lo que dice Valentino.
[66] Docente: Pensando en estos casos (se refiere a los repartos del problema), después vamos a ver qué pasa cuando yo no tengo enteros, pensando en estos casos, yo tengo enteros para repartir entre ciertas personas, ¿me sirvió esta forma?
[67] Varios alumnos: Sí.
[68] Docente: ¿Están todos de acuerdo? ¿No quieren modificar nada más de esta forma?
[69] Yael: Podemos poner un ejemplo.
[70] Docente: ¿Qué ejemplo?
[71] Yael: Y, le ponemos ejemplo y una fracción y le ponemos lo de arriba es el numerador y lo de abajo…
[72] Natalí: Explicar qué es el numerador…
[73] Docente: Nosotros, alumnos de 5°, si leemos que la cantidad de chocolate se transforma en el numerador y que la cantidad de personas por las que yo tengo

que hacer el reparto se transforma en el denominador, ¿necesitamos poner qué es el numerador y el denominador?
(Silencio, algunos alumnos dicen que no)
[74] Docente: Les estoy haciendo una pregunta a ustedes, eh, ¿no?, ¿es suficiente con esto?
[75] Martina: Para mí el 'después' ese queda un poco de más.
[76] Docente: ¿Qué pongo?
[77] Martina: Tachalo y poné directamente 'se transforma...'
[78] Docente: Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, se transforma la cantidad de personas en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador.
[79] Fabricio: Para mí en el 'tenés que repartir' de abajo va coma, (lee) lo que tenés que repartir, (dice) coma, (lee) en el numerador.
[80] Docente: Yo les había hecho una consulta, en esta forma que ustedes habían puesto (señala el afiche), nosotros ya sabemos que estamos resolviendo repartos. Si yo estoy resolviendo un reparto hay algo para repartir entre algo, ¿no? En los anteriores, ¿necesitaron aclarar esto de que si yo tenía para repartir algo entre tantas personas?
[81] Algunos alumnos: No.
[82] Docente: Fueron directamente a la forma de resolverlo. Pensando en eso, ¿qué podría yo registrar en el afiche?
(Silencio, parecen cansados de la situación, algunos hacen propuestas que no llegan a concretarse)
[83] Natalí: ¿No quedaría mejor: la cantidad de personas se transforma en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador?
[84] Docente: Natalí dice primero poner la cantidad de personas se transforma en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador. Este 'se transforma' trasladarlo acá, (subraya 'se transforma' y hace una flecha indicando el lugar donde iría, luego lee) la cantidad de personas se transforma en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador.
[85] Varios alumnos: Está bien.
[86] Docente: Lo dejo ahí.
[87] Inv.: Hoy escuché a Valentino que dijo: –pero puede ser que entre los que se reparta no sean personas. ¿Eso sirve para pensar en cambiar algo más o lo dejamos con personas?
[88] Docente: Está diciendo esto que había dicho Yael con respecto a lo que yo tenía que repartir. Algunos dijeron de poner chocolates y Yael dijo que no siempre se

reparten chocolates. ¿Y esto que está diciendo Valentino, tiene razón o no? Valentino dijo que no siempre es entre personas el reparto.
(Murmullo)
[89] Docente: ¿Entonces cómo puedo poner, qué puedo sacar o qué puedo agregar?
[90] Fabricio: Si sabés la cantidad de cosas para repartir.
[91] Docente: (lee) Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, (dice) ¿a qué se está refiriendo con la cantidad de personas?, ¿son las cosas que yo reparto?
[92] Yael: No, son las cosas que...
[93] Natalí: A quién repartís.
[94] Lucas: En partes que lo repartís.
[95] Docente: ¿Cómo puedo poner esto de las personas para que no quede como que es exclusivo para cuando son personas?
[96] Camila: Son las veces que tenés que...
[97] Docente: ¿Si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir, pongo? (lo escribe)
[98] Alumno: Objetos.
[99] Docente: ¿Siempre van a ser objetos?
[100] Alumno: Pueden ser muchas cosas.
[101] Docente: ¿Y no habrá una palabra que reúna todo eso que puede llegar a ser?
[102] Lucas: ¡Seres vivos!
[103] Docente: Esto que los chicos dicen que (lee) Si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, (dice) ¿no es suficiente eso?
[104] Sofía O.: Ese 'se transforma' abajo para mí iría después de 'para repartir'.
[105] Docente: Vos seguís con lo de 'se transforma'. A ver, (lee) después se transforma la cantidad de veces en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador, (dice) o puede quedar (lee cambiando de lugar 'se transforma') después la cantidad de veces se transforma en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador. (dice) Puede quedar como la opción 2 o como está así, hace un rato dijeron así, por eso no lo agregué.
[106] Varios alumnos: La 2. Otros: ¡Dejalo así!
[107] Docente: ¿Quiénes prefieren la 2?
(Algunos alumnos levantan la mano, otros gritan: ¡así!).
[108] Docente: ¿Lo dejo así? ¿Me escuchan? No modifica el sentido del texto. Si yo pongo el 'se transforma' ahí o donde está la flechita no va a modificar lo que vamos

a entender. ¿Lo pongo así en el afiche? (se refiere a copiar lo que estuvieron escribiendo en el pizarrón en el afiche).
[109] Alumnos: ¡Sí!
(Queda escrito: "Si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, después se transforma la cantidad de veces en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador". Posteriormente se pasa en limpio al afiche)

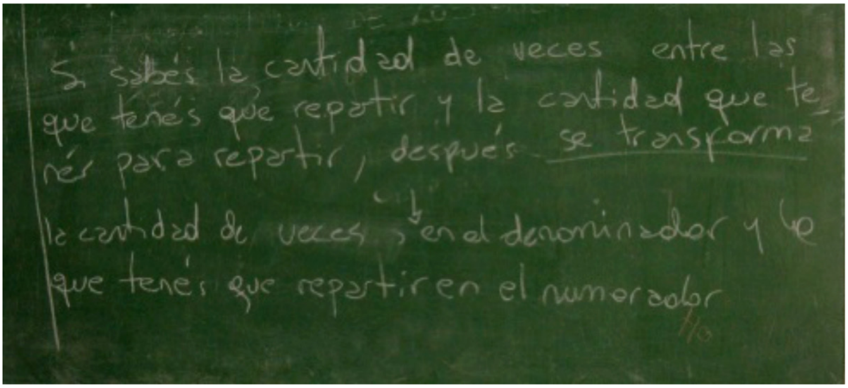


Figura 3: Escritura colectiva en borrador para ser agregada al cartel que lleva el título: ¿De qué maneras puedo resolver un reparto?, sobre el procedimiento que pone en juego la relación entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b*

Los intereses de los niños giran en torno a tres núcleos que se van superponiendo. Uno de ellos es la necesidad de incluir información o ejemplos acerca del significado de los componentes de una expresión fraccionaria –numerador, denominador y línea de la fracción–, dado que son conceptos que se mencionan en la explicación del procedimiento que acaban de escribir y no parecen haber sido suficientemente definidos para algunos alumnos. Así, Lucas [56] propone agregar "la rayita" a través de un ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$, a continuación de 'se transforma la cantidad de personas en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador'. Yael y Natalí [34] [69] [71] [72] insisten en la necesidad de incluir un ejemplo con una explicación sobre qué es el numerador y qué es el denominador. Frente a estas propuestas, la docente [73] explicita quién es el destinatario del escrito y tematiza el problema de la información que es necesario incluir de acuerdo a los conocimientos que supuestamente este ya domina. En este caso el destinatario son los propios alumnos de 5° año, por eso la intervención de la docente pone de relieve la importancia de representarse a sí mismos como futuros lectores del texto que están produciendo y de preguntarse si les han quedado conceptos implícitos que sería necesario desarrollar para comprender el escrito o, por el contrario, si al desarrollarlos, el texto resultaría redundante o sobrecargado porque ya disponen de la información suficiente para interpretarlo.

Otro núcleo del intercambio está centrado en el dominio de validez de la formulación general que han elaborado para describir el procedimiento. Al releer la explicación que han escrito, Valentino plantea que esta forma sirve para este caso pero puede no servir para otros [58]. La preocupación se enlaza con la discusión que había tenido lugar en la puesta en común, a partir de la reflexión de Camila acerca de la imposibilidad de usar "la rayita" para resolver el reparto de $\frac{1}{4}$ de chocolate entre 2 niños. Si bien la docente pospone el análisis de estos casos para otro momento y propone escribir sobre aquellos en los que se reparten enteros [66], resulta interesante señalar el interés que perdura en algunos niños por incluir en el texto la restricción de la validez de este procedimiento argumentando que no sirve para casos en los que lo que se reparte no llega a ser un entero de chocolate [60] [62] [64].

Un segundo aspecto del interés en la búsqueda de una forma más general de referirse al procedimiento de "la rayita" se retoma al proponer a los niños que reflexionen sobre cómo están expresadas en el texto las partes entre las que se reparte [87] [88], hasta ese momento formuladas en términos de personas: "Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir...". Valentino había señalado que los repartos no siempre se realizan entre personas, por eso la docente vuelve a plantear de qué modo escribirlo [89] [95] y los niños intentan diferentes maneras de expresarlo: cosas, partes, objetos, seres vivos, entre otras [90] [92] [93] [94] [96] [98] [100] [102], para finalmente reemplazar la palabra 'personas' por 'veces': "Si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir...".

El tercer núcleo de intereses aparece intercalado a lo largo de todo el fragmento, en este caso los alumnos parecen centrados en la forma y no tanto en el contenido del escrito. Se suceden entonces numerosas sugerencias que apuntan a mejorar la redacción, aunque en el fragor de la discusión varias de ellas no llegan a ser tomadas por la docente. Encontramos un primer intercambio [52] a [54] en el que Albertina sugiere agregar 'en' en una parte del texto y Valentina se opone argumentando que es correcta la escritura tal como está; este señalamiento es aceptado como válido rápidamente por la docente dado que el agregado cambiaría el sentido del escrito. Luego Sofía y Fabricio hacen sugerencias de puntuación [55] [79] que quedan diluidas en el intercambio.

Martina hace una indicación explícita para que la docente tache la palabra 'después' porque "parece un poco de más" [75] a [78] aunque esta solicitud no aparece reflejada en la producción. En este caso, el señalamiento sobre la redacción sí involucra una cuestión conceptual: al proponer eliminar la palabra 'después', la alumna estaría reconociendo que no se trata de dos momentos en el procedimiento de resolución sino que la relación entre los componentes del reparto es constitutiva de la fracción resultante.

Luego, varios alumnos proponen hacer un cambio en el lugar en que se ubica 'se transforma' [83] [85] [104] [106] [109]. Esta sugerencia es tomada por la docente en varias oportunidades [84] [105] [107] [108] y dado que los niños no alcanzan un acuerdo se concluye que su ubicación no cambia el sentido del texto.

El fragmento muestra que los niños ponen en circulación conocimientos diversos con el fin de hacer más preciso el sentido de su producción. La preocupación que los alumnos manifiestan por mejorar la escritura contribuye a profundizar la comprensión del contenido involucrado.

Al poner en relación las formulaciones que hicieron los niños en la discusión de las resoluciones de los repartos y en la situación de escritura colectiva para agregar ideas al cartel, identificamos un asunto en común, entre otros, que refiere a la descripción del procedimiento que pone en juego la relación entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b*. En la discusión sobre los repartos los niños reconocen haber realizado una captación perceptiva de las relaciones entre los números que parece estar favorecida por la disposición de los datos en el cuadro. Por otra parte, se centran en la ubicación que corresponde a cada uno de los datos en la fracción –"número de chocolates arriba" o "número de chicos abajo" de la "rayita"–, en términos más bien figurativos. Frente a la exigencia de poner este procedimiento en palabras para ser escritas en el afiche los niños hacen intentos por describir el procedimiento con mayor grado de generalidad. Es así que proponen diferentes términos que no remiten al contexto del problema hasta lograr explicitar que la cantidad a repartir se transforma en el numerador y las personas entre las que se reparte, en el denominador. En el escrito ya no se menciona la ubicación espacial en la fracción ni la "rayita" a la que aludían coloquialmente en la puesta en común ya que han profundizado en la conceptualización de la relación hallada.

5. REFLEXIONES FINALES

En las situaciones de escritura de conclusiones, los alumnos mostraron cierta tendencia al uso de formulaciones más generales y descontextualizadas que las utilizadas en las discusiones sobre los problemas. Si bien en diferentes oportunidades a lo largo de la secuencia, el uso de formulaciones con algún grado de generalidad fue promovido por la docente que proponía a los niños escribir ideas que les sirvieran para varias situaciones, consideramos que fue el propósito del escrito el que los convocó a producir numerosos enunciados que no remitían al contexto del problema. El intento por componer un texto en colaboración que incluyera las ideas aprendidas hizo posible cierta profundización en las reflexiones y el establecimiento de algunas nuevas razones o relaciones matemáticas que propiciaron avances en los conocimientos respecto de los que circulaban en la puesta en común de los problemas.

Encontramos situaciones en las que las ideas que los niños incluyeron en la escritura colectiva tenían menor nivel de profundidad que las que formularon en el momento del intercambio sobre el problema. Si bien en esta investigación partimos del supuesto de que la escritura propicia la transformación de conocimientos, coincidimos con otros estudios sobre escrituras al servicio del aprendizaje de contenidos escolares (Aisenberg, 2012; Perelman, 2008) que afirman que las producciones escritas no siempre viabilizan el acceso a los conocimientos de los alumnos en forma completa. Nos permitimos conjeturar que en ciertas ocasiones la preocupación por el proceso redaccional los descentra del contenido que intentan incluir en el texto.

Otro aspecto que nos parece importante subrayar es la preocupación que mostraron los niños en algunos momentos por el modo de escribir. Si bien los textos que produjeron consistían en escrituras intermedias (Chabanne y Bucheton, 2002), cuyo propósito era facilitar el propio estudio, los tenían a ellos mismos como destinatarios y solo serían publicados en el aula, los alumnos propusieron hacer pequeños ajustes en la escritura que les permitieron profundizar en la conceptualización. Por ejemplo, creemos que la tendencia a homogeneizar los verbos en su forma impersonal resultó un efecto de compartir el conocimiento y hacerlo público en la comunidad del aula. De esta manera iniciaron un proceso de despersonalización (Chevallard, 1997), necesario para distanciarse del saber que estaban produciendo y reorganizarlo de una manera cada vez más explícita y objetiva. Los conocimientos que los niños pusieron en circulación con el fin de hacer más preciso el sentido del texto que estaban escribiendo contribuyeron a profundizar la comprensión del contenido involucrado.

Resaltamos también que los avances suscitados a través de estas prácticas de escritura tuvieron lugar bajo ciertas condiciones didácticas sostenidas por la docente. Por ejemplo, si bien no todas las propuestas de los niños pudieron ser incluidas en la producción colectiva, ella habilitó la palabra para que se expusieran y las hizo circular permanentemente para que fueran consensuadas por todos.

Un aspecto no previsto con el que nos encontramos en la implementación de la secuencia fue el modo en que las decisiones que tomaba la docente durante la situación de dictado incidían sobre el proceso de validación tanto de los conocimientos matemáticos como de las formas de expresarlo que usaban los alumnos. Entre la diversidad de textos intentados (Camps *et al.*, 2007) que proponían los niños, la docente iba seleccionando los más avanzados en términos de relaciones matemáticas involucradas, o enunciados de manera más general, o los que más se aproximaban a lo que se esperaba que produjeran, para textualizar en el escrito colectivo. Haber anticipado este modo de validar surgido en las clases nos hubiera permitido prever intervenciones del docente que tuvieran el propósito de tematizar las diferencias entre las propuestas de los niños con la intención de que la validación se produjera a partir del análisis colectivo de las mismas.

Este trabajo puede resultar un aporte a la Didáctica de la Escritura, a la Didáctica de la Matemática y a la producción codidáctica. Numerosos estudios sobre la escritura (Teberosky, 2001; Miras, 2000) y sobre la escritura al servicio de la apropiación de contenidos escolares, especialmente de ciencias naturales y ciencias sociales (Vérin, 1988, 2004; García-Debanc, 1995; Aisenberg y Lerner, 2008; Aisenberg, 2012; Lerner, Aisenberg y Espinoza, 2012, entre otros), han planteado que esta práctica está asociada a la transformación de los conocimientos y que facilita tanto el aprendizaje en estas áreas curriculares como el reconocimiento de los propios procesos de escritura. Esta investigación retoma esas ideas y muestra cómo es posible instalar condiciones didácticas en el aula para que las escrituras favorezcan, del mismo modo, el avance de los niños en sus conocimientos sobre un objeto matemático.

La Didáctica de la Matemática viene produciendo en los últimos años teorías y conceptos que se ocupan de aspectos metacognitivos ligados al estudio, a la toma de conciencia y reflexión sobre el propio saber, así como a los distintos tipos de intervenciones didácticas que propician la explicitación, reorganización y sistematización de los conocimientos (Brousseau, 1986, 1988, 2007; Chevallard, 1991; Margolinas, 1993; Perrin-Glorian, 1995; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Bosch, Gascón. 2009). El presente trabajo se inscribe en la línea de estos estudios y profundiza en el diseño de situaciones de enseñanza de objetos matemáticos que involucran además, como un componente importante, situaciones de escritura orientadas a la reconstrucción e institucionalización de los conocimientos.

Nos parece primordial insistir en la necesidad de valorar la potencia de la escritura en la transformación del conocimiento matemático para que se incluyan sistemáticamente situaciones de producción, retorno y revisión en las aulas. Creemos que vale la pena el esfuerzo de estudiar las tensiones que enfrentan los niños al escribir en esta disciplina particular para poder planificar y sostener condiciones de enseñanza en las que la escritura se presente como un verdadero problema por resolver y los conduzca a mejores aprendizajes. Quedan pendientes numerosas preguntas para futuras investigaciones sobre las escrituras en las clases de matemática en el marco del proceso de institucionalización que podrían ubicarse en el espacio de confluencia entre la Didáctica de la Matemática y la Didáctica de la Escritura.

REFERENCIAS

Aisenberg, B. (2012). Usos de la escritura en la enseñanza de la Historia. *Clío & Asociados* (16), 99-105.

Aisenberg, B. y Lerner, D. (2008). Escribir para aprender Historia. En *Lectura y Vida, Revista Latinoamericana de Lectura, 29*(3), 24-43.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, L., Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (1986). Epistemología y Didáctica. En *Recherches en Didactique des Mathématiques,* (10). Traducido en 1993 por el PTFD Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Buenos Aires.

Block, D. y Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: Análisis didáctico de un vínculo. En *Revista Educación Matemática, 13*(2), 5-30.

Block, D. (1987). *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria.* Tesis de Maestría en Ciencias en la Especialidad de Educación. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En González, M.J., González, M.T. y Murillo J. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII*, 89-113. SEIEM.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Brousseau, G. [1988] (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.) *Didáctica de matemáticas. Aportes y Reflexiones*. Paidós.

Brousseau, G. [1986] (1993). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. En *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-116. Traducción de la Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau G. y Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11*(2/3), 167-210.

Bucheton, D. y Chabanne, J.-Ch. (2002). L'activité réflexive dans les écrits intermédiaires: quels indicateurs? En *L'écrit et l'oral réflexifs*. P.U.F.

Camps, A., Guasch, O., Milian, M. y Ribas, T. (2007). El escrito en la oralidad: el texto intentado. En *Archivos de Ciencias de la Educación, 1*(1).

Castedo, M. (2003). *Procesos de revisión de textos en situación didáctica de intercambio entre pares*. Tesis de Doctorado del Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Centeno Pérez, J. (1988). *Números decimales, ¿por qué?, ¿para qué?* Madrid: Síntesis.

Chevallard, Y. [1991] (1997). *La Transposición Didáctica*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* ICE - Horsori Editorial.

Charlot, B. (1991). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Traducción en versión mimeo de la conferencia publicada en Bkouche, R.; Charlot, B.; Rouche, N.: *Faire des mathematiques: le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin.

García-Debanc, C. (1995). Interactions et construction des apprentissages dans le cadre d'une démarche scientifique. *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle,* (12), 79-103.

Lerner, D., Aisenberg, B. y Espinoza, A. (2012). La lectura y la escritura en la enseñanza de Ciencias Naturales y de Ciencias Sociales. Una investigación en didácticas específicas. *Anuario de Investigaciones en Ciencias de la Educación*. 2010-2011, 529-541. Universidad de Buenos Aires.

Margolinas C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage. Versión traducida y mimeografiada.

Miras, M. (2000). La escritura reflexiva. Aprender a escribir y aprender acerca de lo que se escribe. En *Infancia y aprendizaje,* (89), 65-80.

Perelman, F. (2008). *El resumen sobre el papel. Condiciones didácticas y construcción de conocimientos.* Miño y Dávila.

Perrin-Glorian, M-J. (1995). *Condicionamientos de Funcionamiento de los docentes en el colegio secundario: lo que nos enseña el estudio de "cursos flojos".* Ficha mimeografiada.

Sancha, I. (2017). *Escrituras en las clases de matemática para explicitar, reorganizar y sistematizar lo aprendido: Análisis de una secuencia* (Tesis de maestría). Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

Teberosky, A. (2001). Las prácticas de escritura. desde un enfoque constructivista. En Castorina, J.: *Desarrollos y problemas en psicología genética.* Eudeba.

Vérin, A. (2004). Los lenguajes en la organización de la clase de Ciencias. En Belmonte Gómez, J.M. y otros: *Los lenguajes de las ciencias.* Serie: Aulas de Verano. ISFP. Ministerio de Educación, cultura y deporte. España.

Vérin, A. (1988). Apprendre à écrire pour apprendre les sciences. En *Aster, recherches en didactique des sciences expérimentales*, (6), 15-46.

Inés Sancha y Claudia Broitman

Dirección: Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Calle 51 y 124, Ensenada (1925), Provincia de Buenos Aires, Argentina.

Teléfono: 54221 4236673 int 2184

 DOI: 10.24844/EM3201.03

Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior

Definitions and images of the concept of angle and its measurement among students who are beginning their undergraduate studies

Yanira Pachuca Herrera[1]
Gonzalo Zubieta Badillo[2]

Resumen: El título de este escrito provoca a priori desconcierto, pues el lector podría considerar que el concepto de ángulo y su medida, está superado por los estudiantes al iniciar una licenciatura, no obstante, aunque algunas dificultades reportadas en la literatura si lo están, otras todavía persisten. En matemáticas la definición de un concepto resulta relevante, sin embargo, en la práctica los estudiantes recurren usualmente a la imagen evocada del concepto, lo que con frecuencia les trae dificultades para realizar una tarea específica. Se diseñó un cuestionario basado en la noción de ángulo y su medida. Los ítems fueron contestados por 22 estudiantes mexicanos del primer semestre de la Licenciatura en Física y Matemáticas. Para conocer las imágenes y definiciones, se aplicó el modelo de Tall y Vinner. Encontramos una amplia variedad en las definiciones personales de ángulo de los estudiantes, que no son una memorización de las definiciones dadas en los cursos o en los libros de texto. Además, no poseen una única imagen del concepto de ángulo y su medida, pues evocan diferentes imágenes según el problema a resolver.

Fecha de recepción: 04 de septiembre de 2018. **Fecha de aceptación**: 27 de diciembre de 2019

[1] Departamento de Matemática Educativa-Cinvestav IPN, ypachucaherrera@yahoo.com, orcid.org/0000-0002-8018-2443

[2] Departamento de Matemática Educativa-Cinvestav IPN, gzubieta@cinvestav.mx, orcid.org/0000-0002-2808-6585

Palabras clave: *ángulo; medida de ángulo; definición del concepto; imagen del concepto; nivel superior.*

Abstract: The title of this paper causes a priori bewilderment, because the reader might consider that the concept of angle and its measurement is understood by students starting a bachelor's degree; however, although some difficulties reported in investigations has been overcome, others still persist. In mathematics, the concept definition is relevant, however, in practice, students usually resort to the evoked concept image, which often makes it difficult for them to perform a specific task. A questionnaire was designed based on the notion of angle and its measurement. These questions were answered by 22 Mexican undergraduate students. To identify students' images and definitions, the Tall and Vinner's model was applied. We found a wide variety in the students' personal definitions of angle, which are not memorization of definitions given in their courses or textbooks. In addition, they do not have a single image concept of angle and its measurement, because they evoked different images according to the problem to be solved.

Keywords: *angle; angle measurement; concept definition; concept image; undergraduate level.*

INTRODUCCIÓN

El ángulo y su medida forman parte del estudio de la geometría y la trigonometría. El dominio de estos conceptos es esencial en el aprendizaje de otros cursos de niveles avanzados como: Cálculo, Geometría Analítica, Mecánica, Estática y otros. Sin embargo, como resultado de una investigación previa llevada a cabo con profesores de la educación media superior y alumnos del nivel superior, encontramos la falta de un entendimiento sólido del concepto de medida de ángulo, al mostrar dificultades para interpretar el argumento de la función trigonométrica seno, cuando la unidad de medida es un número real. Pero ¿cuál es el origen de estas dificultades? ¿El concepto de ángulo? ¿La medida del ángulo? Estas son algunas de las preguntas que estamos valorando y necesitamos responder.

Si tomamos en cuenta las investigaciones donde se reporta que, desde la enseñanza elemental, los estudiantes muestran dificultades en el aprendizaje del ángulo y su medida (White y Mitchelmore, 2003; Browning, Garza-Kling y Sundling, 2007; Keiser, 2004), y puesto que existen pocas investigaciones relacionadas con estos conceptos en la enseñanza superior, donde se esperaría encontrar menos dificultades, hemos considerado importante llevar a cabo el siguiente estudio donde nuestro objetivo es conocer la definición e imagen del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. Los resultados de esta investigación nos permitirán tener un acercamiento al conocimiento real de los estudiantes sobre estos conceptos al iniciar su formación en cursos avanzados de Matemáticas o Física; saber si las dificultades reportadas en investigaciones realizadas en los niveles elementales persisten en los niveles avanzados y, por último, proporcionar a los profesores de dichos cursos elementos para el diseño de actividades que permitan al estudiante tener un mejor desempeño.

ANTECEDENTES

Definiciones de ángulo encontradas a lo largo de la historia

El concepto de ángulo, esencial en la teoría matemática, fue concebido desde perspectivas diferentes por matemáticos y filósofos. En la obra de Heath (1956), volumen I, hay una recopilación histórica de las diferentes definiciones dadas sobre el ángulo, al tomar como punto de partida las definiciones 8 y 9 de Euclides. Estas definiciones son las siguientes:

> 8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.
> 9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo (Heath, 1956, p. 176, nuestra traducción).

Hay otra reseña histórica del concepto de ángulo en los artículos de Matos (1990; 1991) cuyo objetivo es comprender las formas en que los matemáticos entendieron el ángulo, las propiedades que le atribuyeron al concepto y los problemas que resolvieron o no al utilizarlo. Matos (1990) plantea que surgieron debates sobre la naturaleza del ángulo al tratar de responder la pregunta ¿a qué categoría aristotélica de cualidad, cantidad o relación pertenece un ángulo de acuerdo a su definición? En Matos (1991) continúa la discusión sobre la noción de ángulo, cita la definición dada por Hilbert y expresa que ésta es aceptada por muchos matemáticos contemporáneos y utilizada en las matemáticas escolares en algunos países. Hilbert (1971) definió el ángulo de la siguiente manera:

> Sea α un plano cualquiera, y h, k dos semirrayos diferentes que parten de un punto *O* en α y que pertenecen a rectas distintas. El sistema de estos dos semirrayos h, k se llama ángulo y lo designaremos con $\measuredangle$(h,k) o con $\measuredangle$(k, h) (Hilbert, 1971, p. 11, nuestra traducción).

En sus conclusiones, Matos (1991) señala que la discusión sobre la naturaleza del ángulo aún no ha terminado y que no solo fue abordada por matemáticos, sino también por físicos quienes estaban interesados en cuestiones relativas a la medida del ángulo. Menciona también que los ángulos están asociados con las rotaciones y con las medidas de eventos periódicos, e indica un concepto innovador de ángulo: el ángulo como cantidad de giro.

Basta con observar las obras de Heath (1956) y Matos (1990; 1991) para constatar la transformación de la definición de ángulo con el paso del tiempo, y darse cuenta de cómo cada definición se creó para resolver los problemas de acuerdo a las necesidades en el campo que estudiaba su autor.

DEFINICIONES DE ÁNGULO EN ALGUNOS TEXTOS ESCOLARES SUGERIDOS COMO LIBROS DE CONSULTA

En los cursos de geometría elemental, se define el ángulo en forma conveniente para el estudio de los triángulos, los criterios de congruencia, semejanza, paralelismo, etcétera. Esta forma se muestra en las siguientes definiciones de dos libros de geometría consultados en el bachillerato. En Moise y Downs (1986) el ángulo se define como sigue: "Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un ángulo. Los dos rayos se llaman los lados del ángulo y el extremo común se llama el vértice". (Moise y Downs, 1986, p. 75). Esta definición excluye los ángulos de 0^{o}, 180^{o} y 360^{o}, y los ángulos de más de una vuelta y negativos. Para ilustrarla, añaden las siguientes figuras, que bastan para una adecuada definición en el contexto geométrico (figura 1).

Un ángulo es una figura como una de éstas:

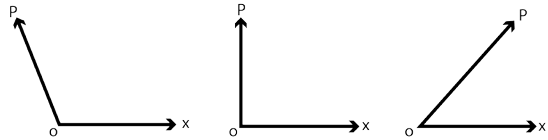


Figura 1. Ángulo definido como pares de semirrectas con un origen común (Moise y Downs, 1986, p. 75).

Mientras en Baldor (1983) el ángulo se define así: "Ángulo es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado 'vértice'. Las semirrectas se llaman 'lados' [...]". (Baldor, 1983, p. 22). Esta concepción excluye ángulos de 0º, ángulos de más de una vuelta y ángulos negativos. Esta definición la ilustra con las figuras siguientes (figura 2).

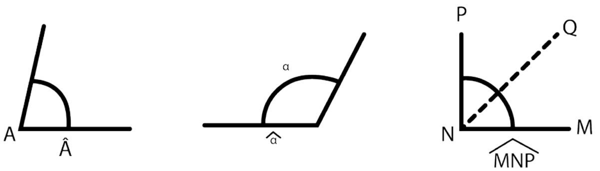


Figura 2. Ángulo definido como abertura (Baldor, 1983, p. 22).

Observemos que, en las ilustraciones de estos dos libros, todos los ángulos tienen un rayo horizontal respecto a la página. Además, en las figuras de ángulo de la primera definición no hay un arco a diferencia de las figuras en la segunda definición. En Moise y Downs (1986) es hasta después de definir la medida de un ángulo que los autores indican con un arco el ángulo del cual se desea obtener su medida, seguramente para evitar la ambigüedad de no saber si se refieren al ángulo convexo o cóncavo.

En textos de cálculo consultados en la educación superior como Spivak (1993), Ayres y Moyer (1991) y Leithold (1992) aparece la definición de ángulo como preámbulo al estudio de las funciones trigonométricas; sin embargo, esta definición aparece de forma diferente a la dada en geometría, pues ésta se amplía y ahora los ángulos se definirán a través de ángulos dirigidos u orientados. Por ejemplo, en Spivak (1993) aparece lo siguiente:

> En geometría elemental, un ángulo es sencillamente la unión de dos semirrectas con un punto común inicial [...] Más útiles para la trigonometría son los 'ángulos dirigidos', los cuales pueden ser considerados como pares $(1_1,1_2)$ de semirrectas con el mismo punto inicial (Spivak, 1993, pp. 425-426).

Spivak añade la siguiente figura (figura 3).

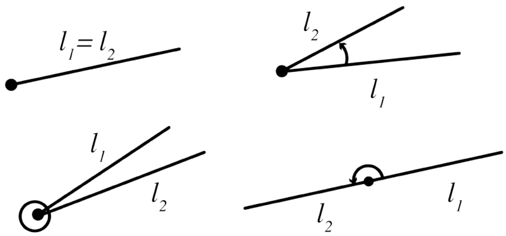


Figura 3. Ángulos dirigidos (Spivak, 1993, p. 426.)

Ayres y Moyer (1991) mencionan lo siguiente respecto al ángulo plano:

> Más comúnmente, puede pensarse que un ángulo plano se genera si se gira (en un plano) una línea de la posición inicial *OX* a la posición terminal *OP*. Entonces, *O* es otra vez el vértice, $\overrightarrow{OX}$ al que se llama *lado inicial*, y $\overrightarrow{OP}$ se llama *lado terminal* del ángulo (Ayres y Moyer, 1991, p. 1).

Con la figura siguiente ilustran su definición (figura 4).

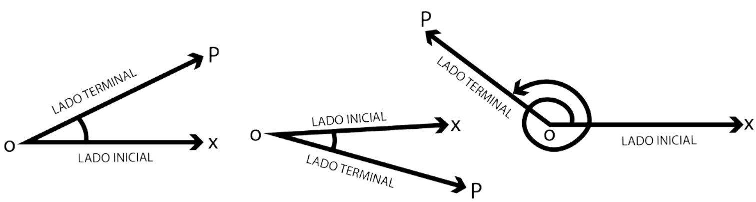


Figura 4. Ángulos planos generados a través de giros (Ayres y Moyer, 1991, p. 2).

Leithold (1992) escribe lo siguiente:

> Cualquier ángulo es congruente con el ángulo que tenga su vértice en el origen y un lado, llamado lado inicial, sobre el lado positivo del eje *x*. Un ángulo tal se dice que está en posición normal. La Figura 5 muestra un ángulo AOB en posición normal con OA como lado inicial. El otro lado, OB, se llama lado terminal. El ángulo AOB puede ser formado girando el lado OA hasta el lado OB [...] (Leithold, 1992, p. 61)

El autor ilustra la definición con la figura siguiente, que incluye ejes cartesianos (figura 5).

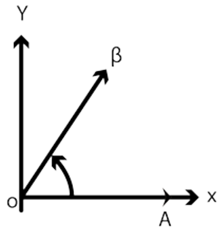


Figura 5. Ángulo en posición normal (Leithold, 1992, p. 61).

Estas tres definiciones incluyen ángulos positivos, negativos, de 0°, 180°, 360° y ángulos de más de una vuelta. Cabe destacar que en las ilustraciones de los ángulos de las figuras 4 y 5 todas tienen un lado alineado con la horizontal. Mientras que solo en la figura 4 se representan ángulos negativos y de más de una vuelta. Todas estas definiciones (las dadas en geometría y en trigonometría) descartan la posibilidad de que al menos uno de los lados del ángulo pueda ser una línea curva.

En resumen, encontramos distintas definiciones de ángulo tanto en geometría como en trigonometría, esta diversidad tiene que ver con el objetivo que pretende cada autor, y está ajustada a la estructura matemática de la que se está haciendo uso.

MEDIDA ANGULAR

Haremos referencia a Moise y Downs (1986), quienes escriben: “Así como medimos segmentos con una regla, medimos ángulos con un transportador”. En seguida agregan lo siguiente: “El número de grados de un ángulo se llama su medida. Si hay r grados en el ∡ PQR, entonces escribimos m∡ PQR= r". (Moise y Downs, 1986, p. 81).

Por otra parte Baldor (1983), en la sección titulada medida de ángulos señala que: "Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma por unidad" (Baldor, 1983, p. 23).

La medida angular en la práctica

En la escuela, la medida angular se obtiene usualmente utilizando al menos uno de los siguientes recursos: comparación con ángulos de referencia, uso del transportador y el uso de postulados y definiciones. A continuación describimos estos recursos.

Comparación con ángulos de referencia. Se puede aproximar la medida de un ángulo al tomar como referencia ángulos cuya medida es conocida, por ejemplo, el ángulo recto cuya medida es de 90º, el llano que mide 180º, el ángulo agudo (mide menos de 90º), entre otros. Por ejemplo, se puede saber una medida aproximada del ángulo de la figura 6, si tomamos como referencia el ángulo recto, entonces la medida del ángulo sería aproximadamente la mitad de la unidad que es el ángulo recto.

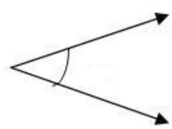


Figura 6. Ejemplo de un ángulo del cual se desea conocer su medida.

Uso del transportador. Para obtener la medida de un ángulo podemos utilizar como herramienta el transportador. Esta herramienta utiliza el grado como unidad de medida.

Uso de postulados y otras definiciones. Para determinar la medida de ángulos pueden usarse postulados y otras definiciones como: el postulado de la adición de ángulos, la definición de par lineal, de ángulos suplementarios, entre otros.

INVESTIGACIONES RELACIONADAS CON LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL ÁNGULO Y SU MEDIDA

Varias investigaciones reportan que, desde la enseñanza elemental, los estudiantes muestran dificultades en el aprendizaje del concepto de ángulo, como las de White y Mitchelmore (2003), Browning y Garza-Kling y Sundling (2007) quienes se enfocaron en la formación del concepto de ángulo a partir de experiencias físicas. Otra, es el trabajo de Keiser (2004), quien hizo una comparación entre la evolución que ha tenido el concepto de ángulo a través de la historia, y las concepciones del estudiante en tres direcciones: en cuanto a la medida del ángulo, si los ángulos pueden incluir curvas y las dificultades en conceptualizar ángulos de 0°, 180° y 360°. Todos estos trabajos se llevaron a cabo con estudiantes de niveles de educación básica.

Algunos de los resultados encontrados en estas investigaciones, como los de White y Mitchelmore (2003), señalan que el concepto de ángulo es un concepto multifacético difícil de aprender, al encontrar en los estudiantes dificultades al identificar los lados que forman un ángulo, por ejemplo, el que se forma al abrir una puerta al no haber un lado visible o con los ángulos de inclinación debido a que no están familiarizados con la idea del ángulo que se forma con la horizontal. Además, mencionan que les fue difícil determinar lo que los estudiantes intentaban comunicar cuando se les pidió que definieran el concepto de ángulo.

Mientras, Browning, Garza-Kling y Sundling (2007) mencionan que los estudiantes tienen nociones de ángulo tan limitadas que tienen dificultades en proporcionar una definición matemática adecuada para el término y, en cambio, describen lo que estamos midiendo cuando medimos un ángulo, por ejemplo, cuando mencionan que un ángulo es la “cantidad de grados” o “el número de grados”. Además, con frecuencia no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones no estándar, y agregan que algunos adultos aún luchan con la identificación de ángulos de 90 grados que no tienen un rayo horizontal.

Entre otras dificultades, los estudiantes tienden a atribuir la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen, algunos consideran que en el dibujo de las letras R o P puede haber ángulos al mirar intersecciones entre líneas y curvas, es decir, ellos observan dos líneas que se “conectan” en un punto; en cambio en el dibujo de la letra S no puede haber ángulos porque no observan intersecciones en ningún lado, puesto que mencionan "es un solo trazo". No conciben un ángulo de 180 grados porque no ven dos líneas que se conectan y el ángulo de 360 grados no lo consideran un ángulo al no visualizar dos lados que se unen "en una esquina". También es probable que los estudiantes de los niveles básicos carezcan de un vocabulario adecuado para formular descripciones claras del ángulo (Keiser, 2004).

En cuanto a la medida angular, Pachuca (2014) reporta que profesores de la educación media superior y alumnos del nivel superior tienen dificultades para interpretar el argumento de la función trigonométrica seno, cuando la unidad de medida es un número real. En las respuestas, cuando se les pide evaluar la función seno en un número real cualquiera, eligieron la medida angular al relacionar el valor del argumento con algún símbolo, número, o expresión matemática conocido por ellos, por ejemplo, cuando el valor del argumento era 180 lo consideraron como grados al asociar el número 180 con 180° aun cuando el número 180 no tenía el símbolo de grados o simplemente le agregaron el símbolo de grados. Cuando en el argumento aparecía el valor π, por ejemplo, en $180/\pi$ consideraron como medida angular los radianes porque asociaron el número π con radianes. Para números como -7, o 0.357 algunos no sabían interpretar el argumento. Mientras, Akkoc (2008) reporta que profesores en formación tuvieron dificultades con el concepto de radián, además de evidenciar que la imagen del concepto de grado predomina sobre la de radián concluyendo que estas dificultades podría causar problemas para comprender las funciones trigonoméricas.

MARCO TEÓRICO

Entre los enfoques que estudian la formación de conceptos, tenemos el desarrollado por Tall y Vinner (1981) quienes confrontan los conceptos matemáticos como se definen formalmente y los procesos cognitivos mediante los cuales son concebidos. Estas ideas se formalizaron a través de la llamada *imagen del concepto* y la *definición del concepto*.

De acuerdo a Vinner (2011) el *concepto* es una idea evocada en nuestra mente cuando escuchamos o vemos el *nombre del concepto*. El concepto existe solo en nuestra mente y puede ser considerado algo abstracto. Por su parte, el nombre del concepto es una entidad lingüística, usualmente llamada una noción o un término que tiene un aspecto físico (visual o vocal). Según Vinner (2002), cuando vemos o escuchamos el nombre de un concepto, algo es evocado en nuestra memoria, y lo evocado usualmente no es la definición del concepto sino lo que él y Tall denominaron "imagen del concepto". Esta imagen es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto, puede ser una representación visual del concepto cuando tenga representaciones visuales, imágenes mentales, una colección de impresiones o experiencias, y estas pueden traducirse a formas verbales.

En el caso del concepto de ángulo, la imagen del concepto que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por las diferentes representaciones que recuerdan relacionadas con dicho concepto, junto con las distintas propiedades que el estudiante le asocia. Esta imagen es personal, puede variar de persona a persona o de una cultura a otra, por lo tanto, sólo es posible hablar de una imagen conceptual en relación con un individuo en particular.

Tall y Vinner (1981), también introducen el término *"imagen evocada del concepto"* para describir la parte de la memoria evocada en un tiempo dado o en un contexto dado, es decir, aquella porción de la imagen del concepto activada en una situación particular, lo cual no es necesariamente todo lo que un cierto individuo sabe sobre una noción particular.

Para Tall y Vinner (1981) la *"definición del concepto"* se entiende como una definición verbal que explica con precisión el concepto. La definición del concepto abarca desde la definición formal, es decir, la aceptada por la comunidad científica en su conjunto, hasta la definición personal del concepto, la cual se usa para expresar con nuestras propias palabras la definición de un concepto. La definición personal puede diferir de la formal y se utiliza para construir o reconstruir la definición formal del concepto.

Vinner (2002) dice que al plantear una tarea cognitiva al alumno, al parecer algunos profesores esperan que en los procesos intelectuales relacionados con la realización de una tarea determinada, los estudiantes basen sus razonamientos principalmente en las definiciones formales del concepto mientras sus imágenes del concepto juegan un papel secundario. Vinner y Hershkowitz (1980) representan esto con el diagrama de la figura 7, donde las flechas indican diferentes formas de funcionamiento de un sistema cognitivo.

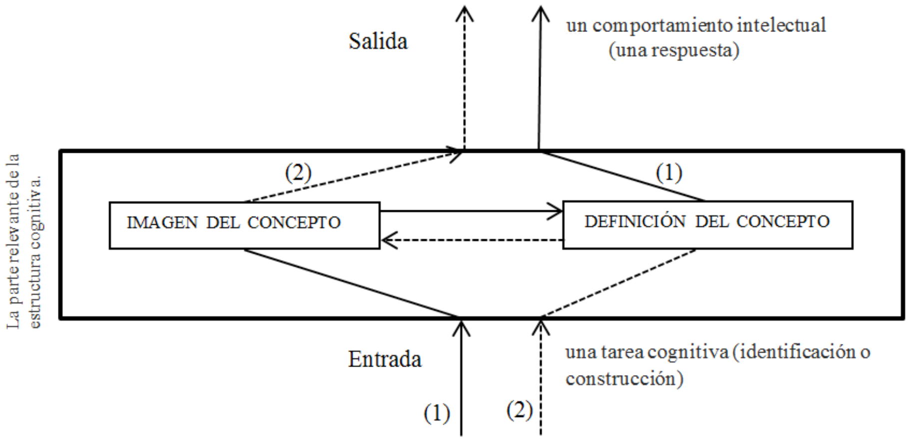


Figura 7. Modelo de actividad mental de los estudiantes esperado por los profesores, adaptado de Vinner y Hershkowitz (1980).

Pero, desafortunadamente, la práctica es diferente. Aquí, explica Vinner (2002), la celda de definición del concepto, incluso si no es nula, no se consulta durante el proceso de resolución de problemas. Los hábitos de pensamiento de la vida cotidiana toman el control, y el encuestado no está consciente de la necesidad de consultar la definición formal. Por lo tanto, un modelo más apropiado, para los procesos que ocurren en la práctica, es el siguiente (ver la figura 8):

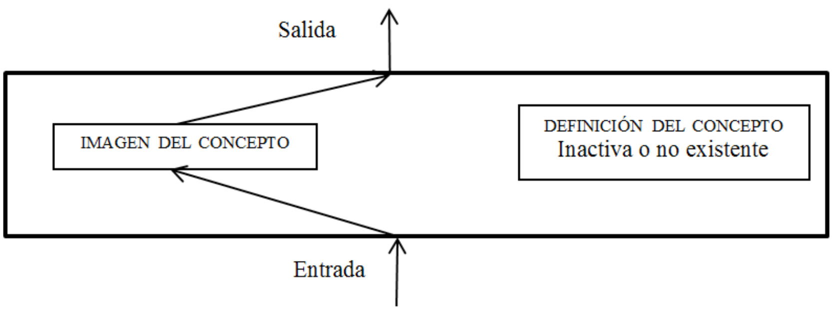


Figura 8. Modelo real de actividad mental de muchos estudiantes, adaptado de Vinner y Hershkowitz (1980).

Vinner (2002) agrega que el aprendizaje de las matemáticas impone a los estudiantes ciertas maneras de pensar distintas al aprendizaje cotidiano, pues las definiciones juegan un rol fundamental, y se espera que los estudiantes entiendan que el significado de un concepto está determinado por su definición formal y no por sus puntos de vista previos sobre el concepto. Este sería el proceso deseable, sin embargo, si se toma en cuenta que la mente de los estudiantes tiende a basarse en su imagen del concepto y no en su definición, puesto que esta definición se vuelve inactiva por ser difícil de entender, porque nunca la aprendieron, porque se olvida o se ignora, entonces se debería hacer un esfuerzo por formar imágenes correctas en la mente del estudiante. De hecho, Vinner y Hershkowitz (1980) muestran los resultados de una prueba aplicada a estudiantes de grados 7, 8 y 9 relacionados con figuras geométricas como el ángulo. Encontraron que los ángulos obtusos con un rayo horizontal son identificados más fácilmente que otros ángulos obtusos colocados en una posición distinta. De este resultado comentan que los profesores y los libros de texto tienden a dibujar ángulos con un rayo horizontal, y como resultado de este hecho la imagen del concepto puede contener ángulos obtusos con un rayo horizontal.

Finalmente, Vinner (2002) señala que se deben proponer ejemplos o tareas que permitan al estudiante ver los conflictos que pueden surgir entre la imagen del concepto que posee y la definición formal del concepto, discutir esos conflictos con la intención de convencer al estudiante sobre el rol tan importante que juegan las definiciones en los contextos técnicos, particularmente en matemáticas. Es decir, solo si se le plantean tareas que no pueda resolver correctamente refiriéndose solo a su imagen del concepto, se le podría convencer de lo conveniente que es utilizar la definición del concepto.

Preguntas de investigación

Para este estudio se formularon las siguientes preguntas de investigación que nos sirvieron de guía:

- ¿Qué definiciones tienen los estudiantes del ángulo al iniciar la enseñanza superior?
- ¿Qué imágenes evocan los estudiantes del ángulo y su medida, al contestar ítems relacionados con estos conceptos?

MÉTODO

El método de nuestro estudio es cualitativo. Este tipo de método es particularmente apropiado cuando el propósito es examinar las "formas de expresión" propias a cada individuo, es decir, los conceptos, percepciones, imágenes mentales, etc, manifestadas en el lenguaje de los participantes, ya sea de manera individual, grupal o colectiva (Sampieri, 2018). Investigamos las imágenes y definiciones del concepto de ángulo y su medida en estudiantes universitarios. Como técnicas de recolección de datos, utilizamos un cuestionario y entrevistas semiestructuradas individuales. La muestra elegida para aplicar el cuestonario se obtuvo a través de un muestreo por conveniencia. Participaron un total de 22 estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Física y Matemáticas (17 a 19 años) de una universidad pública de la Ciudad de México. Su preparación era variada puesto que provenían de escuelas del nivel medio superior públicas y privadas, de la Ciudad de México y de otros estados de la República Mexicana. Consideramos estudiantes de esta licenciatura puesto que en los hechos, en el área de las ciencias exactas se encuentran, en promedio, los estudiantes con mayor dominio de las matemáticas.

Iniciamos nuestra investigación aplicando un cuestionario escrito de 12 ítems relacionados con el ángulo y su medida. En su diseño se tomaron en cuenta las dificultades reportadas en investigaciones previas, se revisaron los planes de estudio desde los niveles básicos hasta el bachillerato, con el fin de identificar los aspectos clave que el estudiante debe poseer al iniciar el primer semestre de su carrera. Los aspectos a considerar son: definición de ángulo, representación gráfica de un ángulo, distintos tipos de ángulos y medida de un ángulo. Su elaboración también se basó en Vinner (2002) quien señala que un método natural para aprender acerca de la definición del concepto de un individuo es a través de preguntas directas, como por ejemplo, ¿qué es una función?, puesto que las definiciones son verbales y explícitas, mientras que para aprender acerca de la imagen del concepto, se deben plantear preguntas indirectas puesto que la imagen del concepto puede ser verbal e implícita.

En este artículo presentamos el análisis de las respuestas a cuatro ítems, mostrados en el anexo. Esta selección se basó en el hecho de que en los ítems restantes, los estudiantes no mostraron dificultades en sus respuestas, o bien no aportaron información relevante adicional para este estudio. El ítem 1 nos ayudará a responder la primera pregunta de investigación: ¿qué definiciones tienen los estudiantes del ángulo al iniciar la enseñanza superior?, y los ítems 2, 4 y 10 para responder la segunda pregunta de investigación: ¿qué imágenes evocan los estudiantes del ángulo y su medida, al contestar ítems relacionados con estos conceptos?

Los estudiantes tuvieron 45 minutos para responder el cuestionario. Se les comentó que su participación era voluntaria y que sus respuestas serían anónimas y confidenciales. A continuación, indicamos en la tabla 1 los propósitos de cada uno de los cuatro ítems.

Tabla 1. Descripción de los ítems

Ítem	Objetivo	Intención particular	Fundamentación
Escribe la definición de ángulo	Conocer la definición de ángulo que posee el estudiante	Saber si los estudiantes continúan definiendo el ángulo a través de su medida	Libros de texto reportados en los antecedentes. De acuerdo con Browning, Garza-Kling y Sundling (2007), algunos estudiantes de nivel básico definen el ángulo a través de su medida
Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes	Conocer la imagen evocada del estudiantes al hacer la representación gráfica del ángulo	Saber si la imagen del concepto que evoca el estudiante está relacionada con ángulos en posición no estándar	En Vinner y Hershkowitz (1980) se señala que los profesores y los libros de texto tienden a dibujar ángulos con un rayo horizontal, y como resultado de este hecho la imagen puede contener ángulos con un rayo horizontal
Determina la o las figuras que consideres ángulos. (Táchalos)	Conocer qué imagen evoca el estudiante para decidir si una figura dada es un ángulo o no	Saber si los estudiantes consideran ángulos entre líneas y curvas. Saber si los estudiantes pueden identificar ángulos de 180º	De acuerdo con Keiser (2004), algunos estudiantes de nivel básico consideran que puede haber ángulos entre líneas y curvas, además se les dificulta identificar ángulos de 180º
Relaciona cada ángulo con su medida. (Puedes relacionar las figuras con más de una opción)	Conocer la imagen evocada al momento de relacionar cada ángulo con su medida	Saber si los estudiantes reconoce que dos ángulos tienen la misma medida, aunque estén en diferentes posiciones	Browning, Garza-Kling y Sundling (2007), reportan que los estudiantes de niveles básicos no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones no estándar

Después de un primer análisis de la información recopilada de los cuestionarios –detallado más adelante–, seleccionamos algunos estudiantes para entrevistarlos de forma individual. El propósito de las entrevistas era conocer a partir del lenguaje y perspectiva del estudiante, "en sus propias palabras", su imagen evocada. La selección se hizo con base en las respuestas que consideramos proporcionaban información relevante. Se les informó que la intención de la entrevista era profundizar en sus respuestas. A las entrevistas se les aplicó un análisis temático o de contenido (Sampieri, 2018), utilizando como referente las preguntas de investigación.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Ítem 1: Definición de ángulo. A cada una de las respuestas de los estudiantes a este ítem se les hizo una codificación abierta (Sampieri, 2018), utilizando segmentos de texto de sus respuestas. Las categorías que emergieron fueron 6: C1, C2, C3, C4, C5 y C6. A continuación, presentamos cada categoría y su código, señalando algunas respuestas que pertenecen a cada una de ellas. En cada categoría especificamos el número de respuestas, por ejemplo (4/22) indica que 4 de las 22 respuestas pertenecen a esta categoría.

C1: El ángulo definido como apertura/abertura de segmentos (rayos o líneas) (7/22)

Ejemplo 1: "Es la apertura o separación de dos rayos que tienen un punto en común".
Ejemplo 2: "Abertura que existe entre dos rayos con un origen en común".

C2: El ángulo definido como intersección de dos rayos (líneas o semiplanos) (4/22)

Ejemplo 1: "Es la intersección de dos líneas diferentes las cuales tienen un punto en común".
Ejemplo 2: "Es la intersección de dos semiplanos formados por dos rayos con un mismo vértice".

C3: El ángulo definido a través de su medida (3/22)

Ejemplo: "Es la medida de la apertura de dos líneas que se unen en un punto".

C4: El ángulo definido como medida particular (3/22)

Ejemplo: “Es la separación entre dos rectas perpendiculares”.

C5: Otras definiciones (2/22)

Ejemplo: “Un ángulo es cuando dos rayos se cruzan entre sí”.

C6: No respondió/No conoce la definición (3/22)

Ejemplo: “No conozco la definición, porque no tengo una definición muy concreta y me falta más información”.

En las respuestas se observa una amplia variedad en las definiciones personales de ángulo de los estudiantes al definirlo como: la intersección de dos rayos/líneas o semiplanos, la apertura/abertura de dos rayos o líneas, a través de su medida o de una medida en particular.

Ítem 2. Representación gráfica del ángulo. Aquí revisamos las figuras que hicieron los estudiantes para representar un ángulo. Notamos algunas características comunes que predominaban en la mayoría de las figuras. Una primera característica fue la posición del ángulo, puesto que *todos* los estudiantes dibujaron ángulos colocados de tal manera que su vértice estaba ubicado en el lado izquierdo, uno de sus lados estaba alineado o no con la horizontal, mientras el otro lado se hallaba por encima de éste como lo muestra la figura 9.

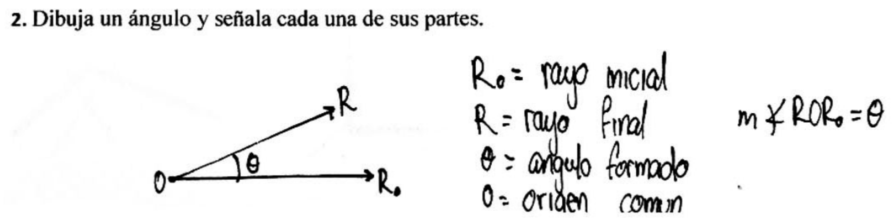


Figura 9. Ejemplo de una representación gráfica de ángulo de uno de los estudiantes, con el vértice ubicado a la izquierda y uno de sus lados alineado con la horizontal.

Otra característica fue que 15 estudiantes trazaron ángulos agudos, con uno de sus lados alineado con la horizontal, de los cuales doce eran como los de la figura 9, y tres como los de la figura 10, donde no señalan ningún arco.

Figura 10. Ejemplo de una representación gráfica de ángulo de uno de los estudiantes, con uno de sus lados alineado con la horizontal donde no señalan ningún arco.

Los ángulos que no tenían un lado horizontal eran ángulos agudos como el de la figura 11.

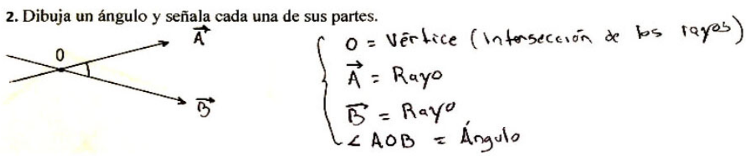


Figura 11. Ejemplo de una representación gráfica de ángulo de uno de los estudiantes, con uno de sus lados no alineado con la horizontal.

18 estudiantes trazaron dos rayos, segmentos o líneas distintas que emanaban de un punto, y en algunos casos nombraron sus partes (véanse figuras 9 y 10), mientras que los otros cuatro dibujaron dos rayos, líneas o lados distintos que se intersecaban, y nombraron sus partes. (véase figura 11).

Ítem 4. Imagen evocada del concepto de ángulo para decidir si una figura es un ángulo o no. En el análisis de las respuestas creamos dos categorías. En la categoría C1 colocamos las figuras que los estudiantes consideraban como ángulos, y en C2 las que no. Se revisaron las categorías y encontramos que 5 de los 22 estudiantes consideraron la figura 12 un ángulo.

Figura 12. Figura del cuestionario considerada por algunos estudiantes como un ángulo.

A continuación, veremos un extracto de la entrevista donde el estudiante expresa el porqué determinó que la figura 12 es un ángulo. El estudiante será identificado como estudiante 1.

Entrevistadora: ¿Por qué determinaste que esta figura era un ángulo? [se refiere a la figura 12].

Estudiante 1: ¡Ah! bueno, porque pues tenemos que tomar esta línea [señala con su dedo índice la línea horizontal de la figura 12], entonces aquí pues hay otra [señala con su dedo índice la curva en la misma figura] que hasta cierto punto haciendo un acercamiento cada vez más y más grande se podría ver que ya no conectamos en una curva si no que hay un punto en el que va a tener un comportamiento de línea recta. Un acercamiento muy grande como hacerle un super zoom.

La imagen evocada por el estudiante 1 está asociada con una imagen formada por dos líneas rectas diferentes con un punto en común, que forman una cuña o una punta. De los cuatro estudiantes restantes que contestaron de manera similar al estudiante 1, entrevistamos a tres de ellos y nos proporcionaron argumentos similares.

Otro caso de interés es el de un alumno que señaló que la figura 13 no era un ángulo.

Figura 13. Figura del cuestionario que no fue considerada como un ángulo por un estudiante.

Veamos a continuación un extracto de la entrevista que se le realizó a este estudiante, el cuál será identificado como estudiante 2.

Entrevistadora: Esta figura [la figura 13] ¿por qué no la consideraste como ángulo?

Estudiante 2: Es que ese me confundí un poco no sé si sea un ángulo de 0 o de...sí pero no, no creo porque es una línea.

Entrevistadora: Pero esta es también una línea [se le señala la figura 14] ¿por qué esta sí la consideraste un ángulo y esta no?

Estudiante 2: Bueno lo que yo observé es que aquí está el punto [el alumno coloca su dedo índice sobre la figura 14 del lado derecho], está donde empieza el ángulo [enseguida traza una trayectoria con su dedo índice como se muestra en la figura 15] y esta es la abertura que tiene, en esta de acá [señala la figura 13] no se ve claramente [se refiere a que no se ve abertura de acuerdo a sus palabras].

Figura 14. Figura del cuestionario que fue considerada como un ángulo por el estudiante 2.

Figura 15. Representación de la trayectoria trazada por el estudiante 2.

Aquí la imagen evocada del estudiante 2 está asociada con dos líneas diferentes con un punto común que forman una "abertura". Dos estudiantes más contestaron de manera similar al estudiante 2, ambos fueron entrevistados proporcionando argumentos similares.

Ítem 10. Imagen evocada al relacionar un ángulo con su medida. En este ítem, los estudiantes tenían que relacionar cuatro ángulos con una columna de respuestas dadas. Dos de los ángulos son los ángulos A y B que se muestran en la figura 16. Estos ángulos tienen la misma medida, sin embargo, están colocados en posiciones diferentes.

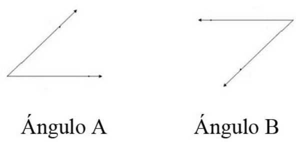


Figura 16. Ángulos del cuestionario que los estudiantes tenían que relacionar con su medida.

16 estudiantes relacionaron los dos ángulos A y B con la respuesta a) "Ángulo menor a 90º". Sin embargo, hubo 4 estudiantes que relacionaron el ángulo A con la respuesta a) "Ángulo menor a 90º" y el ángulo B con otra respuesta, la b) "Ángulo mayor a 180°". A continuación presentamos un extracto de la entrevista realizada a uno de estos cuatro estudiantes sobre la medida que asignó al ángulo B. Este estudiante será identificado como estudiante 3.

Entrevistadora: En este ítem te voy a preguntar por esta figura [señala el ángulo B de la figura 16], me dices que lo relacionas con la respuesta b), "Ángulo mayor a 180 grados", si me puedes explicar, ¿por qué lo relacionaste con esta opción?

Estudiante 3: Pues igual que el anterior, por lo mismo de que me imaginé la línea prolongada [coloca su dedo índice en el vértice del ángulo dado y con este traza una prolongación del segmento horizontal efectuando el movimiento de izquierda a derecha. Véase la línea punteada de la figura 17] y tomé como este el eje *x* para poder hacer el ángulo [coloca su dedo índice sobre la prolongación que trazó, y considerándola como lado inicial, dibuja una trayectoria como se muestra en la figura 17 hasta llegar al segmento inclinado].

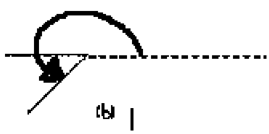


Figura 17. Ilustración del razonamiento considerado por el estudiante 3 para determinar que la medida del ángulo B es mayor a 180 grados.

La imagen evocada en este caso está relacionada con ángulos dirigidos. Aquí el alumno ignoró el segmento horizontal dado como uno de los lados del ángulo B. Trazó imaginariamente una prolongación del segmento horizontal, el cual tomó como lado inicial y como lado final el inclinado. De los tres estudiantes restantes que contestaron de manera similar al estudiante 3, entrevistamos a dos de ellos y nos proporcionaron argumentos similares.

Ahora, veamos las respuestas asociadas a los dos ángulos restantes del ítem 10. (véase tabla 2). Si observamos los ángulos C y D estos son el mismo (ambos tienen la misma medida: 0º), salvo que el ángulo D es el ángulo C pero rotado 180 grados.

Tabla 2. Respuestas de los estudiantes

Ángulo C	Número de estudiantes	Medida relacionada	Ángulo D	Número de estudiantes	Medida relacionada
	5	0^{o}		4	0^{o}
	11	0^{o}, 360^{o}		5	0^{o}, 360^{o}
	1	0^{o}, 180^{o}		2	0^{o}, 180^{o}
	2	0^{o}, 180^{o}, 360^{o}		2	0^{o}, 180^{o}, 360^{o}
	2	180^{o}		8	180^{o}
	1	Sin respuesta		1	Sin respuesta

En la tabla 2 observamos, que 8 estudiantes asignaron la medida de 180^{o} al ángulo D. A continuación mostramos un extracto de la entrevista realizada a uno de ellos, el cual será identificado como estudiante 4. Este estudiante inicialmente asignó al ángulo C la respuesta d) "Ángulo igual a 0^{o}", sin embargo, al ángulo D, le asignó las respuestas f) "Ángulo igual a 180^{o}" y c) "Ángulo mayor a 90°". En la entrevista, el estudiante menciona por qué asignó esas opciones.

Entrevistadora: Vamos a la siguiente figura [ángulo D], esa tú la relacionaste con f), "Ángulo igual a 180°" y c), "Ángulo mayor a 90^{O}". Me podrías explicar, ¿por qué lo relacionaste así?

Estudiante 4: Igual, me imaginé la línea prolongada y lo hice [el alumno coloca su dedo índice en el vértice del ángulo dado y con este traza una prolongación del segmento horizontal efectuando el movimiento de izquierda a derecha. Véase la línea punteada de la figura 18. Después coloca su dedo índice sobre la prolongación que trazó y considerándola como lado inicial dibuja una trayectoría como se muestra en la figura 18 hasta llegar al segmento dado].

Figura 18. Representación de la trayectoria trazada por el estudiante 4.

En este caso, para el estudiante un ángulo se forma con dos segmentos diferentes. Pero en la figura él sólo ve un segmento, razón por la cual traza imaginariamente otro, el cual de acuerdo al movimiento de su dedo índice, en una rotación, lo considera como el lado inicial, y el dado en la figura como lado final de un ángulo dirigido de 180 grados. A los siete estudiantes restantes que contestaron que la medida del ángulo D es de 180º, se les hizo una entrevista proporcionando argumentos similares a los del estudiante 4. Así concluimos nuestro análisis.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La descripción de las respuestas nos permitió conocer las diferentes definiciones e imágenes evocadas por los estudiantes al contestar ítems relacionados con el ángulo y su medida. Vamos a centrar la discusión en los aspectos más relevantes extraídos de los resultados obtenidos.

Ítem 1. *Conocer la definición de ángulo que posee el estudiante.* La mayoría de las definiciones están en la categoría C1, (apertura/abertura de segmentos, rayos o líneas), además de que las pertenecientes a esta categoría (las que están en términos de abertura) son similares a la definición dada en Baldor (1983). Seis estudiantes (C3 y C4) definieron el ángulo a través de su medida o como una medida en particular, esto indica que en los niveles superiores los estudiantes aún tienen dificultades en distinguir entre el concepto de ángulo y su medida, como viene sucediendo desde los niveles básicos, de acuerdo con Browning, Garza-Kling y Sundling (2007). En las categorías restantes, los estudiantes solo dieron como definición una descripción de su imagen evocada. Esto apoya lo dicho por Vinner (2002) respecto a que la actividad de los estudiantes está, en una mayoría de casos, basada solo en sus imágenes y no en las definiciones formales de los conceptos. Aunado a ello Acuña (2012) comenta que la definición de un objeto matemático es sustituida por la descripción de un ejemplo estereotipado que el estudiante asocia con la definición. Por último, ningún estudiante proporcionó alguna definición de ángulo que se correspondiera con las definiciones de ángulo dirigido u orientado.

Ítem 2. *Conocer la imagen evocada del estudiante al hacer la representación gráfica del ángulo.* Las representaciones gráficas de los estudiantes muestran un ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo, y del cual emanan dos rayos, uno de ellos horizontal. Ángulos con estas mismas características los podemos observar en la mayoría de las ilustraciones de los libros de texto que presentamos al inicio de este trabajo. Este hecho da lugar a considerar lo expresado por Vinner y Hershkowitz (1980) quienes comentan que los profesores y los libros de texto tienen una tendencia a dibujar ángulos con un rayo horizontal y como resultado de este hecho la imagen del concepto puede contener ángulos con un rayo horizontal, aunque puede suceder que dibujar este tipo de ángulos no signifique que son los únicos que forman parte de sus imágenes del concepto. Rösken y Rolka (2007) señalan que las figuras utilizadas como ejemplos de ángulos en la clase o en los libros de texto pueden llegar a formar parte de las imágenes de los estudiantes, y si estas se presentan sólo en ciertas posiciones estereotipadas, pueden volverse esenciales o determinantes al momento de resolver un problema.

Ítem 4. *Conocer qué imagen evoca el estudiante para decidir si una figura dada es un ángulo o no.* En el análisis de los resultados en el caso de la figura 12, se observa que el estudiante 1 reconoce su imagen de ángulo solamente en una parte de la figura (la punta), ignorando la totalidad de la figura. Este resultado es similar al reportado por Keiser (2004), donde señala que algunos estudiantes consideran que en el dibujo de las letras R o P puede haber ángulos al mirar intersecciones entre líneas y curvas. Por otro lado, para la figura 13, se observa que la imagen del estudiante 2 está asociada con dos líneas diferentes con un punto común que forman una "abertura". Esta imagen lo llevó a decidir que la figura no era un ángulo al no visualizar en la figura 13 ninguna abertura. Este resultado se asemeja a lo encontrado en el trabajo de Keiser (2004), donde se menciona que las dificultades para concebir ángulos de 0º, 180º y 360º, y están relacionadas con la definición de ángulo que se está considerando.

Ítem 10. *Averiguar la imagen evocada al momento de relacionar cada ángulo con su medida.* En el caso del estudiante 3, posiblemente la posición en la que se encuentra el ángulo B le hizo pensar que este se situaba en un "tercer cuadrante", por ello trazó una prolongación del rayo horizontal que funcionaría como el sentido positivo de un eje *x*, tomándolo como lado inicial y desde ahí hacer la medición. Debe considerarse la posibilidad de que trazar la prolongación del rayo horizontal, se deba porque esto conduce a los estudiantes a una situación familiar donde están acostumbrados a medir ángulos desde el lado positivo del eje *x*. En el caso del estudiante 4, un ángulo se forma con dos segmentos diferentes. Al parecer la posición del segmento que ve le sugiere considerarlo como la parte negativa del eje *x*, y el rayo trazado por él, como su complemento, la parte positiva del eje *x*, desde donde él mide el ángulo. El hecho de que asignaran medidas diferentes a ángulos iguales colocados en distintas posiciones es similar a lo reportado en Browning, Garza-Kling y Sundling (2007), donde señalan que algunos estudiantes no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones diferentes no estándar.

Todos los nuevos ángulos que construyen los estudiantes están en posición normal. Posiblemente, su imagen de ángulo (en posición normal) está construida a partir de ilustraciones o ejemplos como el que se muestra en Leithold (1992), donde los ángulos parecen tener el lado inicial sobre el eje positivo *x* de un plano cartesiano, y estar en un primer cuadrante. Con esto concluimos nuestra discusión de resultados.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

En nuestra investigación nos hemos planteado las preguntas siguientes: ¿qué definiciones tienen los estudiantes del ángulo al iniciar la enseñanza superior? ¿Qué imágenes evocan del ángulo y su medida, al contestar ítems relacionados con estos conceptos? Encontramos una amplia variedad en las definiciones personales de ángulo de los estudiantes. Observamos que la imagen evocada por la mayoría de los estudiantes al hacer una representación gráfica del ángulo está fuertemente conectada a una figura estereotipada (un ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo del cual emanan dos rayos, con un rayo horizontal). Otro resultado está relacionado con ángulos colocados en distintas posiciones, donde algunos estudiantes utilizan parcialmente las figuras de ángulo dadas y evocando otros conceptos matemáticos, construyen nuevos ángulos para los cuales estiman o relacionan con una medida. Como los resultados lo indican algunas de las dificultades identificadas en estudiantes de niveles elementales persisten en niveles más avanzados.

Un resultado interesante es el caso de la figura 12, donde el estudiante 1 mira un ángulo entre líneas y curvas. Cuando el estudiante dice que la curva en algún momento tiene un comportamiento de línea recta al hacerle un zoom y ésta se conecta con la recta dada, él está indicando, de manera intuitiva, la forma en que se define el ángulo entre dos curvas en Cálculo (como el ángulo entre sus tangentes), y que será aprovechado así en dicho curso. Estas ideas intuitivas podrían explotarse con estudiantes que tienen alguna familiaridad con el uso de algún software de Geometría dinámica, para darle sentido a la definición posterior de ángulo entre dos curvas.

En resumen, las imágenes evocadas por los estudiantes son congruentes con lo señalado en Vinner (2002), en cuanto a que la definición se vuelve inactiva, y los estudiantes responden basándose en su imagen del concepto. Además, de que los estudiantes evocan diferentes imágenes. Estas imágenes dependen del problema a resolver, es decir, no poseen una única imagen del concepto.

Según Driver, Guesne y Tiberghien (1985) una estrategia que permite adaptar mejor la enseñanza consiste en tener en cuenta las ideas previas de los estudiantes, puesto que en ocasiones algunos conceptos se consideran obvios y se dan por conocidos al planificar el curso. Además, las ideas de los estudiantes sugieren que incluso nociones aparentemente sencillas pueden no ser captadas de manera adecuada. La incomprensión de estas ideas fundamentales puede, en tal caso, llevar a posteriores y más serios problemas de aprendizaje. Por lo tanto, en nuestro tema, el profesor podría tomar en cuenta las definiciones e imágenes mostradas en este estudio para el diseño de actividades que permitan al estudiante tener un mejor desempeño y tener presente que los estudiantes podrían evocar nuevos conceptos y sus imágenes, para contestar la tarea propuesta. También consideramos importante compartir con los estudiantes el hecho de que existe una definición de ángulo para geometría y otra para trigonometría (las cuales serán elegidas, según convenga, entre la variedad de definiciones encontradas en los libros de texto), al ser la definición de ángulo dada en trigonometría el resultado de una evolución y generalización tal y como se observa en la historia misma del concepto. Esta evolución no se detiene en la trigonometría, pues tenemos además el concepto de ángulo entre curvas, que se utiliza en Cálculo y en la geometría hiperbólica.

Hay que tomar en cuenta que la muestra que se utilizó en este estudio fueron estudiantes con un mayor dominio de las matemáticas, sin embargo encontramos dificultades. Si este estudio se llevara a cabo con estudiantes de otras carreras universitarias, seguramente se encontrarían nuevos hallazgos. Recordemos que la importancia de estos hallazgos radica en ofrecer a los profesores información para la elección de los conceptos que enseñarán y para planear sus actividades de aprendizaje.

REFERENCIAS

Acuña, C. (2012). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*. Gedisa.

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(7), 857-878. doi: 10.1080/00207390802054458

Ayres, F. Moyer, R. (1991). *Trigonometría* (2da. ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.

Baldor, A. (1983). *Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría*. Publicaciones Cultural.

Browning, C., Garza-Kling, G. y Sundling, E. (2007). What's your angle on angles? *Teaching Children Mathematics*, *14*(5), 283-287.

Driver, R., Guesne, E. y Tiberghien, A. (1985). Las ideas de los niños y el aprendizaje de las ciencias. En R. Driver, E. Guesne y A. Tiberghien (Eds.), *Las Ideas científicas en la infancia y en la Adolescencia*. Morata/MEC.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary* (vol. I, 2nd. ed.). Dover.

Hilbert, D. (1971). *The foundations of Geometry* (L. Unger, Trans.) (2nd. ed.). La Salle, Open Court.

Keiser, J. M. (2004). Struggles with developing the concept of angle: Comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(3), 285-306. doi: 10.1207/s15327833mtl0603_2

Leithold, L. (1992). *El C*álculo con *Geometría Analítica* (6ta. ed). Harla.

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator*, *1*(1), 4-11.

Matos, J. (1991). The historical development of the concept of angle (2). *The Mathematics Educator*, *2*(1), 18-24.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington, Addison-Wesley Iberoamericana.

Pachuca, Y. (2014) *Concepciones sobre el argumento de la función sen x en profesores del nivel medio superior y alumnos del nivel superior mexicano* (Tesis de maestría). Cinvestav-IPN. México.

Rösken, B. y Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, Monograph 3, 181-204.

Sampieri, R. H. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill.

Spivak, M. (1993). *Calculus: Cálculo infinitesimal*. Reverté.
Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169. doi:10.1007/BF00305619
Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). University of California, Lawrence Hall of Science.
Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305. doi: 10.1080/0020739830140305
Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47203-1_5
Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, *43*(2), 247-256. doi:10.1007/s11858-010-0304-3
White, P. y Mitchelmore, M. (2003). Teaching angles by abstraction from physical activities with concrete materials. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (vol. 4, pp. 403-410). PME.

Yanira Pachuca Herrera

Dirección: Departamento de Matemática Educativa-Cinvestav IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco
C.P. 07360, México, Ciudad de México.
Teléfonos: (52)+(55)-57-47-38-15

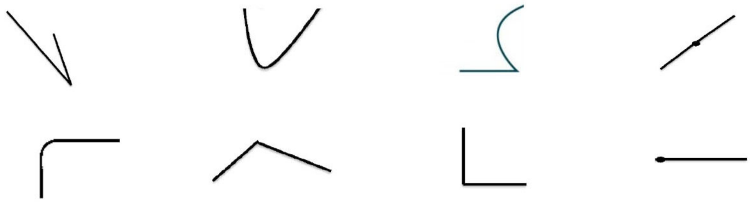
ANEXO

CUESTIONARIO

TEMA: EL ÁNGULO Y SU MEDIDA

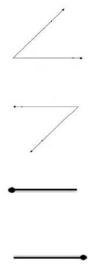
Instrucciones: Lee cuidadosamente cada uno de los siguientes ítems y contesta de la forma más clara posible. Tus respuestas deben ser con pluma. Si de alguno de los ítems no conoces su respuesta indica brevemente por qué.

1. Escribe la definición de ángulo.
2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.
4. Determina la o las figuras que consideres ángulos. (TÁCHALOS)



10. Relaciona cada ángulo con su medida. (Puedes relacionar las figuras con más de una opción)

a) Ángulo menor a
b) Ángulo mayor de
c) Ángulo mayor a
d) Ángulo igual a
e) Ángulo igual a
f) Ángulo igual a



( )
( )
( )
( )

 DOI: 10.24844/EM3201.04

Construcciones geométricas en GeoGebra a partir de diferentes sistemas de representación: un estudio con maestros de primaria en formación

Geometric constructions in GeoGebra from different representation systems: a study with prospective primary education teachers

Alberto Arnal-Bailera[1]
Antonio M. Oller-Marcén[2]

Resumen: En este trabajo estudiamos la realización con GeoGebra de tres procedimientos de construcción hechos a partir de las instrucciones presentadas en dos ediciones diferentes de los *Elementos de Euclides*: la clásica y la menos conocida de Oliver Byrne. Estas ediciones emplean sistemas de representación radicalmente diferentes para presentar un mismo contenido matemático. Analizamos la influencia de estos sistemas de representación en la producción de construcciones correctas y en el seguimiento de las instrucciones planteadas, en las respuestas de 18 parejas de alumnos de tercer curso del Grado de Magisterio de Educación Primaria. Encontramos que el sistema de representación no influye sobre el seguimiento fiel de las instrucciones, Pero, en el caso de la producción de construcciones correctas, la influencia del sistema de representación está asociada a la tarea concreta. Identificamos y analizamos cuatro fenómenos relacionados con aspectos matemáticos de instrumentación y de instrumentalización.

Palabras clave: *Construcción geométrica, GeoGebra, Sistemas de representación, Formación de profesores.*

Fecha de recepción: 6 de febrero de 2019. **Fecha de aceptación:** 12 de noviembre de 2019.

[1] Facultad de Educación, Universidad de Zaragoza. albarnal@unizar.es, orcid.org/0000-0002-0516-0463.
[2] Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza. oller@unizar.es, orcid.org/0000-0002-8191-3199.

Abstract: In this work, we study the implementation using GeoGebra of three construction processes as described in two different editions of Euclid's Elements: the classical and the less known one by Oliver Byrne. These editions use dramatically different representation systems to present the same mathematical content. We analyze the influence between the representation systems, the correctness of the constructions and the adjustment to the given instructions shown in the answers of 18 pairs of third year students of the Degree of Primary Education. We observe no influence of the representation systems over the adjustment while in the case of correctness this influence is associated to the particular task. In addition, we identify and analyze four different phenomena related to mathematical, instrumentation and instrumentalization aspects.

Keywords: *Geometric construction, GeoGebra, Representation systems, Teacher training.*

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Múltiples ejercicios de geometría clásica consisten en hacer construcciones geométricas a partir de algunos de los elementos que las constituyen (construcción de un polígono regular dado uno de sus lados, construcción de un triángulo a partir de sus tres lados, etc.) o de representaciones de objetos que cumplan ciertas propiedades (construcción de una recta perpendicular a otra por un punto, construcción de una recta tangente a una circunferencia por un punto exterior, etc.). Estas construcciones se han realizado tradicionalmente con regla y compás siguiendo procedimientos más o menos estandarizados. Textos clásicos, como los *Elementos*, incluyen un amplio catálogo de tales construcciones detallando paso a paso las acciones a realizar con los citados instrumentos. El uso de un software de geometría dinámica (de GeoGebra en particular) para llevar a cabo este tipo de construcciones implica, por sus especificidades, una reinterpretación o adaptación de los pasos descritos en los textos clásicos, que va más allá de la mera traslación del procedimiento.

Esta adaptación, no obstante, no está exenta de dificultades por cuanto que las instrucciones proporcionadas en los textos están concebidas para ser seguidas utilizando herramientas concretas (la regla y el compás) y no programas informáticos. La labor de adaptación debe ser hecha por los docentes a la hora de diseñar y preparar sus clases o de generar recursos o actividades para sus alumnos, en relación con estos contenidos.

En este sentido, una tarea propia de la formación del profesorado en didáctica de la geometría, es la realización de construcciones con regla y compás, en ocasiones con la ayuda de GeoGebra, con el objetivo de analizar, o de ser conscientes al menos, de los elementos matemáticos que sustentan las mismas. Una de las dificultades que encuentran los maestros en formación al llevar a cabo este tipo de tareas está relacionada con la correcta interpretación de las instrucciones proporcionadas para llevar a cabo la construcción (Özerem, 2012). Surge, por tanto, la siguiente pregunta de investigación: ¿La utilización de un sistema de representación particular en las instrucciones proporcionadas a los alumnos en un procedimiento de construcción geométrica, mejora sus resultados cuando la realizan usando el software GeoGebra? Para tratar de responder a esta pregunta abordamos los siguientes objetivos específicos:

1. Determinar si existe interdependencia entre el sistema de representación usado para proporcionar las instrucciones a los alumnos, el seguimiento de las instrucciones y la corrección de las construcciones realizadas en GeoGebra.
2. Analizar los procedimientos de construcción llevados a cabo por los alumnos al realizar las construcciones que se les solicitan, en relación con los distintos sistemas de representación que usan y con los procesos de instrumentalización e instrumentación que adelantan.

2. MARCO TEÓRICO

Duval (2006, p. 107) señala que “ningún proceso matemático puede ser llevado a cabo sin utilizar un sistema de representación semiótico puesto que los procesos matemáticos siempre implican la sustitución de una representación semiótica por otra”. De hecho, Gómez (2002) considera el estudio de los sistemas de representación como uno de los pilares básicos del análisis de contenido considerado dentro del análisis didáctico definido por Rico (2013).

Desde el punto de vista de la enseñanza de las matemáticas, lo anterior implica que los estudiantes deberían ser capaces de reconocer un mismo objeto matemático con independencia de dicho contexto (Duval, 2004). En particular, tal y como señalan Castro y Castro (1997, p. 103): “Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades".

Esta capacidad de moverse entre distintos sistemas de representación se denomina en ocasiones fluidez multi-representacional y existen evidencias de que puede ser promovida con el apoyo de entornos tecnológicos y, en particular, de GeoGebra (McGee y Moore-Russo, 2015).

En el caso de la geometría, parece claro que el registro o representación figural juega un papel fundamental en el aprendizaje, relacionado con aspectos tales como la visualización o la abducción (Marmolejo y Vega, 2012). A este respecto, al considerar las ilustraciones que a menudo acompañan a las construcciones geométricas, hemos de prestar atención a las diferencias entre una figura, un objeto teórico que sirve como referente (definido por sus propiedades matemáticas) y un dibujo, una representación particular en la pantalla o el papel de dicho objeto abstracto (Laborde y Capponi, 1994). Un dibujo, de hecho, contendrá particularidades y casi siempre inexactitudes pues es inevitable una cierta pérdida de información con respecto al objeto geométrico que representa (Parzysz, 1988). Pese a ello, existen estudios que revelan una tendencia por parte de los alumnos a llevar a cabo razonamientos basados más en su percepción de un dibujo que en la información que se les proporciona (Sandoval, 2009).

En consecuencia, al encontrarnos con una ilustración que acompaña a una construcción o problema geométrico, pueden darse dos situaciones (Mesquita, 1998). Por una parte, si esta ilustración es vista como una figura, sus propiedades pueden utilizarse en los razonamientos. Sin embargo, cuando se trata de un dibujo no siempre se puede saber qué objeto teórico representa y no es fácil extraer información de ésta. Para poder hacerlo, si se utiliza lápiz y papel se debería incorporar el uso de algún tipo de convención sobre el dibujo que permita añadir información adicional; mientras que, si se utiliza GeoGebra, sería necesario conocer las herramientas usadas para su construcción y las propiedades matemáticas derivadas de las mismas (Gutiérrez, 2005).

Como ya hemos apuntado, el uso de GeoGebra como artefacto didáctico (Rezat y Sträßer, 2012) puede facilitar el trabajo con distintos sistemas de representación. Desde un punto de vista general, la utilización de artefactos en el aula, entendidos como cualquier elemento susceptible de ser usando intencionalmente en actividades de enseñanza y aprendizaje, conlleva la aparición de un fenómeno denominado génesis instrumental (Rabardel, 1995; Trouche, 2004). La génesis instrumental es un proceso personal de cada individuo participante en una situación de enseñanza y aprendizaje que involucra en cierto modo la transformación de un artefacto en un instrumento. Así, el artefacto, que es exclusivamente un objeto físico, se transforma en algo más complejo que incluye, además de lo físico, una parte cognitiva que aporta cada individuo y que le confiere una funcionalidad que le permite integrarlo en su actividad. Esto se produce gracias a la emergencia conjunta de esquemas mentales y técnicas de uso de la herramienta cuando se trabaja, por ejemplo, con tecnologías digitales (Drijvers, 2012).

En el proceso de génesis instrumental, Rabardel (1995) distingue dos subprocesos, uno orientado al artefacto y otro al individuo. En el primero, la instrumentalización, el individuo influye en el artefacto, descubriendo sus funcionalidades personalizando sus utilidades o utilizándolo para fines no previstos por el diseñador. En el segundo subproceso, la instrumentación, el artefacto influye en el individuo permitiéndole desarrollar una cierta actividad matemática de un modo distinto a como posiblemente venía realizándola. Este proceso de génesis instrumental es guiado por el docente mediante la organización sistemática e intencional de un entorno de aprendizaje que Trouche (2004) denomina orquestación instrumental.

Diversos autores se han dedicado a analizar estos procesos de génesis instrumental en un contexto tecnológico. Guin y Trouche (2002), por ejemplo, identifican distintos comportamientos de los estudiantes al enfrentarse al manejo del instrumento (comportamiento del pescador, transporte automático o determinación inflexible) en función de la complejidad de su interacción con el instrumento y del grado de reflexión del alumno. En un contexto de geometría dinámica y trabajando con futuros maestros de primaria, Ruíz-López (2018) identifica algunos factores que pueden dificultar una completa génesis instrumental. En particular, señala posibles deficiencias en el conocimiento matemático de los estudiantes, un desarrollo limitado de la instrumentalización en el uso de GeoGebra o un imperfecto proceso de orquestación instrumental.

En muchas ocasiones el uso de GeoGebra se combina o complementa, sin sustituir totalmente, a los instrumentos tradicionales. En estas situaciones se debe tener en cuenta la distinta relevancia del orden en que se realizan los pasos de una construcción y su interdependencia. Talmon y Yerushalmy (2004) afirman que esta relevancia es mayor en los entornos tecnológicos que en los tradicionales.

Iranzo y Fortuny (2009) detallan tareas que muestran la dificultad de transferencia de las estrategias de resolución con papel y lápiz a las estrategias con ayuda de GeoGebra y viceversa, estableciendo tipologías de alumnos según la mayor o menor presencia de prácticas de reflexión o procedimentales: autónomos (alto nivel de instrumentación e instrumentalización), instrumentales (nivel medio de instrumentación e instrumentalización), procedimentales (nivel bajo de instrumentalización) y naif, (nivel bajo de instrumentación). En aquellas situaciones en las que se hace un uso simultáneo del software y del lápiz y papel, Iranzo y Fortuny (2009) también señalan que alumnos con un grado de instrumentación bajo (tipo naïf) en ocasiones recurren a herramientas relacionadas con la medida al utilizar GeoGebra incluso en situaciones en las que esto no es necesario. Además, en estos casos los alumnos pueden presentar también dificultades conceptuales, algebraicas y de visualización, utilizando GeoGebra como si fuera una pizarra tradicional (Arnal-Bailera y Oller-Marcén, 2017).

Un interesante indicador del grado de instrumentación alcanzado por los estudiantes en el uso de GeoGebra está relacionado con los tipos de arrastres que estos realizan al abordar una construcción geométrica. Arzarello *et al*. (2002) desarrollan una taxonomía en la que incluyen hasta siete tipos distintos: arrastre errante, arrastre unido, arrastre guiado, arrastre lugar oculto, arrastre de línea, arrastre enlazado y test de arrastre. Los que más nos interesan aquí, son el arrastre guiado (mover puntos de un objeto para darle una forma determinada), el arrastre lugar oculto (mover puntos de un objeto para que este siga manteniendo ciertas propiedades) y el test de arrastre (mover puntos para determinar si el objeto al que pertenece mantiene las propiedades deseadas).

Generalmente, las construcciones llevadas a cabo por alumnos con un bajo nivel de instrumentación no pasan el test de arrastre (Mariotti y Bartolini, 1998). De hecho, utilizando la distinción descrita anteriormente, esto es equivalente a decir que estos alumnos tienden a construir un dibujo y no una figura. De hecho, un arrastre adecuado de los puntos libres de una construcción permite saber qué propiedades tiene una representación y por lo tanto qué figura representa; es decir, se puede saber si la representación lograda es la deseada o no y si se realizó el procedimiento de manera correcta o incorrecta. Este es un asunto normativo (cláusula del contrato didáctico) de la clase en lo que respecta a la corrección o no de un procedimiento de construcción al que hacen referencia Laborde y Capponi (1994).

3. MÉTODO Y PARTICIPANTES

El estudio realizado es de carácter exploratorio y tiene una finalidad esencialmente descriptiva (Elliot y Timulak, 2005). Se trata de una investigación de tipo mixto en la que se combina el enfoque cuantitativo con el análisis de datos de tipo cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). El uso de metodologías de tipo mixto permite que los enfoques cuantitativo y cualitativo "puedan complementarse para explorar distintos aspectos de la misma pregunta" (Pole, 2009, p. 39). En nuestro caso, el primero de los objetivos es de carácter descriptivo y pretende determinar la existencia de relación entre variables de tipo categórico (Blaikie, 2003) por lo que la metodología utilizada es de carácter cuantitativo. El segundo objetivo tiene un carácter más interpretativo y la metodología adoptada es cualitativa. En este sentido, nuestro estudio presenta los rasgos que Teddlie y Tashakkori (2009) señalan como característicos de las metodologías mixtas de investigación: utilización de datos tanto numéricos como narrativos, integración de análisis estadísticos y temáticos, combinación de propósitos confirmatorios y exploratorios, etc.

La experimentación se llevó a cabo con 36 estudiantes del Grado en Magisterio de Educación Primaria durante el curso académico 2014-2015, en el marco de la asignatura Didáctica de la Geometría que se desarrolla en el segundo cuatrimestre del tercer curso. En concreto, la actividad se desarrolló en una sesión de dos horas de duración en el aula de informática. Durante la sesión se combinó el trabajo de los alumnos en 18 pequeños grupos formados por hasta tres personas, con las puestas en común coordinadas por los investigadores.

El cuestionario sobre el que trabajaron los alumnos constaba de tres tareas. Cada una de ellas consistía en la realización de una construcción geométrica. La Tarea 1 consistía en la construcción de un cuadrado a partir de un lado (Proposición 46 del Libro I de los *Elementos*), la Tarea 2 en la construcción de una tangente a una circunferencia por un punto exterior a ella (Proposición 17 del Libro III de los *Elementos*) y la Tarea 3 en la construcción de un triángulo a partir de tres segmentos tales que la suma de cada dos de ellos es mayor que el tercero (Proposición 22 del Libro I de los *Elementos*). En concreto, los alumnos debían reproducir las instrucciones proporcionadas por escrito, mediante el uso de GeoGebra, indicando, tal y como se observa en las Figuras 1 a 3, las herramientas utilizadas para realizar cada uno de los pasos de la construcción. Además, para cada una de las tres tareas, los alumnos disponían de un fichero GeoGebra en el que se proporcionaban los elementos iniciales sobre los que se debía realizar la construcción.

Para alcanzar los objetivos planteados anteriormente, se crearon dos versiones del cuestionario. En una de ellas (que llamaremos versión C), las instrucciones y figuras proporcionadas a los alumnos provenían de la edición clásica de los *Elementos* de Euclides (Euclides, trad. en 1994). En la otra (que llamaremos versión B), se proporcionaron las instrucciones y figuras tal y como aparecen en la edición de los *Elementos* realizada por el inglés Oliver Byrne (Byrne, 1847). De los 18 grupos, 10 completaron el modelo B del cuestionario, mientras los 8 restantes completaron el modelo C. En la versión C se evitó el uso de letras del alfabeto griego, que fueron sustituidas por letras mayúsculas del alfabeto latino.

En las Figuras 1 a 3 se muestran las dos versiones de cada una de las tareas que conforman el cuestionario. En ellas se pueden apreciar los distintos sistemas de representación utilizados. La edición de Oliver Byrne de los *Elementos* de Euclides (mitad superior de las Figuras 1, 2 y 3) utiliza un sistema de representación poco convencional. El sistema tradicional (letras mayúsculas para puntos, segmentos denotados a partir de sus extremos, etc.), que se puede apreciar en la edición clásica (mitad inferior de las Figuras 1, 2 y 3), es sustituido por un lenguaje de tipo fundamentalmente icónico en el que el color y la representación intuitiva de objetos y conceptos resulta de gran importancia. El uso del sistema de representación planteado por Byrne se ha utilizado recientemente de forma fructífera en trabajos con profesorado de secundaria en formación (Arnal-Bailera y Oller-Marcén, 2017). En la Tabla 1 se presentan las principales características y diferencias entre ambos sistemas de representación. Las Figuras 1 a 3 ponen de manifiesto de forma ostensiva las particularidades, ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.

Tabla 1. Características principales de los sistemas de representación considerados.

	Versión C (Euclides, 1994)	**Versión B (Byrne, 1847)**
Color	No	Sí. A cuatro colores (azul, negro, amarillo y rojo)
Trazos y grosores	Único	Distintos grosores y trazos (continuo, punteado, etc.)
Referencia a objetos geométricos	Mediante letras	Mediante iconos
Distinción entre objetos geométricos diferentes	Distintas letras	Distintos colores, grosores, trazos, etc.
Expresión de relaciones entre objetos geométricos	Lenguaje verbal especializado (perpendicular, paralela, etc.)	Lenguaje simbólico especializado ($\perp$, $\parallel$, etc.)

Como se observa en la Figura 1, en ambos casos el procedimiento general de construcción del cuadrado es similar. La principal diferencia radica en que la versión de Byrne unifica, en cierto modo, los dos pasos iniciales, proponiendo dibujar un segmento perpendicular al segmento dado y de su misma longitud. La versión clásica propone inicialmente el trazado de un segmento perpendicular al dado, sobre el que posteriormente se traslada la longitud de éste. También se observa que en el paso final la versión de Byrne proporciona información redundante al señalar que los dos últimos segmentos dibujados sean concurrentes.

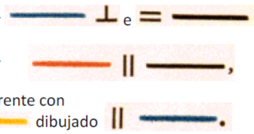
En la Tarea 2 se aprecian mayores diferencias entre ambos procedimientos. El primer paso es el mismo en ambos casos; sin embargo, los dos siguientes están invertidos. En la versión de Byrne se comienza dibujando una perpendicular al segmento dibujado en el primer caso y a continuación se traza una circunferencia, mientras que en la versión clásica se construye primero la circunferencia. También resulta interesante señalar que en la versión de Byrne se omite la indicación explícita del trazado de las dos últimas líneas auxiliares de la construcción que, sin embargo, sí aparecen en la figura.

La Tarea 3 es la que presenta aparentemente mayores diferencias entre ambas versiones. La versión clásica implica la traslación de los tres segmentos dados sobre una misma semirrecta, mientras que en la versión de Byrne basta con trasladar dos de los segmentos usando como punto común en cada caso uno de los extremos del otro sin necesidad de que estén alineados. Aunque no tiene impacto sobre el proceso de construcción, es interesante señalar que la desigualdad triangular (la suma de dos cualesquiera de los segmentos debe ser mayor que el tercero) recibe un tratamiento ligeramente distinto en ambos textos. Mientras que en la versión de Byrne aparece como hipótesis, en la versión clásica se resalta la necesidad de este hecho.

La recogida de la información se llevó a cabo mediante diversos procedimientos. El primero consistió en la observación por parte de los investigadores. En segundo lugar, se dispuso de las producciones de los alumnos tanto escritas, en sus respuestas al cuestionario, como digitales en los ficheros de GeoGebra generados.

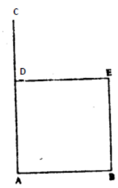
TAREA 1: Sigue las instrucciones para construir un cuadrado de lado dado en GeoGebra a partir de la siguiente proposición. Anota las herramientas de GeoGebra que vayas utilizando.

PROPOSICIÓN I.46: Sobre un segmento dado ( ), construir un cuadrado.

INSTRUCCIONES	HERRAMIENTA GEOGEBRA
	
 es el cuadrado buscado.	

TAREA 1: Sigue las instrucciones para construir un cuadrado de lado dado en GeoGebra a partir de la siguiente proposición. Anota las herramientas de GeoGebra que vayas utilizando.

PROPOSICIÓN I.46: Trazar un cuadrado a partir de una recta dada.

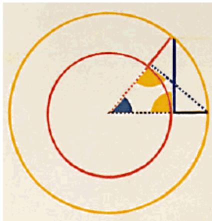


INSTRUCCIONES	HERRAMIENTA GEOGEBRA
Sea AB el segmento dado. Así pues, hay que trazar un cuadrado a partir de AB. Trácese el segmento AC que forme ángulos rectos con el segmento AB desde su punto A, y hágase AD igual a AB; y por el punto D trácese la paralela a AB, y por el punto B trácese BE paralela a AD.	
Por tanto, ABED es el cuadrado buscado.	

Figura 1. Enunciado de la Tarea 1 en ambas versiones del cuestionario.

TAREA 2: Construye una tangente a una circunferencia por un punto exterior en GeoGebra a partir de la siguiente proposición. Anota las herramientas de GeoGebra que vayas utilizando.

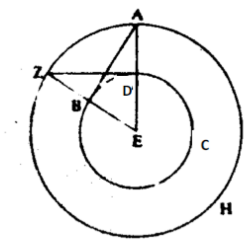
PROPOSICION III.17: Para dibujar una tangente a un círculo dada desde un punto dado, exterior a la circunferencia.



INSTRUCCIONES	HERRAMIENTA GEOGEBRA
El punto dado es exterior a la circunferencia, dibuja desde el punto hasta el centro,	
cortando ; y dibuja perpendicular a	
, dibuja concéntrica a y radio , entonces es la tangente buscada.	

TAREA 2: Construye una tangente a una circunferencia por un punto exterior en GeoGebra a partir de la siguiente proposición. Anota las herramientas de GeoGebra que vayas utilizando.

PROPOSICION III.17: Desde un punto dado trazar una línea tangente a un círculo dado.

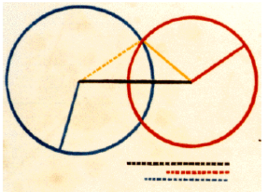


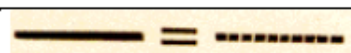
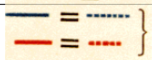
INSTRUCCIONES	HERRAMIENTA GEOGEBRA
Sea el punto dado A y la circunferencia dada BCD.	
Tómese, pues, el centro de la circunferencia, E, y trácese AE y con el centro E y la distancia EA descríbase la circunferencia AZH, y a partir del punto D trácese DZ formando ángulos rectos con EA, y trácense EZ, AB.	
Digo que ha sido trazada AB desde el punto A tangente a la circunferencia BCD.	

Figura 2. Enunciado de la Tarea 2 en ambas versiones del cuestionario.

TAREA 3 Construye un triángulo en GeoGebra a partir de la siguiente proposición. Anota las herramientas de GeoGebra que vayas utilizando.

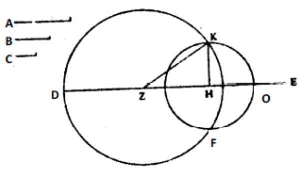
PROPOSICION I.22: Dados tres segmentos  en los que la suma de dos cualesquiera de ellos es mayor que el tercero, construir un triángulo cuyos lados deben ser iguales respectivamente a los segmentos dados.



INSTRUCCIONES BYRNE	HERRAMIENTA GEOGEBRA
Dibujar 	
Dibujar 	
Con y como radios	
Dibuja  y 	
Dibuja  y , Entonces  será el triángulo pedido.	

TAREA 3 Construye un triángulo en GeoGebra a partir de la siguiente proposición. Anota las herramientas de GeoGebra que vayas utilizando.

PROPOSICION I.22: Construir un triángulo con tres segmentos que son iguales a tres segmentos dados. Pero es necesario que dos de los segmentos tomados juntos de cualquier manera sean mayores que el restante.



INSTRUCCIONES	HERRAMIENTA GEOGEBRA
Sean A, B, C los tres segmentos dados, cumpliendo las condiciones del enunciado.	
Póngase una semirrecta que parte de D, y hágase DZ igual a A,	
y ZH igual a B y HO igual a C;	
y con el centro Z y la distancia ZD descríbase la circunferencia DKF;	
Así mismo, con el centro H y la distancia HO descríbase la circunferencia KFO, y trácense KZ, KH.	
Digo que se ha construido el triángulo KZH con tres segmentos iguales a A, B, C.	

Figura 3. Enunciado de la Tarea 3 en ambas versiones del cuestionario.

Por último, las fases de puesta en común fueron grabadas en video y transcritas para su posterior análisis. De este modo, mediante un proceso de triangulación de datos se obtuvo información en distintas fuentes (Flick, 2009) lo que, además de enriquecer el análisis, contribuye a mejorar la calidad de la investigación (Onwuegbuzie y Leech, 2007).

Las variables que se consideraron (sobre las que se centra principalmente nuestro análisis) y las fuentes de información relevantes para cada una de ellas son las siguientes:

- Seguimiento de las instrucciones por parte de los alumnos. Queríamos estudiar si los alumnos se ajustaban o no a las instrucciones proporcionadas en el enunciado de la tarea. Para determinarlo, comparamos estas instrucciones con los pasos seguidos por los alumnos en su construcción, observados tanto en el protocolo de construcción de GeoGebra como en las producciones escritas.
- Corrección de la construcción realizada en GeoGebra. Una construcción se considera correcta cuando su resultado final es susceptible de ser considerado una figura. Para determinarlo, realizamos ampliaciones en busca de posibles inexactitudes y recurrimos al test de arrastre para determinar las propiedades matemáticas que no se cumplen. En el caso de que detectáramos inexactitudes o que la construcción no pasara el test de arrastre, consideramos que estamos ante un dibujo y no ante una figura.
- Procedimiento empleado por los alumnos. Analizamos las herramientas de GeoGebra empleadas y el orden en que son utilizadas por los alumnos. Para determinarlo, recurrimos a las producciones escritas de los alumnos, al protocolo de construcción de GeoGebra (con atención especial a las prácticas de arrastre realizadas) y a las transcripciones de la fase de puesta en común.

Teniendo en cuenta los distintos objetivos, el carácter mixto de la investigación y la diferente naturaleza de los datos recogidos, utilizamos diversas herramientas de análisis. Para estudiar las variables 'corrección de la construcción' y 'seguimiento de las instrucciones' (que son de tipo categórico) así como la posible relación entre ellas y con la versión del cuestionario, se analizaron las producciones de los alumnos y sus ficheros GeoGebra. El análisis, de tipo cuantitativo y descriptivo, se realizó recurriendo al test χ^2 de independencia (Blaikie, 2003) calculado mediante el software SPSS. Por otro lado, la variable 'procedimiento empleado con los alumnos' se estudió con un enfoque cualitativo e interpretativo a partir del análisis de contenido (Berg, 2007) de las producciones de los alumnos y de las transcripciones de sus intervenciones utilizando las herramientas analíticas señaladas anteriormente.

4. RESULTADOS

4.1. Análisis cuantitativo

El primero de nuestros objetivos está relacionado con la dependencia entre las distintas variables consideradas y las distintas versiones del cuestionario. Para abordarlo desde un enfoque cuantitativo, la Tabla 2 recoge la información global relativa a las 51 producciones analizadas.

Tabla 2. Resultados globales

	Versión B		**Versión C**	
	Construcción correcta	**Construcción incorrecta**	**Construcción correcta**	**Construcción incorrecta**
Respetan instrucciones	9	5	10	4
No respetan instrucciones	10	3	5	5

Si realizamos los correspondientes test χ^2 de independencia, se concluye que no existe relación entre ninguna de las parejas de variables consideradas a nivel global. Sin embargo, si consideramos una nueva variable, cuyos 6 valores vienen dados por el cruce de las tres tareas y las dos versiones, encontramos que existe relación (con un nivel de significatividad del 90%) entre esta nueva variable y la corrección de la construcción realizada por los alumnos. En concreto, y tal y como se aprecia en la Figura 4, el peor rendimiento se ha dado en la versión C de la Tarea 1 y en la versión B de la Tarea 3.

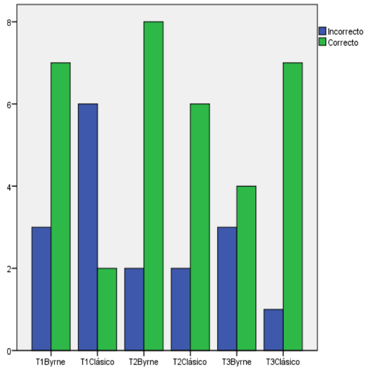


Figura 4. Corrección de las tareas en función de la versión del cuestionario.

A continuación, vamos a analizar más detalladamente cada una de las tareas de forma individual.

4.1.1 Tarea 1

En primer lugar, señalamos que sólo la mitad de los grupos participantes siguió al pie de la letra las instrucciones proporcionadas en el formulario al reproducir la construcción en GeoGebra. La sencillez de la tarea permitió que las construcciones realizadas por todos los grupos tuvieran como resultado (según la terminología presentada anteriormente) un dibujo de un cuadrado. Sin embargo, en la mitad de los grupos la construcción no dio lugar a una figura y su construcción se consideró incorrecta desde el punto de vista del test de arrastre.

Tabla 3. Resultados de la Tarea 1

	Versión B		Versión C	
	Construcción correcta	Construcción incorrecta	Construcción correcta	Construcción incorrecta
Respetan instrucciones	3	2	1	3
No respetan instrucciones	4	1	1	3

El seguimiento de las instrucciones se produjo con independencia de la versión del cuestionario con el que estaban trabajando los estudiantes. Del mismo modo, no hubo dependencia entre la corrección de la construcción y el seguimiento de las instrucciones (Tabla 3).

Sin embargo, como también se puede observar en la Tabla 3, los alumnos que completaron el modelo B del cuestionario encontraron aparentemente menos dificultades y siete de ellos realizaron la construcción correctamente con GeoGebra. De hecho, si realizamos un test χ^2 de independencia entre ambas variables (versión del cuestionario y corrección de la construcción), obtenemos que existe dependencia entre ellas con un nivel de confianza de aproximadamente el 90%.

4.1.2 Tarea 2

Casi la mitad de los grupos participantes no siguió al pie de la letra las instrucciones proporcionadas en el formulario al reproducir la construcción en GeoGebra. Pese a que esta tarea era más compleja que la anterior, solo 4 de las 18 parejas realizaron una construcción incorrecta. No obstante, 3 de las construcciones incorrectas se pueden considerar un dibujo de la tangente pedida (pero no una figura). Un grupo no completó la construcción.

Tabla 4. Resultados de la Tarea 2

	Versión B		**Versión C**	
	Construcción correcta	**Construcción incorrecta**	**Construcción correcta**	**Construcción incorrecta**
Respetan instrucciones	5	0	5	1
No respetan instrucciones	3	2	1	1

Aunque la versión del cuestionario parece tener una clara influencia sobre el seguimiento de las instrucciones, esta no es estadísticamente significativa. Por su parte, no existe relación entre la versión del cuestionario y si la construcción es correcta o no. Sin embargo, si realizamos un test χ^2 de independencia, observamos que sí existe dependencia estadística (al 90%) entre el nivel de corrección y la construcción realizada y el respeto de las instrucciones. (Tabla 4). De hecho, los grupos que respetan las instrucciones obtienen mejores resultados que aquellos que no lo hacen.

4.1.3 Tarea 3

Tres grupos no llegaron a realizar esta tarea por falta de tiempo. De los restantes, prácticamente la mitad no respetaron las instrucciones. Tan solo 4 parejas que realizaron la tarea dieron como respuesta una construcción incorrecta (que no pasaba el test de arrastre), no llegando ni siquiera a construir un dibujo.

Tabla 5. Resultados de la Tarea 3

	Versión B		Versión C	
	Construcción correcta	Construcción incorrecta	Construcción correcta	Construcción incorrecta
Respetan instrucciones	1	3	4	0
No respetan instrucciones	3	0	3	1

En este caso, no existe ninguna relación entre la versión del cuestionario y el respeto de las instrucciones. Por su parte, aunque parece haber una influencia entre el respeto de las instrucciones y el nivel de corrección de la construcción, esta no resulta estadísticamente significativa. Finalmente, sí se aprecia relación de manera estadísticamente significativa (ver Tabla 5) entre la versión del cuestionario y si la construcción es correcta o no. De hecho, se puede observar que los alumnos que completaron el modelo B del cuestionario encontraron aparentemente más dificultades a la hora de realizar la construcción correctamente con GeoGebra.

4.2 Análisis cualitativo

El segundo de nuestros objetivos está relacionado con el análisis de las producciones realizadas por nuestros alumnos. Después de revisar dichas producciones emergen una serie de fenómenos que se muestran en la Tabla 6. En dicha tabla se presentan, de manera resumida, los indicadores de cada uno de los fenómenos y las herramientas que permiten su detección.

Tabla 6. Indicadores y herramientas para la detección de los distintos fenómenos identificados.

	Indicadores	Detectado mediante	
		Ampliación	Test de arrastre
Uso de medidas concretas del dibujo	Aparición de elementos geométricos de medidas determinadas en el proceso de construcción.	No	Sí
Suposición de propiedades geométricas a partir de un dibujo	Aparición en el proceso de construcción de características no declaradas en el enunciado.	No	Parcialmente
Arrastre guiado de objetos	Aparición de objetos libres en pasos intermedios del proceso de construcción.	Sí	Sí
Uso impropio[3] de GeoGebra	Aparición de prácticas de "corta-pega" en el proceso de construcción.	Sí	Sí

A continuación, vamos a analizar detalladamente cada uno de estos cuatro fenómenos.

4.2.1 Uso de medidas concretas del dibujo

Algunos alumnos muestran, a la hora de realizar las construcciones, un cierto apego a las medidas concretas de los objetos geométricos construidos o proporcionados, por encima de las propiedades esenciales de estos objetos, que determinan los pasos del proceso de construcción solicitado. Esto se observa en la siguiente transcripción, relacionada con la Tarea 2 por ejemplo, donde se aprecia

[3] Entendemos por uso impropio del software la utilización de funcionalidades del programa de un modo no previsto por los diseñadores del mismo.

la falta de discriminación entre propiedades esenciales (un punto es exterior a una circunferencia) y atributos específicos (un punto está a distancia cinco del centro):

> Profesor: Y el radio ¿cuánto habéis puesto?
> Estudiante: Los valores que nos daban. Además, los valores también aparecían en aquél lado (en la ventana algebraica).

Otro posible ejemplo relacionado con este fenómeno se aprecia en la Tarea 3, donde algunos alumnos crearon nuevos segmentos con la herramienta 'segmento de longitud dada' a partir de las longitudes de los segmentos que se daban como datos. En la Figura 5 mostramos un momento intermedio de la construcción (tras el paso 14 del protocolo de construcción) donde podemos observar que los alumnos marcan las longitudes de los segmentos dados: en el paso 10 del protocolo de construcción marcan la longitud del segmento A_1B_1 (dado) y a continuación en el paso 14, marcan la longitud ED. Posteriormente repiten el mismo proceso con los segmentos C_1D_1 y E_1F_1.

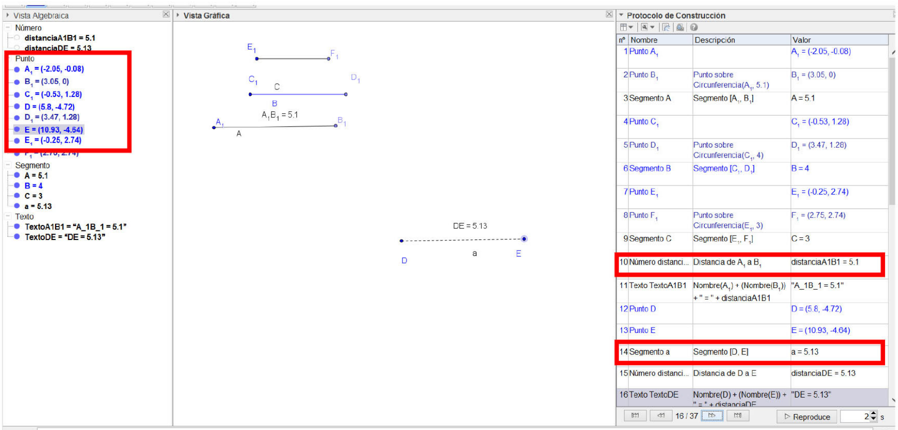


Figura 5. Ejemplo de uso de medidas concretas en la Tarea 3.

Estos alumnos no parecen asumir el carácter genérico de los tres segmentos dados, lo que podría estar relacionado con una cierta falta de comprensión del carácter general y no dependiente de las medidas concretas de un proceso de construcción geométrica.

4.2.2 Suposición de propiedades geométricas a partir de un dibujo

Ciertas construcciones muestran, además de las propiedades geométricas requeridas, alguna otra propiedad extraída directamente de la ilustración que acompaña a las instrucciones. En el siguiente extracto (correspondiente a la explicación dada por los alumnos a la Figura 6 relacionada con la construcción de una perpendicular) observamos la extracción de información adicional (en este caso incorrecta) a partir de la ilustración que acompaña a las instrucciones:

> Profesor: ¿Habéis seguido las instrucciones que se daban? ¿Habéis añadido alguna instrucción que no hubiera ahí? ¿Pensáis que habéis añadido algo?
> Estudiante: [silencio] creo que hemos unido... bueno, no sé si ponía que uniéramos H con... no lo sé. Tampoco las hemos seguido a rajatabla, simplemente hemos empezado y luego ya hemos ido... siguiendo el dibujo.
> [...]
> Profesor: ¿Y ha sido en ese momento cuando habéis pensado que había que trazar una perpendicular?
> Estudiante: Sí, una perpendicular a H.
> Profesor: ¿Y eso viene en las instrucciones?
> Estudiante: No

El comportamiento seguido por este grupo está muy relacionado con el intento de reproducir la ilustración, por encima del seguimiento de las instrucciones. En la Figura 6 (parte izquierda) vemos la ilustración proporcionada en el cuestionario. Pese a que lo parece, el segmento KH no es perpendicular al DE. Los alumnos, sin embargo, utilizaron la herramienta 'perpendicular' y, a partir de este paso, trataron de reproducir la ilustración dada tal y como se aprecia en la parte derecha de la citada figura.

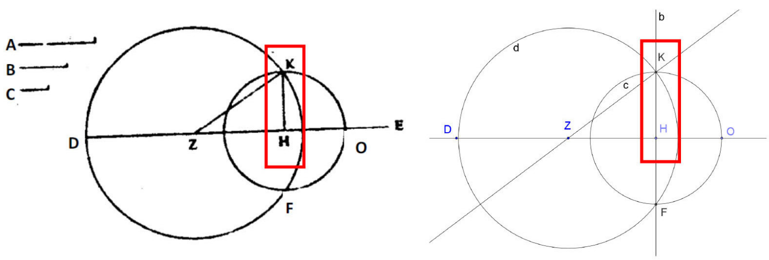


Figura 6. Imitación de la figura dada en la Tarea 3

La ilustración que acompaña a las instrucciones es un dibujo, por tanto, no es posible extraer información teórica de la misma, sino que se le da un valor descriptivo. Esto forma parte del contrato didáctico establecido en nuestras clases de geometría. Si revisamos el protocolo de construcción de esta tarea (ver Figura 7), vemos el paso anterior a construir la perpendicular. Añadir la perpendicularidad facilita la construcción al dar a los alumnos un nuevo camino para encontrar la posición de un vértice como intersección de una circunferencia y una recta. No creemos que sea fruto de un despiste ya que no se ha pasado por alto un detalle o una instrucción, sino que se ha creado una nueva condición "siguiendo el dibujo" (en palabras de los estudiantes).

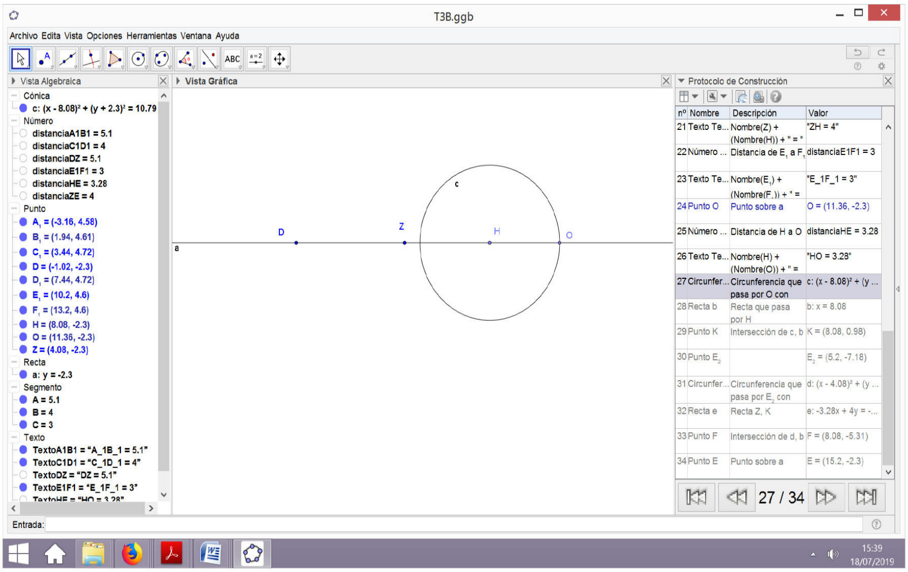


Figura 7. Imitación de la figura dada en la Tarea 3

4.2.3 Arrastre guiado de objetos

En algunas construcciones se observa, gracias a la revisión del protocolo de construcción, que, en lugar de trasladar a GeoGebra las propiedades matemáticas asociadas a las instrucciones proporcionadas, algunas parejas construyen objetos libres (que no dependen de los anteriores), para posteriormente ajustar la construcción y que se parezca lo más posible a la ilustración que acompaña a las instrucciones. En la transcripción siguiente, correspondiente a la tercera tarea, se observa este fenómeno.

> Profesor: Vale, entonces, ¿cómo habéis conseguido C?
> Estudiante: A ver, C, un punto, como no se especificaba, hemos cogido un punto cualquiera.
> Profesor: ¿Y da la casualidad de que la tangente pasa por ahí?
> Estudiante: Sí, bueno, lo hemos trampeado un poco, vale [risas] vale, pues al principio no nos salía y lo hemos movido y ya está.

Durante la construcción no se usa la propiedad matemática. En su lugar los alumnos construyen un objeto libre "*hemos cogido un punto cualquiera*" y tratan de ajustarlo posteriormente "*al principio no nos salía y lo hemos movido y ya está*".

Otro ejemplo de este fenómeno puede observarse en la Figura 8, correspondiente a la Tarea 2. Los alumnos ajustaron el radio de la circunferencia *e* haciendo que pasara por el punto *A*, además se arrastró el punto *D* para que quedara aparentemente alineado con los puntos *E* y *C*; se ayudaron para ello de una semirrecta que posteriormente ocultaron.

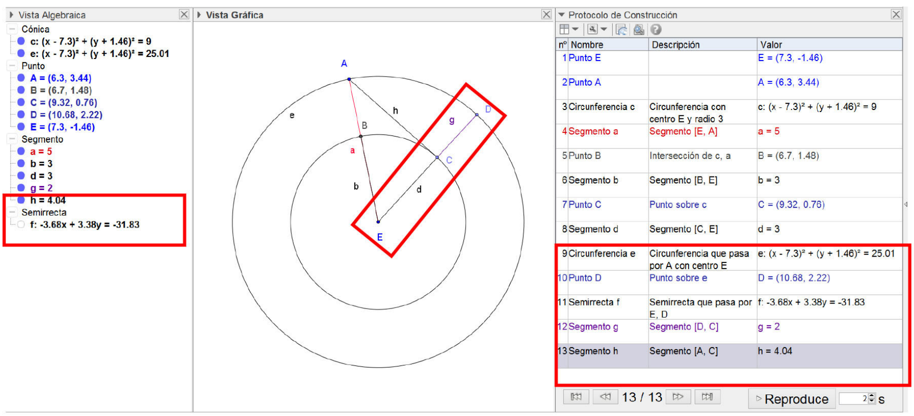


Figura 8. Ajuste de elementos a mano en la Tarea 2

Este fenómeno también es observable en la Tarea 1, realizando arrastres guiados de objetos que se construyeron sin haber impuesto todas las condiciones que los definen. Por ejemplo, para construir una perpendicular al segmento dado por uno de sus extremos, algunos grupos construyeron primero un punto arbitrario exterior al segmento, a continuación, trazaron una perpendicular al segmento por ese punto y luego la arrastraron hasta que visualmente pasara por el extremo del segmento (ver Figura 9).

Los alumnos no abordan la construcción de la perpendicular buscada como un proceso secuencial que consta de una serie de pasos ordenados jerárquicamente. En su lugar, construyen un objeto que cumple solo una de las propiedades requeridas (en este caso, la perpendicularidad) y realizan un arrastre guiado para tratar de que se cumplan las demás.

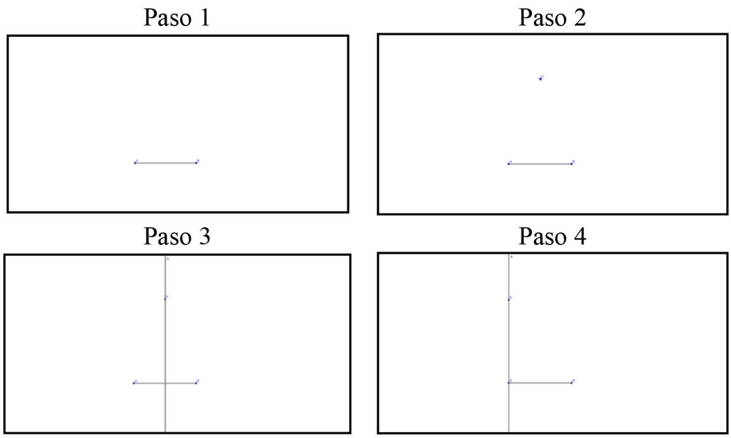


Figura 9. Arrastre guiado en la construcción de la perpendicular a una recta por un punto en la Tarea 1

4.2.4 Uso impropio de GeoGebra

En algunas ocasiones (ver la siguiente transcripción), los alumnos trasladan los elementos que se les proporcionan en el archivo de GeoGebra para utilizarlos en su construcción. En este proceso no logran hacer coincidir los elementos necesarios (en este caso los extremos de dos segmentos) para que la construcción cumpla las propiedades requeridas.

Profesor: Cuando decís que habéis transportado...
Alumno: Bueno, hemos copiado el segmento...
Profesor: ¿Y con qué herramienta?
Alumno: Control C, control V.
Profesor: ¿Y para acercar y que estuviera donde queríais que estuviera?
Alumno: Con GGB si lo situabas encima, coincidía...

Como vemos, los alumnos han utilizado un elemento no matemático del software (la opción cortar y pegar). En GeoGebra, esta funcionalidad no está pensada para ser usada con objetos geométricos durante un procedimiento de construcción. En la Figura 10 se puede observar, haciendo una ampliación suficiente, que el proceso anterior es inadecuado ya que, tras trasladar el segmento, los extremos solo coinciden visualmente.

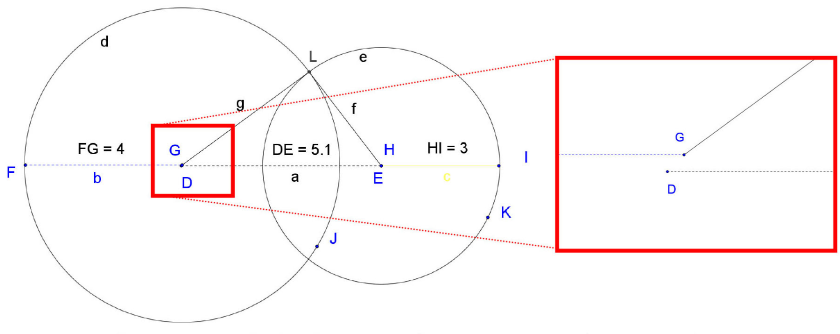


Figura 10. Traslación incorrecta de un segmento sobre otro en la Tarea 3

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestro primer objetivo, consistía en analizar las posibles dependencias entre las variables consideradas (sistema de representación, seguimiento de instrucciones y nivel de corrección de la construcción). A este respecto, al analizar globalmente las tareas no se ha encontrado ninguna relación estadísticamente significativa entre las variables consideradas. Sin embargo, al considerar como variable el par (tarea, sistema de representación) sí se ha logrado detectar una relación significativa entre esta nueva variable y el nivel de corrección de la construcción. Esto pone de manifiesto la importancia de las tareas a la hora de comprender la influencia del sistema de representación sobre la capacidad de los alumnos para llevar a cabo la construcción correctamente. Es decir, parece que el uso de un sistema de representación u otro es más o menos adecuado no en términos absolutos, sino en función de la tarea específica en la que se utiliza. En cualquier caso, los alumnos de Magisterio que realizaron construcciones a partir de la edición de Byrne tuvieron una tasa de éxito algo mayor (70%) que los que lo intentaron a partir de la versión clásica de la editorial Gredos (62%).

Es interesante señalar que, entre aquellos grupos que no respetaron las instrucciones, hay un porcentaje mucho mayor de acierto en la construcción en la versión B (un 77%) que en la versión C (un 50%). Por su parte, entre aquellos alumnos que respetaron las instrucciones rigurosamente, la versión C proporciona un porcentaje de aciertos ligeramente mayor (71% frente a 64%). Así pues, el sistema de representación de Byrne parece penalizar en menor medida el que los alumnos sigan un camino propio mientras que, al ser las instrucciones proporcionadas en la versión clásica más rigurosas y completas, su seguimiento favorece el éxito en la tarea.

Una posible explicación al fenómeno anterior puede quizás encontrarse en la distinta naturaleza de la ilustración que acompaña a las proposiciones en cada caso (Mesquita, 1998). Por un lado, puede considerarse como un elemento más de las instrucciones, a veces resulta indispensable para poder seguirlas y completar la construcción. Por otro lado, también puede verse como un elemento de comprobación de la construcción que un lector pudiera hacer. En la puesta en común se puso de manifiesto cómo los alumnos utilizan la utilizan en estos dos sentidos. En la transcripción siguiente se muestra como uno de los grupos utiliza esta ilustración de una u otra forma según la tarea:

> Profesor: ¿Os ha servido de algo la figura? La que os dan...
> Alumno: Sí, para hacernos una idea de cómo debía ser el resultado final. Ya sabíamos la respuesta. En la otra nos ha servido más, si no hubiera sido por el dibujo no la hubiéramos sacado.

La expresión "*para hacernos una idea de cómo debía ser el resultado final*" pone de manifiesto el uso como elemento de comprobación, mientras que la expresión "*si no hubiera sido por el dibujo no lo hubiéramos sacado*" apunta al uso de información contenida en la ilustración.

No obstante, creemos que la ilustración que acompaña a la versión de Byrne tiene principalmente un carácter de figura, de la que puede extraerse información y que juega un papel de complemento a las instrucciones (lo que se pone de manifiesto, por ejemplo, en la omisión de pasos en la Tarea 2 o de indicaciones precisas de la ubicación de elementos de la construcción en la Tarea 1) mientras que en la versión clásica se trata principalmente de un dibujo. Esta distinta naturaleza (Mesquita, 1998) quizás también puede explicar en parte que el porcentaje de grupos que no siguieron las instrucciones fuera ligeramente mayor en la versión B (sobre un 48%) que en la versión C (sobre un 41%).

Los fenómenos identificados se reparten de manera desigual en las tareas estudiadas. El fenómeno 1 (uso de medidas concretas) se ha detectado únicamente en la Tarea 2. El fenómeno 2 (suposición de propiedades geométricas a partir del dibujo) aparece en las Tareas 2 y 3, pero no en la Tarea 1. Puesto que los alumnos recurren a la ilustración que acompaña a las instrucciones especialmente en aquellas construcciones con un mayor grado de dificultad, no era esperable la aparición de este fenómeno en la construcción del cuadrado. El fenómeno 3 (arrastre guiado de objetos) es el más común y aparece en las todas las tareas. Esto puede estar relacionado con un escaso conocimiento del manejo de GeoGebra y de ahí su transversalidad. Finalmente, el fenómeno 4 (uso impropio de GeoGebra) ha aparecido únicamente en la Tarea 3 y está asociado específicamente a la acción de trasladar un segmento dado a otro lugar.

Aunque hemos tratado de caracterizar estos fenómenos, no pensamos que sean completamente independientes unos de otros, sino que están relacionados y en ocasiones se superponen unos y otros. De hecho, los fenómenos 1 y 2 tienen una mayor componente matemática mientras que los fenómenos 3 y 4 están más relacionados con los procesos de instrumentalización e instrumentación asociados al uso de GeoGebra. Estos dos factores fueron identificados por Ruiz-López (2017) como obstáculos en el proceso de génesis instrumental usando GeoGebra. En la Tabla 7, presentamos un resumen de la información proporcionada por cada uno de estos fenómenos y su relación con elementos teóricos de la literatura.

Tabla 7. Información proporcionada y relación con elementos teóricos de los distintos fenómenos identificados.

	Información	Relacionado con
Uso de medidas concretas del dibujo	El estudiante no ve la construcción como un proceso general o no es capaz de llevarlo a cabo.	Posibles deficiencias en el conocimiento matemático.
	El estudiante no discrimina las propiedades esenciales y las accesorias de la ilustración que acompaña las instrucciones.	Confusión entre dibujo y figura
Suposición de propiedades geométricas a partir de un dibujo	El estudiante no asume el papel de dibujo de la ilustración que acompaña las instrucciones (ruptura del contrato didáctico).	Confusión entre dibujo y figura.
Arrastre guiado de objetos	El estudiante no traslada las propiedades matemáticas a GeoGebra, sino que trata de aproximar la apariencia del resultado a la ilustración que acompaña las instrucciones.	Bajo nivel de instrumentación.
	El estudiante no asume la naturaleza secuencial de la construcción.	Posibles deficiencias en el conocimiento matemático
Uso impropio de GeoGebra	El estudiante utiliza elementos no matemáticos de GeoGebra con un sentido matemático impropio.	Bajo nivel de instrumentalización

Si concretamos más, los fenómenos 1 y 2 provienen principalmente de trabajar de forma concreta con los datos proporcionados, ya sea extrayendo información de tipo métrico (fenómeno 1) o suponiendo propiedades a partir de la ilustración que se les proporcionaba (fenómeno 2). En el fenómeno 1, la construcción realizada por los alumnos da lugar a un dibujo, pero no a una figura y sería únicamente detectable mediante la realización de un test de arrastre. Por su parte, en el fenómeno 2, la construcción puede no dar siquiera lugar a un dibujo en función de si la propiedad inferida es compatible o no con la construcción solicitada, poniéndose de manifiesto las inexactitudes inherentes al dibujo (Parzysz, 1988). En la Tarea 3, por ejemplo, los lados proporcionados como datos no permiten la construcción de un triángulo rectángulo y de ahí el fenómeno detectado en la Figura 6. En el caso hipotético de que hubiera sido posible la introducción de una restricción adicional (ser rectángulo, por ejemplo) se habría dado lugar a un dibujo pero no a una figura, pues al cambiar la longitud de los lados la restricción dejaría de ser compatible con los datos. En esta situación, el test de arrastre mostraría que la solución es, como mucho, parcialmente correcta ya que la construcción podría cumplir las condiciones requeridas y además las impuestas por la ilustración que las acompaña, lo que daría un subconjunto de las soluciones. No obstante, sería necesario reflexionar sobre las limitaciones de los objetos que aparecerían al realizar dicho test. Además, en esta situación se pone de manifiesto una cierta falta de comprensión de la jerarquía de la información gráfica y de su subordinación a las instrucciones que acompaña (Talmon y Yerushalmy, 2004). A este respecto, autores como Capponi y Laborde (1991, p. 220) ya señalan que "...la variabilidad de elementos de una figura no puede ser explicada por un dibujo. En particular, el campo de variación de estos elementos tampoco está explicitado en el dibujo".

Por su parte, consideramos que los fenómenos 3 y 4 podrían estar relacionados en siguiente sentido: los ajustes que se realizan a mano vienen permitidos por el entorno tecnológico, es decir no se pueden realizar cuando se realiza la construcción con lápiz y papel. Se estaría dando validez matemática a aquello que el programa es capaz de hacer. En ambos casos podría haber parejas que hacen ajustes porque el programa lo permite, sin plantearse la validez matemática una vez que es posible (y por tanto válido) tecnológicamente. En ambos casos ni siquiera se obtienen dibujos; podríamos decir que en ambos fenómenos se da un cierto intento de suplir la herramienta "limitar-liberar objeto" para conseguir que un determinado objeto adquiera las relaciones de incidencia deseadas.

En el fenómeno 3, los alumnos utilizan algunas de las herramientas de GeoGebra (sobre todo para la construcción de objetos) y el ajuste se realiza sobre el producto de las mismas (sobre todo para asegurar las relaciones de incidencia entre los objetos construidos). Este modo de actuar muestra un nivel bajo de instrumentación (Iranzo y Fortuny, 2009) e ilustra una falta de comprensión de la naturaleza secuencial del proceso de construcción en el que un paso se sustenta en los anteriores y sustentará a los siguientes (Talmon y Yerushalmy, 2004). Este fenómeno sería detectable mediante la realización de un test de arrastre y una ampliación. En el fenómeno 4, por su parte, ni siquiera se utilizan herramientas matemáticas específicas de GeoGebra para construir objetos (se mueven o copian objetos dados). En este fenómeno se observa una incorrecta instrumentalización del entorno tecnológico que les resuelve lagunas del ámbito matemático. Esta colisión podría ser resuelta a veces por un adecuado uso de la herramienta de GeoGebra "limitar-liberar objeto" que permite en ocasiones que un objeto se "adhiera" a otro con lo que, de alguna forma, adquiriría las propiedades matemáticas del objeto receptor. Esta situación pone de manifiesto la necesidad de combinar adecuadamente los conocimientos matemáticos con los tecnológicos para que el instrumento tecnológico medie de forma positiva en la adquisición de los conceptos geométricos (Hollebrands, 2007). Este fenómeno es más fácilmente detectable mediante el uso de la herramienta zoom para realizar una ampliación, que muestra que los alumnos ni siquiera realizan un dibujo correcto. No obstante, también sería posible poner en evidencia este fenómeno mediante el test de arrastre.

Como venimos señalando, y tal como hemos visto en la Tabla 6, los fenómenos identificados varían según la herramienta que nos permite detectarlos. Aunque el test de arrastre es una herramienta potente que permite detectar la incorrección de la construcción en todos los casos, el uso de ampliaciones permite distinguir aquellos fenómenos que están relacionados más específicamente con el uso de GeoGebra. Así pues, en función del ámbito en que se esté desarrollando la actividad, de los destinatarios y objetivos de la misma o tipo de fenómeno detectado por el docente, éste puede elegir entre recurrir a una u otra herramienta.

Finalmente, teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, podría ser interesante llevar a cabo una investigación encaminada a determinar criterios que nos permitan elegir uno u otro sistema de representación en función de la tarea que se esté llevando a cabo. A este respecto, aunque a primera vista el sistema de representación utilizado en la obra de Byrne parece más accesible (y, de hecho, en dos de las tres tareas ha dado resultados algo mejores), en algunos casos conlleva una sobreutilización de la ilustración que acompaña a las instrucciones que, como hemos visto en el caso de los fenómenos 1 y 2, puede suponer un cierto obstáculo. Otra posible línea de investigación podría encaminarse a desarrollar un sistema de representación "híbrido" en el que se tomaran aquellos elementos que se consideren más ventajosos de cada uno de los sistemas de representación que hemos manejado aquí.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo financiado parcialmente por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo (Grupo "Investigación en Educación Matemática") y por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (Proyecto EDU2015-65378-P).

REFERENCIAS

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A.M. (2017). Formación del profesorado y demostración matemática. Estudio exploratorio e implicaciones. *Boletim de Educaçao Matemática*, *31*(57), 135-157.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, *34*(5), 66-72.

Berg, B.L. (2007). *Qualitative research methods for the social sciences*. Allyn and Bacon.

Blaikie, N. (2003). *Analyzing Quantitative Data*. SAGE.

Byrne, O. (1847). *The first six books of the elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. William Pickering.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.*) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Horsori-ICE

Capponi, B., y Laborde, C. (1991). Cabri-géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire. *Actes de la VIème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique, Plestin les grèves*, 220-222.

Drijvers, P. (2012). Teachers transforming resources into orchestrations. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), From text to 'lived' resources: mathematics curriculum materials and teacher development (pp. 265-281). Springer.

Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register. En M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-17). IMFUFA.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 101-131.

Elliot, R. y Timulak, L. (2005). Descriptive and interpretive approaches to qualitative research. En Miles, J. y Gilbert, P. (Eds.) *A handbook of research methods for clinical and health psychology* (pp. 147-159). Oxford University Press.

Euclides (Trd. en 1994). *Elementos.Libros I-IV.* Madrid, España: Gredos.

Flick, U. (2009). *An Introduction to Qualitative Research*. SAGE.

Hernández, R., Fernández, C, y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-292.

Guin, D. y Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(5), 204-211.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.), *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM) (pp. 27-44). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for research in mathematics education*, *38*(2), 164-192.

Iranzo, N. y Fortuny, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(3), 433-446.

Laborde, C.; Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*,14.1/2, 165-209.

Mariotti, M.A. y Bartolini, M.G. (1998). From drawing to construction: teacher's mediation within the Cabri environment. En K. Newstead y A. Olivier (Eds.). Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 180-195). Stellenbosch: PME.

Marmolejo, G. A., y Vega, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, *24*(3), 7-32.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 183-195.

McGee, D. y Moore-Russo, D. (2015). Using a Technology-Supported Approach to Preservice Teachers' Mathematical Fluency: Unifying Mathematical Concepts and their Representations. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *15*(4), 489-513.

Onwuegbuzie, A.J., y Leech, N.L. (2007). Validity and qualitative research: an oxymoron? *Quality y Quantity*, *41*(2), 233-249.

Özerem, A. (2012). Misconceptions in Geometry and suggested solutions for seventh grade students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *55*, 720-729.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(1), 79-92.

Pole, K. (2009). Diseño de metodologías mixtas. Una revisión de las estrategias para combinar metodologías cuantitativas y cualitativas. *Renglones, revista arbitrada en ciencias sociales y humanidades*, *60*, 37-42.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. París, Francia: Armand Colin.

Rezat, S., y Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *44*(5), 641-651.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión. Revista Iberoamérica de Educación Matemática*, *33*, 11-27.

Sandoval, I.T. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, *21*(1), 5-27.

Ruiz-López, N. (2018). The instrumental genesis process in future primary teachers using Dynamic Geometry Software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(4), 481-500.

Talmon, V., y M. Yerushalmy (2004). Understanding dynamic behaviour: Parent-child relations in dynamic geometry environments, *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), pp. 91-119.

Teddlie, C., y Tashakkori, A. (2009). *Foundations of mixed methods research: Integrating quantitative and qualitative approaches in the social and behavioral sciences*. London: SAGE.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students’ command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281-307.

Antonio M. Oller-Marcén

Dirección: Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza
Ctra. de Huesca s/n, 50090, Zaragoza (España)

Teléfono: +34 976739611

 DOI: 10.24844/EM3201.05

Sobre os processos de objetivação de saberes geométricos. Análise de uma experiência de elaboração de simuladores com o GeoGebra

On the processes of objectification of geometric knowledge. Analysis of an experience of development of simulators with GeoGebra

Sobre los procesos de objetivación de saberes geométricos. Análisis de una experiencia de elaboración de simuladores con GeoGebra

Irene V. Sánchez Noroño[1]
Juan Luis Prieto G.[2]
Rafael Enrique Gutiérrez Araujo[3]
Stephanie Díaz-Urdaneta[4]

Resumo: O propósito da pesquisa é dar conta da aprendizagem geométrica produzida em uma experiência de elaboração de simuladores com o GeoGebra no Ensino Médio, na Venezuela. Para tal, apoiamo-nos na categoria *processos de objetivação*, desenvolvida na Teoria da Objetivação, com o intuito de descrever e interpretar essa aprendizagem no que diz respeito à maneira em que um professor de matemática e dois alunos do Ensino Médio tomam consciência

Fecha de recepción: 08 de julio de 2019. **Fecha de aceptación:** 08 de febrero de 2020

[1] Universidad Arturo Prat (Chile), Asociación Aprender en Red (Venezuela), irsanchez@unap.cl, orcid.org/0000-0001-9176-0125.

[2] Universidad del Zulia (Venezuela), Asociación Aprender en Red (Venezuela), juanl.prietog@gmail.com, orcid.org/0000-0003-0798-5191.

[3] Asociación Aprender en Red (Venezuela), rafael.gutierrez0593@gmail.com, orcid.org/0000-0002-4003-8324.

[4] Asociación Aprender en Red (Venezuela), stephaniediazurdaneta@gmail.com, orcid.org/0000-0002-8335-2022.

da ideia da rotação nas ferramentas de construção do software. Através de uma análise multisemiótica da atividade, examinam-se de forma integrada e sistémica os distintos meios semióticos (signos e artefatos) postos em jogo pelos participantes para alcançar um nível de consciência relativamente estável sobre a conceitualidade da rotação mobilizada na construção de um círculo, atendendo às relações dialéticas e dinâmicas entre esses meios. Nas conclusões discutem-se alguns aspectos dos processos de objetivação reportados, como a atividade semiótica desenvolvida, a atuação do professor e as dificuldades surgidas nessa atividade.

Palavras-chave: *aprendizagem geométrica; trabalho conjunto; conceitualidade; análise multisemiótica; ensino médio.*

Abstract: The purpose of the research is to account for the geometric learning produced in a simulator creation experience with GeoGebra in Secondary School, in Venezuela. For this, we rely on the *objectification process* category, developed in the Theory of Objectivation, in order to describe and interpret this learning from the way in which a mathematic teacher and two Secondary School students become aware of the idea of rotation embodied in the tools of software construction. Through a multisemiotic analysis of activity, the various semiotic recourses (signs and artefacts) put into play by the participants are examined in an integrated and systematic way, paying attention to their dialectical and dynamic relations. Participants draw on these resources to reach a relatively stable level of consciousness about the conceptualization of the rotation mobilized in the construction of a circle. In the conclusions, some aspects of reported objectification processes are discussed, such as the semiotic activity displayed, the teacher's performance and the difficulties arising in that activity.

Keywords: *geometric learning; joint effort; conceptuality; multisemiotic analysis; secondary school.*

Resumen: El propósito de esta investigación es dar cuenta del aprendizaje geométrico producido en una experiencia de elaboración de simuladores con el GeoGebra en la Educación Media, en Venezuela. Para tal, nos apoyamos en la categoría de *procesos de objetivación*, desarrollada en la Teoría de la Objetivación, con la intención de describir e interpretar ese aprendizaje en lo que se dice respecto a la manera en que un profesor de matemática y dos alumnos de la Educación Media toman consciencia de la idea de rotación en las herramientas de construcción del software. A través de un análisis multisemiótico de la actividad, se examina de forma integrada y sistemática los distintos medios semióticos (signos y artefactos) puestos em juego por los participantes para alcanzar un nivel de conciencia relativamente estable sobre la conceptualidad de la rotación movilizada en la construcción de un círculo, atendiendo a las relaciones dialécticas y dinámicas entre esos medios. En las conclusiones se discuten algunos aspectos de los procesos de objetivación reportados, como la actividad semiótica desarrollada, la actuación del profesor y las dificultades surgidas en esa actividad.

Palabras clave: *aprendizaje geométrico; trabajo conjunto; conceptualidad; análisis multisemiótico; educación media.*

INTRODUÇÃO

Nas últimas duas décadas do século XX, a concepção da aprendizagem como processo mediado por mecanismos psicológicos de pensamento e/ou raciocínio teve muita influência nos cenários de pesquisa, desenvolvimento profissional de professores e produção de materiais curriculares na educação matemática. Essa concepção da aprendizagem tem sua origem em uma visão ontológica do aluno como *sujeito autónomo* (Radford, 2017b), quer dizer, um indivíduo capaz de aprender por seus próprios meios, sem tanta influência do seu entorno cultural e social. Segundo Radford, essa perspectiva da aprendizagem coloca o aluno "no centro do significado, da conceitualização e da intencionalidade. Tudo emana dele. (...) o indivíduo termina alienado, quer dizer, afastado do mundo concreto e histórico" (p. 151).

Sem dúvida, a perspectiva cognitiva forneceu as primeiras ferramentas conceituais necessárias para enfrentar as contradições geradas na escola por um ensino da matemática orientado à difusão do saber. Porém, o foco sobre o aluno como sujeito autónomo trouxe consigo outros problemas derivados do compromisso do professor com o desenvolvimento individual de estruturas mentais cada vez mais sofisticadas em seus alunos. Nesse cenário, Radford (2017b) sugere que o aluno termina alienado, quer dizer, "preso em suas próprias cavilações" (p. 151). É nesse momento histórico (finais do século XX) que surgem as primeiras teorias educativas socioculturais, que assumem como princípio o fato de os indivíduos não poderem ser concebidos como apartados do mundo e das suas culturas. Por exemplo, os trabalhos de Bartolini-Bussi (1991), Bishop y Pompeu (1991), Boero *et al*. (1995) e Lerman (1992) convidam a repensar a relação indivíduo-sociedade, abrindo as portas a uma nova conceitualização da aprendizagem matemática como fenômeno social, cultural e histórico.

Desde suas origens, a perspectiva sociocultural tem animado o debate em torno do papel que desempenha a atividade humana no desenvolvimento dos modos histórico-culturais de produção de saberes matemáticos. Desde essa perspectiva, a atividade que acontece na aula de matemática e fora dela, como por exemplo, em cada reunião que professores e alunos realizam em busca da elaboração de simuladores com o GeoGebra (ESG) (Prieto y Díaz-Urdaneta, 2019), começa a ser vista como uma instância social de encontro com os saberes escolares e de posicionamento crítico diante deles. Entretanto, apesar de a atividade considerar a dimensão social no trabalho desenvolvido pelos sujeitos, ainda existem posicionamentos teóricos dentro desta perspectiva que consideram a aprendizagem como "um tipo de adaptação, muito ao estilo de Piaget" (Radford, 2013a, p. 21). É por isso que Radford (2017b) chama a atenção sobre o muito que ainda se tem a fazer para que *o social* deixe de ser usado como um instrumento de domesticação de consciências e de alienação na atividade matemática da aula.

Embora as reuniões em torno da ESG nunca tiveram como propósito a alienação dos sujeitos que participam nelas, reconhecemos que ela pode estar presente na atividade sem percebê-la, o que faz necessário evitá-la sempre que possível. Uma forma de atingir isso é através do desenvolvimento de pesquisas que permitam ampliar nossa compreensão das implicações e relações entre a atividade humana e a aprendizagem geométrica dos alunos que participam na ESG. Assim, assumindo uma perspectiva histórico-cultural, caracterizamos os processos de objetivação produzidos em uma reunião orientada à ESG, em particular, quando um grupo de alunos e professores de matemática envolvem-se durante a comunicação da técnica de construção de um círculo com o GeoGebra. Para tal, primeiramente nos posicionamos teoricamente no tocante tanto à aprendizagem geométrica na ESG quanto ao desenvolvimento de processos de objetivação.

UM OLHAR SOBRE A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA NA ESG

Nesta pesquisa assumimos uma perspectiva sociocultural da aprendizagem para interpretar este fenômeno em contextos de ESG. Especificamente, adotamos o enfoque histórico-cultural da Teoria da Objetivação (TO) de Radford (2013a) para atingir esse objetivo. Em oposição à perspectiva cognitiva, a TO propõe uma reconceitualização da aprendizagem matemática, não como o resultado da ação do sujeito que constrói o seu próprio saber, senão como "um processo coletivo, cultural e historicamente situado que destaca o papel do trabalho social humano, o corpo, as emoções e o mundo material" (Radford, 2018a). Desde a TO, interessam as práticas sociais "de criação de novos indivíduos capazes de refletir criticamente de maneira matemática sobre as questões urgentes de suas comunidades e do seu mundo" (Radford, 2017b, p. 141).

Assim como acontece com outras teorias educativas, na TO a aprendizagem tem a ver com os saberes matemáticos escolares. Porém, nessa teoria tal fenômeno também diz respeito daqueles seres que se transformam e reafirmam como sujeitos da educação na busca desses saberes. Para estudar como os sujeitos aprendem matemática, a TO introduz duas categorias conceituais na forma de processos de *objetivação* e *subjetivação*. Enquanto os processos de objetivação dizem respeito da maneira em que aparece o saber matemático na aprendizagem, os processos de subjetivação têm a ver com o sujeito que aprende e suas formas de colaboração. Em atenção ao propósito deste estudo, nesta parte referimo-nos à aprendizagem matemática em termos de processos de objetivação. Em outros trabalhos prévios, nosso grupo de pesquisa analisou a outra vertente da aprendizagem matemática em um contexto de ESG.

O significado que tem a objetivação na TO é diferente do significado de coisificação[5] da experiência humana, assumido por alguns teóricos sociais. Segundo Radford (2018b), os indivíduos desde que nascem entram em contato com situações, entidades ou coisas que lhes objetam, que lhes parecem estranhas e desconhecidas, mas que fazem parte do mundo dos arquétipos histórico e culturalmente constituídos de pensamento, reflexão e ação que compõem os saberes. A objetivação tem a ver, precisamente, com esses processos sociais, corporais, materiais e simbólicos de tornar-se:

---

[5] Para Wenger (2001, p. 84), a coisificação é "o processo de dar forma a nossa experiência produzindo objetos que plasmam essa experiência em uma «coisa»".

> (...) progressivamente e criticamente consciente de uma forma codificada de pensamento e de ação —algo que percebemos gradualmente e ao mesmo tempo atribuímos-lhe significado. São processos de objetivação aqueles atos de perceber significativamente algo que se revela à consciência através da nossa atividade sensorial com a cultura material (Radford, 2013a, p. 23).

A maneira de entender a objetivação proposta na TO revela dois aspectos desse processo que são fundamentais para compreender como se produz a aprendizagem dos saberes geométricos em contextos de ESG. Por um lado, a objetivação é um processo subjetivo, emocional e afetivo de *tomada de consciência* de algo que se constitui em *saber*; logo, a tomada de consciência é um reflexo da forma em que cada indivíduo reconhece o mundo objetivo (que lhe transcende) e se posiciona criticamente nele, dentro de uma dinâmica de encontro dialético com as formas codificadas de reflexão, ação e pensamento. Essa tomada de consciência não é contemplativa na medida em que é através da consciência individual que se formam sensibilidades culturais para ponderar, compreender, discordar, objetar e sentir aos outros, a nós mesmos e ao mundo (Radford, 2017a).

Por outro lado, para que a tomada de consciência aconteça é necessário que determinada *atividade* se coloque em marcha, de maneira que as reflexões e ações dos alunos nela levem a formas de encontro com os saberes. Radford (2017a, p. 125) sugere em chamar *trabalho conjunto* a essa atividade, definindo-o como "um evento criado por uma busca comum, quer dizer, uma busca que é ao mesmo tempo cognitiva, emocional e ética". Uma característica chave desse trabalho é a sua natureza social, a qual não desaparece quando se trabalha sozinho (por exemplo, quando um aluno resolve um problema matemático em solitário). Pode-se estar fisicamente sozinho, mas ainda assim o aluno apoia-se em um conjunto de *signos* (palavras, gestos, inscrições de todo tipo, etc.) e *artefatos* (calculadora, computador, software de aplicação, etc.) históricos e culturais que fazem do seu trabalho um reflexo da atividade social da aula. Na TO, esses signos e artefatos são chamados *meios semióticos de objetivação* (Radford, 2006).

Esta última ideia revela outra característica do trabalho conjunto que não podemos passar por alto: a sua manifestação na vida concreta somente "com os meios de trabalho criados pelo próprio ser humano, isto é, artefatos técnicos, ferramentas" (Piedra, 2018, p. 175). Em outras palavras, por meio do trabalho conjunto é possível que os materiais e artefatos culturais revelem a conceitualidade que a atividade humana deposita neles (Radford, 2017a). Por essa razão, a cultura material da época, e particularmente a tecnologia digital, deve necessariamente ser integrada no trabalho conjunto produzido na escola; isso com o fim de fazer aparente o saber que portam esses artefatos tecnológicos criados para professores e alunos. Dada a importância que a TO concede ao trabalho com artefatos, pode-se concluir que a cultura material intervém nos processos de objetivação e ajuda a que estes se materializem.

O TRABALHO CONJUNTO ORIENTADO À COMPREENSÃO DE UMA TÉCNICA

Um olhar da ESG como um ambiente de modelagem matemática exibe a existência de certos processos que orientam as ações dos professores e estudantes envolvidos nela, entre esses o *trabalho matemático* (Gutiérrez, Prieto, y Ortiz, 2017). O trabalho matemático é um processo cujo propósito é a produção de *desenhos dinâmicos* que modelam as formas, dimensões e movimentos presentes em objetos da geometria euclidiana, que por sua vez são modelos de objetos da realidade. Ao falar de desenho dinâmico, referimo-nos ao desenho elaborado com um Software de Geometria Dinâmica (SGD) que conserva no seu deslocamento certas propriedades espaciais que dão conta das propriedades geométricas declaradas em sua construção (Laborde, 1997), o que torna esse tipo de desenho "uma instanciação concreta da figura como conceito geométrico" (Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2008).

Na produção de um desenho dinâmico intervêm a *tarefa de construção* e a *técnica* correspondente (Sánchez y Prieto, 2017). Por um lado, a tarefa de construção é o problema matemático que os alunos enfrentam durante o trabalho matemático. Por outro lado, a técnica correspondente a uma tarefa é, basicamente, o procedimento aplicado pelos alunos para produzir o desenho dinâmico que dá resposta à tarefa. Quanto à técnica, vale ressaltar a importância dos vínculos entre esse procedimento e o saber histórico-cultural que este mobiliza. Neste sentido, a técnica é portadora de um conteúdo conceitual que apresenta uma perspectiva do objeto geométrico baseado em sua construção.

Quanto aos artefatos, o GeoGebra cumpre um papel fundamental na ESG já que, sendo um artefato cultural, proporciona ao usuário tanto uma série de *conteúdos conceituais* na forma de ferramentas de construção, medida e outras opções, quanto um *espaço de trabalho conjunto* estruturado conceitualmente para que o usuário experimente com os conteúdos matemáticos e produça novas formas de construir os desenhos dinâmicos (Radford, 2014). Esse espaço de trabalho é integrado ao software por meio das suas diferentes *aplicações* (Hohenwarter, Hohenwarter, y Lavicza, 2009), denominadas Gráfico, Janela CAS, Geometria, Janela 3D, Planilha de Cálculos e Probabilidade.

Por exemplo, desenhar um retângulo na aplicação Geometria implica utilizar a ferramenta *Polígono*, na qual subjaze uma forma de construção dessa figura que precisa informar ao software quais são os vértices que lhe definem (Figura 1). De fato, a ferramenta *Polígono* é portadora de um conteúdo conceitual (uma maneira de conceituar ao polígono) que faz possível materializar uma técnica de construção particular do retângulo que se espera que seja aprendida. Portanto, assumimos que o uso deliberado das ferramentas de construção do GeoGebra afeta o significado que os alunos produzem dos objetos geométricos que eles tentam representar, uma vez que essas ferramentas sugerem "linhas potenciais de desenvolvimento cognitivo e social" (Radford, 2014, p. 414).

Figura 1. Conceitualização do polígono pela ferramenta vinculada

Para que os saberes mobilizados no uso do GeoGebra revelem-se à consciência dos alunos, é necessário que os conteúdos conceituais incrustados em suas ferramentas apareçam durante o desenvolvimento de atividades de reflexão conjunta em torno da técnica de construção de determinado desenho dinâmico. Uma das atividades típicas da ESG tem por objeto a *compreensão da técnica de construção* (Prieto y Ortiz, 2019), para o qual alunos e professores mobilizam e significam uma variedade de saberes, não só por meio de discursos orais baseados em percepção visual ou em teoria geométrica (Laborde, 1997), senão também por meio de outras formas de reflexão e expressão humana (Radford, 2006).

Este posicionamento teórico aporta os insumos para o estudo da aprendizagem em experiências de ESG, atendendo a uma caracterização dos processos de objetivação em torno dos saberes que se revelam aos indivíduos quando buscam compreenderem uma técnica de construção. Assim, o objetivo desta pesquisa é atingir essa caracterização e, para tal, utilizamos o caminho metodológico descrito a seguir.

METODOLOGIA

A metodologia implementada no trabalho corresponde à de uma pesquisa qualitativa, de natureza descritiva e interpretativa. De acordo com Bogdan e Biklen (2007), a pesquisa qualitativa no campo da educação tem as seguintes características: (i) o ambiente natural é a fonte direta dos dados, (ii) os resultados têm uma forte componente descritiva, (iii) os pesquisadores preocupam-se mais com os processos do que com os produtos, (iv) a análise dos dados é geralmente realizada indutivamente, e (v) o significado é de importância vital nesta abordagem.

Participantes e contexto

A pesquisa envolveu um grupo de alunos de Ensino Médio da Venezuela (entre eles Simão e Edmilson, chamados assim de modo conveniente) com idades entre 14 e 16 anos, e três professores de matemática (chamados Marcelo, Iran e João). No momento da pesquisa, todos estes sujeitos integravam o projeto comunitário *Club GeoGebra para la Diversidad*, implementado entre os anos 2013 e 2017 em diferentes escolas públicas no oeste do país (Prieto y Gutiérrez, 2017). No contexto desse projeto, os alunos de cada escola reuniam-se semanalmente para participar da ESG com a orientação de um professor de matemática (promotor das aprendizagens) associado ao projeto.

Em meados de 2016, Marcelo e João visitaram o clube orientado por Iran, em que participavam os alunos da pesquisa. O objetivo da visita foi conhecer o trabalho dos alunos naquele ano letivo. Para tal, foi solicitado a cada aluno que comunicasse aos professores visitantes as técnicas de construção aplicadas por eles para produzir os desenhos dinâmicos. Essas técnicas tinham sido produzidas em reuniões prévias à visita dos professores ao clube, e em muitas ocasiões a produção delas implicava o trabalho conjunto do aluno responsável da simulação, seus colegas e o promotor (Iran). Por isso, nessa reunião era possível que o aluno, em situação de comunicação de uma técnica, recebesse o apoio de colegas que possivelmente conhecessem os procedimentos aplicados por ele.

De todas as intervenções que ocorreram nessa reunião, analisamos aquela desenvolvida por Simão, que utilizou o GeoGebra para representar o antebraço que compõe o braço robótico da Figura 2a. Para representar esta parte do mecanismo, o aluno formulou cinco tarefas de construção, que foram resolvidas progressivamente. Essas tarefas estavam vinculadas aos objetos geométricos indicados na Figura 2b.

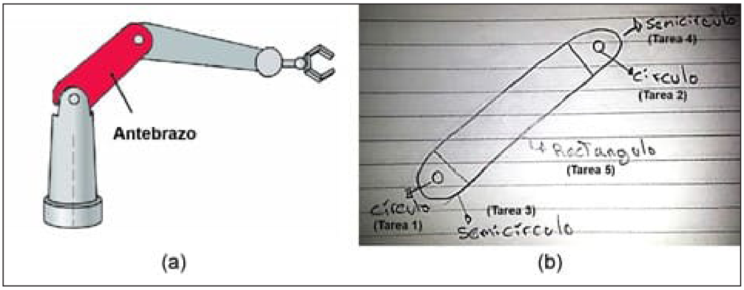


Figura 2. Fenômeno escolhido por Simão e objetos geométricos vinculados ao antebraço

Especificamente, analisamos o acontecido quando Simão tentava comunicar a João a técnica aplicada por ele para resolver a segunda tarefa de construção: *construir um círculo a partir de um ponto exterior*. Nesse momento da reunião intervém Edmilson para acompanhar a Simão na comunicação da técnica. Na sequência, explica-se como foram produzidos e analisados os dados no contexto descrito.

Produção dos dados

Diversos autores consideram que, em uma pesquisa qualitativa, os dados são *produzidos* em lugar de serem coletados, já que eles não somente são capturados pelo pesquisador através dos procedimentos e instrumentos definidos, senão que o pesquisador incide nos dados, percebendo-os e organizando-os com seu próprio olhar (Powell y Silva, 2015).

Assim sendo, nesta pesquisa, a produção dos dados começou com a filmagem em vídeo do trabalho conjunto dos participantes, desenvolvido em torno da intervenção de Simão ao comunicar a técnica de construção do círculo. A intenção de realizar essa filmagem responde a nossa necessidade de capturar a realidade complexa do trabalho conjunto desenvolvido pelos participantes. Posteriormente, a filmagem realizada foi transcrita, excluindo aqueles momentos do trabalho conjunto em que não se discutia o procedimento de construção do círculo. A transcrição foi realizada utilizando um processador de texto; logo, os dados da pesquisa provêm apenas da transcrição realizada não sendo alterados pelos pesquisadores quando esses, por exemplo, decidem excluir determinada informação.

Análise dos dados

A análise dos dados realizou-se em 3 etapas.

Na *etapa 1* realizamos uma primeira leitura da transcrição para identificar, discutir e descrever a técnica de construção de Simão. A finalidade dessa etapa foi reconhecer a particularidade do trabalho realizado por Simão para construir o círculo. Em outras palavras, procurou-se relacionar a conceitualidade da qual é portadora a ferramenta *Círculo* do GeoGebra com as diferentes ações desenvolvidas pelo aluno para dar resposta à tarefa. Como resultado dessa primeira etapa de análise, ilustramos na Tabela 1 a técnica de construção do círculo, em termos de passos e ações.

Tabela 1. Técnica de construção do círculo aplicada por Simão.

Tarefa de construção 2: Construir um círculo a partir de um ponto exterior (ponto *C*)
Ferramenta usada: Círculo dados Centro e Raio
Conteúdo da ferramenta: Selecione o centro e, depois, digite a medida do raio

Passo 1: Determinar o centro do círculo

1.1 Traçou-se uma reta *a* paralela ao *eixo x* pelo ponto *C* (Figura 3a).
1.2 Aplicou-se uma rotação à reta *a* com centro em C, em um ângulo de amplitude aleatória de *42.6°* e em sentido anti-horário, obtendo a reta *a´* (Figura 3b).
1.3 Criou-se o controle deslizante α, com valores mínimo e máximo de *0°* y *65°*, respectivamente.
1.4 Aplicou-se uma rotação à reta *a´* com centro em C, em um ângulo α (o controle deslizante) e em sentido horário, obtendo a reta *a´´* (Figura 3c).
1.5 Traçou-se uma circunferência centrada em C e raio de *21*k* (sendo k uma medida padrão representada por um controle deslizante de tipo número), obtendo a circunferência *b*.
1.6 Interceptou-se a reta *a´´* e a circunferência *b*, obtendo o ponto *D*, centro do círculo (Figura 3d).

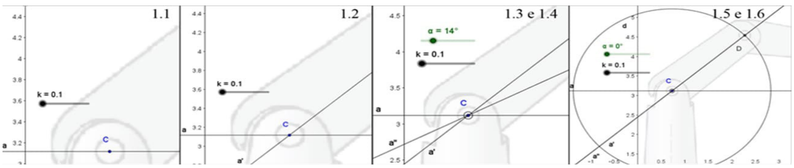


Figura 3. Ações 1.1 a 1.6

Passo 2: Selecionar o raio do círculo

2.1 Escolheu-se a medida *k* como o raio do círculo

Passo 3: Traçar a circunferência do círculo

3.1 Traçou-se a circunferência do círculo, centrada em *D* e raio igual a *k*, obtendo a curva *d* (Figura 4a).

Passo 4: Ilustrar o círculo

4.1 Modificou-se a transparência da circunferência do círculo para ilustrar a região interna (Figura 4b).

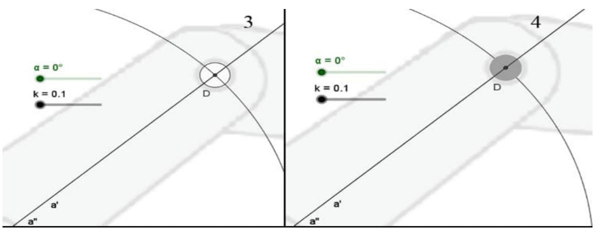


Figura 4. Ações 3.1 e 4.1

Quanto à conceitualidade da ferramenta *Círculo* que orientou o desenvolvimento da técnica produzida por Simão, vale a pena ressaltar que essa ferramenta (na versão 5.0 do software) somente representa a circunferência do círculo; logo, o aluno teve que acrescentar mais um passo à sua técnica (passo 4 do procedimento, Tabela 1) para resolver a tarefa.

Na *etapa 2* identificamos nas transcrições aqueles *fragmentos* da discussão entre os participantes em que parecia existir evidências de tomada de consciência de algum objeto geométrico subjacente na técnica, colocando a atenção nas mudanças de foco no discurso. Denominamos *segmento destacado* (Radford, 2015) àquele conjunto de fragmentos da discussão em que se manifesta um processo de objetivação em torno de algum objeto geométrico.

Na *etapa 3* realizamos uma *análise multisemiótica* (Sabena, Robutti, Ferrara, y Arzarello, 2012) nos segmentos destacados com o intuito de identificar a variedade de significados geométricos e meios semióticos mobilizados pelos participantes durante o trabalho conjunto.

Assumindo o fato de a cognição ter natureza multimodal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards, y Arzarello, 2009), focamo-nos na maneira em que os participantes combinaram diferentes signos e artefatos para tentar fazer aparente a conceitualidade que porta a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto* do software. Denominamos *nós semióticos* às formas em que os participantes combinam distintos meios semióticos para alcançar um estado de consciência consideravelmente estável sobre algum objeto geométrico subjacente no trabalho conjunto. Radford, Demers, Guzmán, e Cerulli (2003) definem os nós semióticos como "peças da atividade semiótica do aluno, onde a ação, os gestos e a palavra trabalham juntos para alcançar a objetivação do saber" (p. 56).

No início da análise, as *etapas 2* e *3* foram realizadas de forma independente por cada um dos pesquisadores. Posteriormente, realizamos reuniões para discutir os resultados obtidos. Finalmente, as discrepâncias no tocante aos resultados obtidos foram solucionadas. Na sequência, apresentamos os resultados da nossa análise.

RESULTADOS

A análise dos dados permitiu reconhecer quatro nós semióticos que revelam processos de objetivação vinculados à ideia de rotação. Esses nós semióticos dizem respeito à rotação de retas na interface do GeoGebra que fazem parte das ações realizadas por Simão para executar o primeiro passo da técnica. A diferença entre as rotações dos nós semióticos encontra-se na natureza do ângulo utilizado em cada ação. Destaca-se que o *ângulo* de rotação, o *objeto* a rotacionar e o *centro* da circunferência são os três elementos que fazem parte da conceitualidade dessa transformação geométrica, da qual é portadora a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*. No tocante ao ângulo de rotação, este deve ser informado ao software por meio de um campo de entrada que aparece após selecionar os outros dois elementos. Nesse campo, o usuário deve inserir a medida do ângulo ou a variável (uma letra) que lhe define em sua construção. De acordo com a situação que se apresente, as duas formas de agir levam a formas diferentes de entender a rotação no GeoGebra.

Nos dois primeiros nós semióticos se mostram a discussão que tiveram os participantes quanto à rotação da reta *a* com um ângulo expressado como medida (ação 1.2 da técnica), enquanto os outros dois nós semióticos referem-se à maneira em que os sujeitos reconhecem que a reta *a'* foi rotacionada com um ângulo expressado como variável (ações 1.3 e 1.4). Entretanto, a forma como se sucederam os acontecimentos na reunião levou a que ambas as formas de entender a rotação surgissem simultaneamente; logo, é nos últimos dois nós semióticos onde se concretizam tais formas de entendimento dessa transformação no software.

Primeira aproximação à ideia de rotação

O reconhecimento da ideia de rotação com um ângulo expressado como medida no GeoGebra começou quando João convidou o Simão a explicar como ele executou as primeiras ações da técnica. Como resposta a esse convite, foi desenvolvido um trabalho conjunto em que se observam diferentes formas de comunicar a rotação da reta *a* (ação 1.2), que progressivamente se vão aproximando à conceitualidade da qual é portadora a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*. Essas formas de comunicar as ações vão surgindo à medida que João orienta a discussão até ao reconhecimento dos elementos característicos do uso da ferramenta mencionada.

Uma primeira aproximação à ideia de rotação aplicada na ação 1.2 começa a manifestar-se no momento em que Edmilson, motivado pela dificuldade de Simão em expressar as ações realizadas, comunica a João o procedimento que eles utilizaram para atingir o primeiro passo da técnica. Fazendo um uso coordenado de palavras, gestos e indicações sobre o desenho em papel, Edmilson realiza uma descrição das ações 1.1 e 1.2 da técnica sem fazer alusão explícita a cada elemento que caracteriza os objetos geométricos subjacentes a essas ações, em referência às ferramentas do GeoGebra que foram utilizadas para tal (linha 6). Essa situação leva o João a insistir na necessidade de uma nova explicação que considere tais conceitualidades, através de uma pergunta direcionada a Simão (linha 7).

> [6] Edmilson: [traçamos] uma reta e a rotacionamos [indica a rotação por meio do giro da mão sob a mesa, em sentido anti-horário (Imagem 1)], para encontrar esse ponto [centro do círculo].

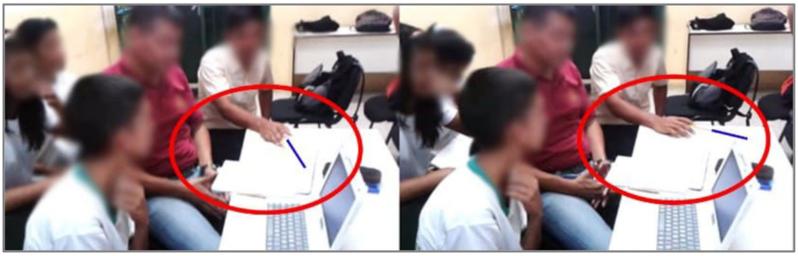


Imagem 1. Edmilson refere-se às retas das ações 1.1 e 1.2

> [7] João: Hum, e essa reta, como você a desenhou? [referindo-se a Simão].

A nova explicação de Edmilson caracteriza-se por uma maior precisão das qualidades da reta *a*, enquanto objeto da rotação. Nessa ocasião, Edmilson refere-se à direção dessa reta através de um uso coordenado de palavras e movimentos da sua mão (linha 9). A referência que fez Edmilson da direção da reta *a* é complementada por João, por meio de uma interpretação do expressado pelo aluno que se apoia no uso do desenho em papel, indicando sobre este meio os procedimentos realizados (linhas 10 e 12). Diante a interpretação realizada, os alunos mostram-se sensíveis e concordam com o dito pelo professor (linhas 11 e 13).

> [9] Edmilson: [nós] desenhamos [a reta *a*] paralela ao *eixo y*... ao *eixo x*, e depois a rotacionamos [indica a rotação por meio do giro do lápis que leva na mão (Imagem 2)]... no sentido anti-horário.

Imagem 2. Edmilson refere-se à direção das retas das ações 1.1 e 1.2

[10] João: Paralela ao *eixo x*. Tipo assim? [indica a reta desenhada no papel por meio do deslocamento do lápis em direção horizontal e de esquerda à direita].
[11] Alunos: Sim! [acenam com a cabeça, em sinal de aceitação].
[12] João: E depois você a rotacionou assim? [gira o lápis de *a* até *a'*, em sinal da rotação].
[13] Edmilson: [acenando com a cabeça em sinal de conformidade]... anti-horário.

A segunda aproximação à ideia da rotação

A forma com que Edmilson se aproxima à ideia de rotação não convence a João, que insiste na necessidade de os alunos produzirem um discurso sobre a ação 1.2 da técnica mais próxima à conceitualidade da ferramenta usada. Para tal, e em alusão à reta *a'*, o professor pergunta aos alunos como desenharam essa reta (linha 20). Em seguida, aproveitando que a reta *a'* se obteve da reta *a* (ação 1.1), João reproduz um discurso sobre a ação 1.1 da técnica que considera a conceitualidade da relação de paralelismo, da qual é portadora na ferramenta *Reta Paralela*, em uma tentativa de ajudar os alunos a avançarem até um discurso com as mesmas características e que respondesse à pergunta do professor (linha 21). Esse discurso de João combina palavras e gestos, apoiados no desenho em papel, para finalizar novamente na pergunta (linha 22).

[20] João: Mas, como desenharam essa? [refere-se à reta rotacionada, que indica com o lápis sobre o desenho (Imagem 3)]. Essa é a que eu não entendo.

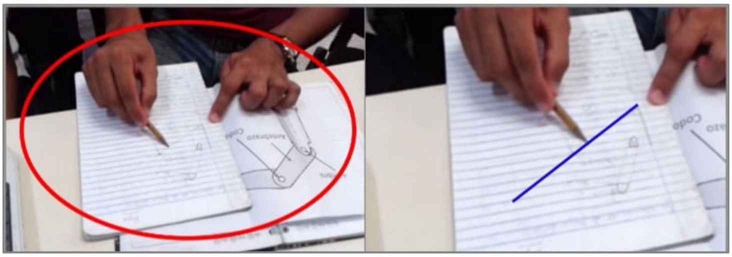


Imagem 3. João questiona os alunos quanto à forma em que foi realizada a ação 1.2

[21] João: Esta [refere-se à reta *a*, que aponta com o lápis sobre o papel], sim entendo como a desenharam, porque a fizeram com paralelismo.... Paralela ao *eixo x* que passasse por aqui [indica o ponto *C* sobre o desenho]. Este é o ponto *C*. Está bem, eu desenho essa reta.

[22] João: Mas, como fizeram essa?

Como resposta a essa intervenção, Edmilson refina seu discurso sobre a ação 1.2, fazendo menção por primeira vez da ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto* do software (embora não fosse nesses termos) usada por Simão para aplicar a rotação à reta *a* (linha 23). A partir disso, João começa um processo de reconhecimento da conceitualidade da rotação, da qual é portadora essa ferramenta, iniciando pela referência ao objeto da rotação (reta *a*) por meio de palavras e indicações da sua representação no desenho em papel (linha 24). Em sintonia com João, Edmilson menciona o centro da rotação (ponto *C*) como outro dos elementos característicos da transformação no software, em uma mostra de como o aluno toma consciência da necessidade de explicitar cada elemento característico da rotação no entorno do GeoGebra (linha 25). Continuando com essa dinâmica, João pergunta sobre o ângulo de rotação aplicado (linha 26).

[23] Edmilson: Usamos uma rotação.

[24] João: Você rotacionou essa? [refere-se à reta *a*, que indica com o lápis sobre o papel (Imagem 4)].

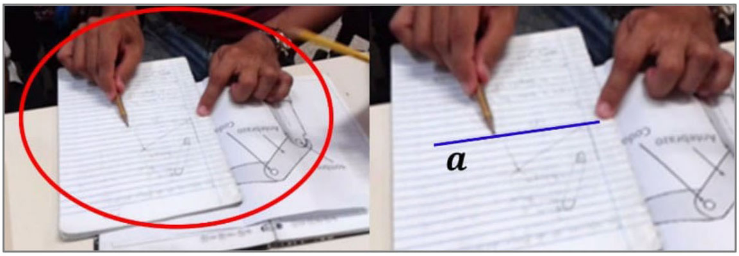


Imagem 4. João insiste em sua interpretação do expressado por Edmilson sobre o papel

[25] Edmilson: Com centro nesse ponto [refere-se ao ponto *C* (Imagem 5)].

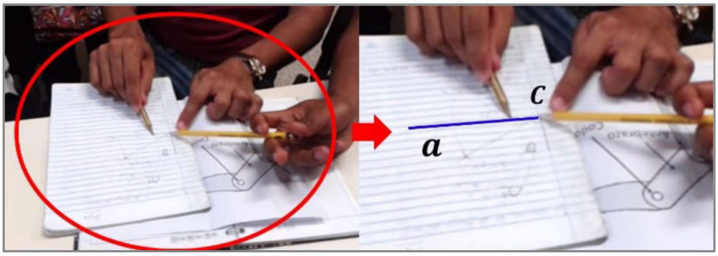


Imagem 5. João continua o processo de interpretação

[26]. João: Com que ângulo?

Segundo mostram os dados, Edmilson dúvida em relação à natureza do ângulo utilizado por Simão na ação 1.2. Em meio da sua hesitação, Edmilson assume que Simão vinculou o ângulo de rotação ao controle deslizante α, devido a que nesse momento desconhecia-se alguma medida exata desse ângulo (linha 27). Após comparar as ações descritas por Edmilson com o desenho dinâmico, João percebe visualmente uma contradição no comportamento da reta *a'*, logo após ser ativada a opção *Animar* no controle deslizante α (linhas 28, 29 e 30). Em particular, o professor percebe que para certos valores do controle deslizante, a reta *a'* tem coeficiente angular negativo,[6] questão que não devia acontecer para um ângulo de rotação α que varia entre 0º (posição horizontal) e 65º, em sentido

[6] Embora o coeficiente angular da reta não foi um conceito abordado na reunião, decidimos utilizá-lo aqui para explicar com precisão o que realmente estava acontecendo na situação descrita.

anti-horário (linha 30). A contradição confirma-se quando os alunos se questionam entre si e mostram não concordar com o sentido da rotação aplicada (linhas 32, 33, 34 e 35).

[27] Edmilson: Eh, bom, ou seja, fizemos isso com um controle deslizante para... como não sabíamos qual foi o ângulo... sim, o ângulo exato.
[28] João: ¿Está o controle deslizante aí [na tela]? Mostre o controle deslizante, lá nos controles [indica com o dedo indicador a tela do computador].
[29] Simão: [manipula o controle deslizante α e lhe ativa a opção *Animar*].
[30] João: Bom... mas esse ângulo passa de... ou seja, para aca debaixo [referindo-se a que a reta que rotaciona o faz por debaixo de *a* (Imagem 6)].

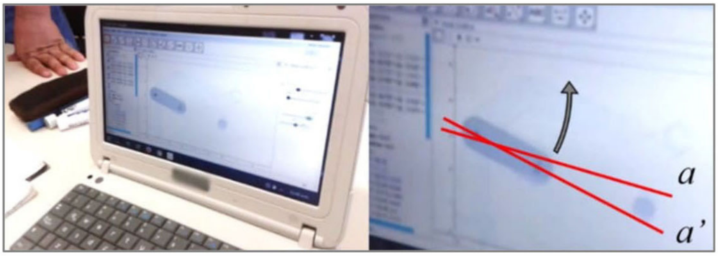


Imagem 6. Posição da reta a' por debaixo da reta a

[32] João: Mas então, o que não entendo é como rotacionaram isso [indica a reta *a* com o lápis], com respeito a este ponto [referindo-se ao ponto *C*, que indica com o lápis sobre o desenho], o ângulo que lhes diz o controle deslizante [referindo-se ao controle deslizante α].
[33] Edmilson: Anti-horário.
[34] Simão: Não, horário.
[35] Edmilson: Horário? [mostrando-se incrédulo].

A maneira em que João leva os alunos ao reconhecimento da contradição comentada e, portanto, à tomada de consciência do ângulo que realmente foi utilizado na ação 1.2, explica-se com detalhe no segundo nó semiótico. Tomamos esta decisão dado que esse reconhecimento se realiza ao mesmo tempo em que surge a tomada de consciência da ação 1.4 correspondente ao segundo nó semiótico.

O reconhecimento da ação 1.4 da técnica

Como mencionamos no início dos resultados, nos últimos dois nós semióticos evidencia-se uma tomada de consciência sobre a ideia de rotação com um ângulo expressado como variável. Existem duas formas em que uma variável pode representar o ângulo de uma rotação: (i) quando a variável expressa o valor de um ângulo construído previamente na interface do software, e (ii) quando a variável expressa um intervalo de medidas angulares representado por um controle deslizante. Condicionado pela necessidade de representar o movimento do antebraço do braço robótico (Figura 2), Simão executou ações que o levaram a rotacionar a reta *a'* com um ângulo como o descrito na segunda forma mencionada, obtendo-se a reta *a"* sobre a qual estaria localizado o centro do círculo que se buscava construir.

Porém, no trabalho conjunto, os dados mostram que Simão e Edmilson parecem ter esquecido a rotação da ação 1.4 da técnica quando vinculam erradamente o controle deslizante (ação 1.3) à rotação da reta *a* (ação 1.2). Portanto, este terceiro nó semiótico descreve a forma em que os participantes tomaram consciência tanto da existência da rotação aplicada na ação 1.4, quanto da conceitualização desse objeto geométrico depositada na ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*, com um ângulo expressado como medida (nós semióticos 1 e 2) e como variável vinculada a um controle deslizante.

Os dados mostram que a ação 1.4 da técnica começou a ser reconhecida quando João toma consciência da existência, no desenho dinâmico, de uma reta (reta *a"*, ação 1.4) com um comportamento distinto daquela outra descrita por Edmilson e Simão (reta *a´*, ação 1.2, ver final do nó semiótico 1). Dado o complicado que foi para os alunos reconhecerem essa contradição somente através da observação do desenho dinâmico, João produziu uma nova interpretação das ações descritas por Simão e Edmilson, em que integra o desenho em papel ao repertório de recursos semióticos utilizados nesse momento. Para tal, o professor desenvolve um discurso oral em que usa o lápis para indicar, sobre o desenho em papel, cada um dos elementos necessários para a aplicação da rotação no caso da ação 1.2, até chegar no momento de interpretar o ângulo de rotação (linhas 40 e 41).

A intenção foi fazer com que os alunos pensassem nos efeitos que, sobre o desenho dinâmico, deveriam produzir-se ao definir a ação 1.2 em função de um ângulo de rotação expressado como variável (α) e não como medida. A partir da interpretação realizada sobre a base do desenho em papel, João leva os alunos a observarem o desenho dinâmico e compararem o comportamento da reta *a'*, segundo o combinado na interpretação realizada (o expressado por Edmilson no seu discurso), com o comportamento observado na tela do computador (linha 42).

> [40] João: Logo, vocês me dizem que desenharam essa reta daqui [indica com o lápis a reta *a'* (Imagem 7)]. Por que essa reta é importante? Imagino que é importante porque aí vai estar o outro ponto... a outra circunferência que vocês vão desenhar, ou o outro círculo, acho. Está bom, mas, como desenhei essa reta? Vocês me disseram "rotacionando essa" [refere-se à reta *a*]. Bom, se a rotaciono, eu entendo vocês. Mas se vocês a rotacionam me devem dizer...

Imagem 7. João indica os elementos necessários para aplicar a rotação no GeoGebra

> [41] João: Isto é o que eu quero lhes fazer ver. Qual o ângulo aqui? Vocês me disseram: "Não professor, o ângulo não é fixo. O ângulo é um controle deslizante. Usamos um controle deslizante porque, se o manipulamos, vamos conseguir que a reta descenda e ascenda, descenda e ascenda, e isso nos convem". Eu entendo vocês. Mas se eu vou rotacionar isto [indica com o lápis a reta *a* sobre o desenho (Imagem 8a), deslocando a mão de esquerda à direita] com respeito... nesse sentido, no sentido anti-horário, um ângulo α, essa reta [*a*] se mexe de aqui e vai chegar até aqui [indica a rotação da reta *a* no papel, usando a ponta do lápis (Imagem 8b)]. Ela não vai baixar [ter coeficiente angular negativo]. Mas eu aí [referindo-se à janela de visualização do GeoGebra] estou vendo que [a reta] baixa.

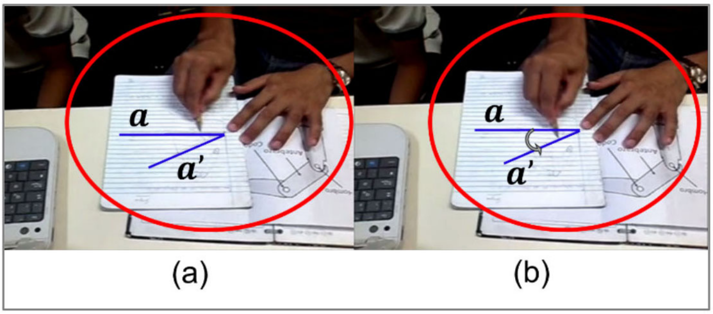


Imagem 8. João explica aos alunos a contradição do expressado pelos alunos

[42] João: Aqui [na tela do computador]... eu imagino que a reta está aqui [indicando com o lápis o desenho dinâmico na tela (Imagem 9a)]. Olhem, aí [a reta] chega a ser horizontal, mas depois baixa (Imagem 9b). O que aconteceu aí? Como era a questão [a construção]? Porque eu não a entendi. Simão, não se lembra do que você fez?

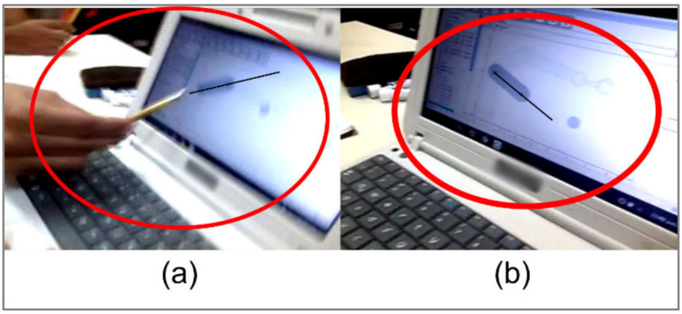


Imagem 9. Uso do desenho dinâmico para ilustrar a contradição discutida

Este uso coordenado de palavras, gestos e inscrições, tanto no papel quanto no software, chega a tornar-se uma oportunidade para reconhecer a existência de *a''* como uma segunda reta presente na construção (e que também foi rotacionada, além da reta *a'*) no momento em que Edmilson, por vontade própria, decide utilizar a ferramenta *Exibir/Esconder Objeto* para fazer visíveis todos os objetos construídos até o momento (linha 43). Essa decisão de mostrar todos os elementos da construção revela como o aluno começa a duvidar do seu discurso (linha 44), questão que é aproveitada por João para aprofundar em sua intervenção (linha 47). Vale ressaltar que quando Edmilson fez uso dessa ferramenta, o controle deslizante tinha um valor de 0º; logo, as retas *a'* e *a''* encontravam-se sobrepostas e não era possível distingui-las.

Por esse motivo, João solicita a Simão mudar o valor do controle deslizante para visualizar melhor ambas as retas, uma vez que todos os objetos construídos estavam a ser mostrados na tela do computador (linha 47). Essa estratégia foi potencializada pelo próprio professor ao sugerir o uso da opção *Animar* do GeoGebra sob o controle deslizante α (linhas 48, 49 e 50). Após a ativação dessa opção, foi possível para os alunos não só confirmarem a existência da reta *a''* no desenho dinâmico (como destacou Simão na linha 51), senão também reconhecerem que foi essa mesma reta a que realmente foi rotacionada com um ângulo expressado como variável e não a reta *a'*, tal como João enfatizou e como Edmilson reafirmou (linhas 52, 54 e 55), o que evidencia a tomada de consciência da ação 1.4 da técnica.

> [43] Simão: Localizamos um... [fica pensativo enquanto Edmilson utiliza a ferramenta *Exibir/Esconder Objetos*].
> [44] Edmilson: Olha, essa reta [refere-se à reta que serve de referência à rotação] de quem é linha [homóloga]?
> [47] João: [Simão], mexe o controle deslizante de ângulo por favor. Quero ver o que acontece com esse controle deslizante... aí [nessa posição] está bem. Viu? Isso é o que está acontecendo, eu estava imaginando isso. O que estou vendo aí agora [nesse instante], não o enxergava quando α estava em zero. O que estou vendo de especial? [fazendo a pergunta aos alunos]. Já entendi o que este menino [Simão] fez, só com olhar isso [referindo-se ao desenho dinâmico na janela de visualização (Imagem 10)].

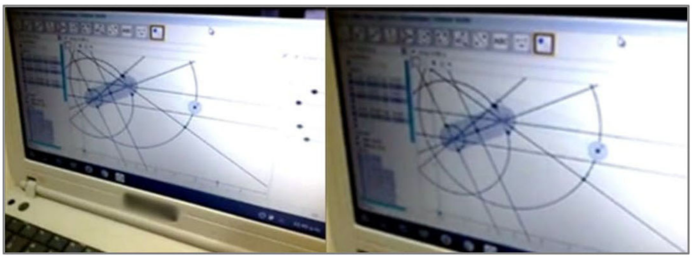


Imagem 10. Confirmação da existência da reta a'' e a origem da sua rotação

[48] João: [Simão] ativa animação a isso [refere-se ao controle deslizante α].
[49] Simão: Aqui?
[50] João: Isso. Animação. Olhem... olhem.
[51] Simão: É como outra reta. Como se houvesse outra reta ali [refere-se à reta *a''*, a qual se mexe à medida que o controle deslizante α toma valores distintos (Imagem 11)].

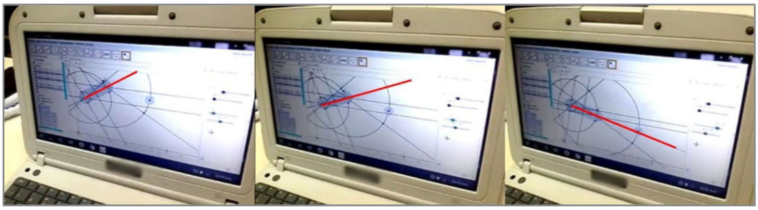


Imagem 11. Comportamento da reta a'' na tela do computador

[52] João: Exato, olha como se mexe essa reta nova [refere-se a *a''*]... Porque, realmente, o controle deslizante não está vinculado com essa reta que vocês desenharam aqui [referindo-se à reta *a'*] senão com outra [refere-se a *a''*].
[54] Edmilson: Ao parecer, essa reta [referindo-se a *a'*] se desenhou com um ângulo fixo [refere-se ao ângulo de 42,6º], e depois...
[55] João: E a partir dessa [referindo-se à reta *a'*], vocês desenharam a outra reta [refere-se a *a''*].

Nesse preciso momento, além de reconhecerem a existência da reta *a''* na construção, os alunos tomaram consciência do ângulo de rotação que Simão utilizou para executar a ação 1.2. De fato, a linha 54 mostra que os alunos reconhecem que a reta *a'* foi rotacionada com um ângulo fixo de 42,6º.

O reconhecimento da conceitualidade da rotação aplicada à reta *a''*

Após reconhecerem a existência da reta *a''* no desenho dinâmico, aquela que verdadeiramente foi obtida com um ângulo de rotação expressado como variável (α), desenvolveu-se um processo de significação da rotação aplicada a essa reta segundo a conceitualidade da qual é portadora a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*. Nesse processo, intervém unicamente João para o encerramento da atividade de comunicação da técnica. Neste sentido, ele procede do mesmo jeito que as vezes anteriores, tentando interpretar o que implicou realizar a ação 1.4

da técnica. Na sua interpretação João produz um discurso que, através da combinação de palavras, gestos e desenhos, refere-se tanto ao objeto a rotacionar quanto ao ângulo de rotação.

No que diz respeito ao objeto a rotacionar, enfatiza-se que este elemento corresponde a a' e não à reta a (linha 57). Quanto ao ângulo de rotação, interpreta-se o intervalo de valores que definem α, fazendo ênfases no valor máximo do controle deslizante. Após concluir que esse valor é o dobro do ângulo usado na ação 1.2 da técnica, João justifica essa afirmação retornando ao desenho em papel. Nesse momento, ele tenta mostrar o conjunto de posições possíveis da reta a'', de uma posição inicial (a ocupada por a' no desenho) até uma posição final (a ocupada pela reta que é simétrica a a'' com respeito ao eixo de simetria a), de acordo com o observado na tela do computador (linha 58).

> [57] João: E depois que ele [Simão] criou essa reta [referindo-se a a' (Imagem 12a)], a rotaciona. Mas não rotaciona a [reta] horizontal, rotaciona essa [indica a reta a' (Imagem 12b)]. E a rotaciona por um ângulo α que, eu imagino, terá uma medida máxima igual ao dobro do ângulo que tinha no começo [refere-se ao ângulo de 42,6º (Imagem 12c)].

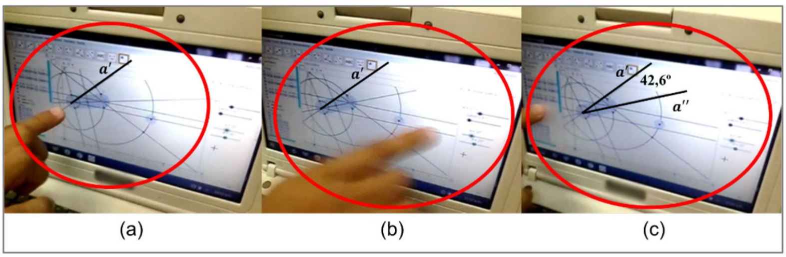


Imagem 12. Interpretação da ação 1.4 na tela do computador

> [58] João: Por que o dobro? Porque se esse mede 41º [indicando com o lápis o ângulo de 42,6º sobre o papel] e por aqui abaixo [refere-se ao espaço por debaixo da reta a] há mais 41º, [α] chegará até 82º. Imagino que você o fez assim [comentando-lhe a Simão].

Considerando os resultados apresentados, realizamos na seção a seguir uma discussão sobre esses e formulamos nossas conclusões da pesquisa.

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Nesta pesquisa apoiamo-nos na ideia da aprendizagem matemática que nos fornece a Teoria da Objetivação para dar conta dos processos de objetivação de certos saberes geométricos, mobilizados por dois alunos e um professor de matemática durante a comunicação de uma técnica de construção com o GeoGebra. Por meio de uma análise multisemiótica, identificamos quatro nós semióticos que fornecem informação sobre algumas características dos processos de objetivação do saber geométrico que acontecem em experiências de Elaboração de Simuladores com o GeoGebra. Esses aspectos dizem respeito à atividade semiótica desenvolvida, à atuação do professor durante o trabalho de comunicação e às dificuldades surgidas ao longo desse trabalho comunicativo.

A atividade semiótica desenvolvida

Os resultados apresentados nos nós semióticos põem de manifesto a variedade de signos (palavras, gestos, desenhos) e artefatos (lápis, papel, GeoGebra) presentes no trabalho de comunicação da técnica. No que diz respeito aos gestos e desenhos, encontramos que esses recursos tiveram uma função mediadora destacada nos processos de objetivação, uma vez que foram produzidos em sincronia com o discurso oral para revelar as conceitualidades geométricas implícitas nas ferramentas do GeoGebra usadas por Simão no desenvolvimento da sua técnica. Por exemplo, nos primeiros nós semióticos (1 e 2) observou-se o fato de os alunos tomarem consciência, de forma progressiva, da conceitualidade da rotação da qual é portadora a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*, para o qual foi necessário conectar a linguagem natural dos alunos, baseada em palavras e gestos, com meios semióticos mais sofisticados como o desenho em papel e o desenho dinâmico.

Para tal, foi necessário desenvolver uma atividade comunicativa multimodal em que intervêm a percepção, os gestos, as inscrições em desenhos e a linguagem natural (Radford, 2013b; Vergel, 2015), para conseguir que Simão e Edmilson reconhecessem tanto os elementos característicos de uma rotação no plano (objeto, centro e ângulo de rotação), quanto as diferenças no tipo de ângulo usado nas ações 1.2 e 1.4, mantendo assim o "equilíbrio" na comunicação das primeiras ações da técnica. Esse conjunto de signos e suas relações é um exemplo do que Arzarello (2006) denomina *pacote semiótico* (semiotic bundle).

No marco da atividade desenvolvida nos quatro nós semióticos, os gestos foram utilizados naturalmente pelos alunos e o professor para fazer referência (em conjunto com as palavras) aos objetos geométricos, destacando algumas das suas características espaciais ou para recriar os movimentos aplicados a esses objetos, embora não sempre de uma maneira adequada. Por exemplo, nas linhas 6 e 9, Edmilson usa de forma sincronizada as mãos e o lápis, como ferramentas que fazem parte do seu espaço pessoal, para fazer visível a rotação aplicada na ação 1.2 fora dos desenhos em papel e no software. Esse tipo de gestos usados para comunicar as ações 1.2 e 1.4 da técnica estão em correspondência com algumas das categorias de gestos teorizadas por McNeill (1992), especificamente com os gestos de tipo icónico e deíctico.

Particularmente, podemos concluir que a dimensão *icónica* do trabalho comunicativo esteve presente, já que para os alunos e o professor alguns gestos tinham parecido visual com as entidades que eles pretendiam evocar, como por exemplo, quando Edmilson indicava a direção da reta *a'* levantando sua mão com o lápis. Outra dimensão identificada é a *deíctica*, referida à forma em que os sujeitos indicam um objeto geométrico específico (ou algum dos seus aspectos característicos) representado no desenho em papel ou no software. Ambas as dimensões têm sido reportadas nos estudos de Gómez (2013) e Pantano (2014), embora com diferentes denominações. No caso de Gómez, o autor engloba-os em uma categoria chamada *signos cinestésicos*. Por sua parte, Pantano é mais específico ao referir-se a esses signos como *indicações com o dedo ou um lápis*.

Os desenhos também foram recorrentes no trabalho de comunicação, embora não tenham sido usados tão naturalmente pelos alunos como aconteceu com os gestos. Como consta nos quatro nós semióticos, o professor solicitava insistentemente aclarações aos alunos, colocando a atenção deles no desenho em papel, com o intuito de direcionar a discussão até a compreensão da teoria geometria mobilizada. O uso recorrente do desenho em papel (desenho geométrico) durante o trabalho de comunicação é um reflexo da maneira em que o professor evoca uma forma cultural sofisticada e evoluída de comunicar as ideias geométricas (Radford, 2011), em que o desenho geométrico é um meio de legitimação de uma técnica de construção.

Porém, tratando-se de um trabalho de construção realizado em um software dinâmico como o GeoGebra, o desenho em papel pode torna-se insuficiente para legitimar algumas ações da técnica aplicada. Mostra disso encontra-se nas linhas 27 até a 32, em que o professor decide passar do desenho em papel ao desenho no software para validar a rotação aplicada segundo o ângulo de rotação informado por Edmilson, fato que não era possível realizar no primeiro desenho. Assim, nossa pesquisa mostra como o professor se esforçou em ampliar o domínio de funcionamento do desenho geométrico, em relação à rotação, recorrendo ao software para mostrar os efeitos de ter decidido vincular o controle deslizante à rotação aplicada na ação 1.2 da técnica. O fato anterior corresponde-se com as aproximações teóricas de Laborde (1997), ao discutir as possibilidades que oferecem os desenhos dinâmicos no desenvolvimento do trabalho geométrico dos alunos.

A atuação do professor

Os resultados mostram que a atuação do professor durante o trabalho de comunicação teve uma implicação importante na aprendizagem produzida. Ao longo da atividade, ele sintoniza com os meios semióticos de Edmilson (palavras, gestos e desenhos) e os utiliza para fazer com que os alunos tomem consciência da ideia de rotação detrás da ferramenta. Neste sentido, o professor recorre aos desenhos em papel e no GeoGebra, coordenando-os com explicações verbais e gestos, para conseguir que Simão e Edmilson reconhecessem o objeto e o ângulo de rotação como elementos característicos da rotação enquanto objeto geométrico. O anterior pode ser observado em, pelo menos, duas situações evidenciadas nos resultados apresentados.

Por um lado, as linhas 20, 22, 28, 30 e 32 mostram a maneira em que João utiliza de forma coordenada palavras, gestos e os desenhos em papel e no software para questionar a Simão e Edmilson sobre como eles aplicaram a rotação da ação 1.2, em termos da conceitualidade dessa transformação geométrica da qual é portadora a ferramenta utilizada. Por outro lado, nas linhas 40, 41, 42, 47 e 48, o professor combina os desenhos em papel e no software e sintoniza com o uso que Edmilson deu à ferramenta *Exibir/Esconder Objetos* do GeoGebra para levar os alunos a reconhecerem tanto a existência da reta *a”* no desenho dinâmico quanto a verdadeira rotação (ação 1.4) à qual foi vinculada o ângulo definido pelo controle deslizante.

Dado que as formas de sintonizar com os meios semióticos de objetivação de Edmilson permitiram que este jovem e seu colega tivessem consciência da geometria posta em jogo, podemos concluir que a atuação de João enquanto professor é um reflexo do que Arzarello, Paola, Robutti y Sabena (2009) chamam de *jogos semióticos do professor*. O fato de o professor ter sintonizado com os meios semióticos do aluno não significa que suas ações didáticas estivessem condicionadas pelas vicissitudes do momento. Ao invés disso, o professor agiu de forma consciente ao longo do trabalho de comunicação, combinando os meios semióticos utilizados com claros propósitos pedagógicos. Este resultado dialoga com as pesquisas realizadas por Manghi (2010), no que diz respeito ao uso não consciente e sim intencionado dos meios semióticos por parte dos professores de matemática no desenvolvimento do seu trabalho.

Outro aspecto característico da atuação do professor durante o trabalho conjunto desenvolvido foi a sua reiterada insistência, sobretudo nos resultados dos primeiros nós semióticos, em fazer com que os alunos produzissem um discurso muito mais próximo à conceitualidade da rotação na ferramenta utilizada. Nesse sentido, as linhas 7, 20, 22 e 26 mostram os diferentes questionamentos realizados pelo professor para fazer emergir, no trabalho comunicativo, os elementos que foram considerados para aplicar a rotação da ação 1.2 da técnica. Essa insistência do professor em conseguir que o anterior se produzisse responde à *responsabilidade* e ao *compromisso*, em termos de Radford (2017b), que ele tinha com os alunos e com o próprio trabalho comunicativo.

As dificuldades surgidas no trabalho de comunicação

Apesar de os alunos conseguirem tomar consciência da ideia de rotação ao longo do trabalho de comunicação, podemos concluir que o reconhecimento da conceitualidade dessa transformação, da qual é portadora a ferramenta utilizada por Simão nas ações 1.2 e 1.4, foi um assunto problemático devido a duas dificuldades surgidas no decorrer da atividade. A primeira dificuldade diz respeito ao afastamento da forma de comunicar as ações da técnica por parte dos alunos em relação à forma em que o professor esperava que eles comunicassem. Quanto a isso, o professor buscava que os alunos comunicassem a aplicação da rotação em termos dos elementos solicitados pelo software (uma forma sofisticada de comunicação), fato que não aconteceu nos primeiros momentos da reunião na medida em que os alunos optaram por formas de comunicação mais intuitivas ou apoiadas na linguagem natural deles, como se evidencia nas linhas 6, 9 e 10 do primeiro nó semiótico.

A segunda dificuldade tem a ver com o tempo de separação entre o momento em que Simão produz a técnica de construção do círculo e o momento em que a comunica a João na reunião. O tempo decorrido levou a Simão a esquecer algumas das ações realizadas naquele momento, entre elas, especialmente a ação 1.4. Esse fato explica o porquê Edmilson vinculou o ângulo de rotação expressado como variável à ação 1.2 da técnica e não à 1.4, como verdadeiramente tinha acontecido. Diante disso, o professor recorreu ao desenho dinâmico para visualizar a rotação à que os alunos faziam referência (ação 1.2), observando que de fato foram rotacionadas duas retas, tal como se mostra nas linhas 27, 30, 51, 52 e 54.

Embora os resultados de esta pesquisa representem um avanço na compreensão da aprendizagem geométrica produzida em contextos de ESG, o fato de ter analisado o trabalho particular de comunicação de uma técnica não garante a compreensão aprofundada desse fenômeno. Portanto, consideramos necessário realizar outros estudos focalizados nos processos de objetivação que acontecem durante a ESG, de maneira a que os resultados obtidos possam fornecer contribuições no que diz respeito ao desenvolvimento de habilidades para a gestão de situações de ESG.

REFERÊNCIAS

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 267-299. http://www.clame.org.mx/relime.htm

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. y Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, Netherlands, *70*(2), 97-109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Bartolini-Bussi, M. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. In: Furinghetti, F. (Org.). *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1-16). PME.

Bishop, A. y Pompeu, G. (1991). Influences of an ethnomathematical approach on teacher attitudes to mathematics education. In: Furinghetti, F. (Org.). *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 136-143). PME.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P. L., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., ... Scali, E. (1995). Aspects of the mathematics-culture relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school. In: *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 151-166). PME.

Bogdan, R. y Biklen, S. K. (2007). *Qualitative Research for Education. An Introduction to Theory and Methods.* 5. ed. Pearson.

Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones de secuencias figúrales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo,* (Tesis Doctoral) Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/186

Gutiérrez, R. E., Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática*, *29*(2), 37-68. http://dx.doi.org/10.24844/EM2902.02

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. y Lavicza, Z. (2009). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: the case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *28*(2), 135-146.

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. In: Puig, L. (Org.). *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática*, (pp. 33-48). Una Empresa Docente e Grupo Editorial Iberoamérica.

Lerman, S. (1992). The function of language in radical constructivism: A Vygotskian perspective. In: Geeslin, W.; Graham, K. (Orgs.). *Proceedings of 16th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 40-47). New Hampshire, United States: PME.

Manghi Haquin, D. (2010). Recursos semióticos del profesor de matemática: funciones complementarias del habla y los gestos para la alfabetización científica escolar. *Estudios pedagógicos*, *36*(2), 99-115. https://doi.org/10.4067/S0718-07052010000200006

McNeill, D. (1992). *Hand and mind*: What gestures reveal about thought. Chicago: University of Chicago Press.

Pantano, O. (2014). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales.* (Trabajo para optar al grado de Magister). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Piedra, R. (2018). El papel del trabajo en el desarrollo del pensamiento humano. *HYBRIS*, *9*(2), 173-206. http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.1578164

Powell, A. B. y Silva, W. (2015). O vídeo na pesquisa qualitativa em educação matemática: investigando pensamentos matemáticos de alunos. In: Powell, A. B. (Org.). *Métodos de pesquisa em educação matemática usando escrita, vídeo e internet* (pp. 15-60). Campinas, SP: Mercado de Letras.

Prieto, J. L. y Díaz-Urdaneta, S. (2019). Un itinerario de investigación alrededor de la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(1), 668-674.

Prieto, J. L. y Gutiérrez, R. E. (2017). (Comps.). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia.* Maracaibo: Aprender en Red.

Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2019). Saberes necesarios para la gestión del trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Bolema*, *33*(65), 1276-1304. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a15.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(Extraordinario 1), 103–129. http://www.clame.org.mx/relime.htm

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In: Ubuz, B. (Org.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turkey: PME.

Radford, L. (2013a). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2(*1), 7-44. http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19

Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. In: Rico, L.; Cañadas, M. C.; Gutiérrez, J.; Molina, M. y Segovia, I. (Orgs.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. En homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Editorial Comares.

Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(3), 405-422. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9527-x

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18), 547-567.

Radford, L. (2017a). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. In: D'amore, B.; Radford, L. (Orgs.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*: problemas semióticos, epistemológicos y culturales (pp. 115-136). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2017b). Ser, subjetividad y alienación. In: D'amore, B.; Radford, L. (Orgs.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*: problemas semióticos, epistemológicos y culturales (pp. 139-165). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (Diciembre, 2018a). Ética comunitaria de la Teoría de la Objetivación. Conferencia presentada en el Seminario Discusiones sobre Teorías Socioculturales y Éticas presentes en la práctica de los docentes de matemáticas de la Universidad Católica Silva Henríquez, Santiago de Chile, Chile.
<https://www.youtube.com/watch?v=Age-EmXa_LI>.

Radford, L. (2018b). Questões em torno da Teoria da Objetivação. *Obutchénie. Revista de Didática e Psicologia Pedagógica*, *2*(1), 230-251. https://doi.org/10.14393/OBv2n1a2018-12

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. y Cerulli, M. (2003). Calculators, graphs, gestures and the production of meaning. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27 Conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME27–PMENA25) (pp. 55-62). University of Hawaii.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 91-95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y

Sabena, C., Robutti, O., Ferrara, F. y Arzarello, F. (2012). The development of a semiotic frame to analyse teaching and learning processes: Examples in preand post-algebraic contexts. En Coulange, L.; Drouhard, J. P.; Dorier, J. L. y Robert, A. (Orgs.). Recherches en *Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 231-245). La Pensée Sauvage.

Sáenz-Ludlow, A. y Athanasopoulou, A. (2008). The Gsp As A Technical-Symbol Tool. In: Radford, L.; Schubring, G.; Seeger, F. (Orgs.). *Semiotics in mathematics education*: epistemology, history, classroom, and culture (pp. 195-204). Sense Publishers.

Sánchez, I. y Prieto J. L. (2017). Características de las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Números, Revista de Didácticas de las Matemáticas*, (96), 97-101.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *9*(3), 193-215. http://digibug.ugr.es/handle/10481/34991

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Madrid: Paidós.

IRENE V. SÁNCHEZ NOROÑO

Dirección: Facultad de Ciencias Humanas de la Universidad Arturo Prat (UNAP), Chile. Av. Arturo Prat, 2120. CP: 1100000 (Iquique, Chile).

 DOI: 10.24844/EM3201.06

¿Cómo nos va en Matemáticas?: La calidad de la influencia de pares y la predisposición personal hacia el aprendizaje en un contexto de segmentación socioeducativa

How are we doing in Mathematics?: The quality of the influence of peers and personal predisposition towards learning in a context of socio-educational segmentation

Carlos René Rodríguez Garcés[1]
Geraldo Bladimir Padilla Fuentes[2]

Resumen: Este trabajo analiza los resultados de la prueba SIMCE Matemáticas 2014 aplicada a los 2° años de Enseñanza Media en Chile mediante modelos de Regresión Lineal Múltiple, poniendo énfasis en variables estructurales, intermedias e individuales. Se reportan Correlaciones Pearson, Parciales y Semi-parciales, dando cuenta de la interacción entre el puntaje de los estudiantes (PJE) y variables como el perfil actitudinal favorable hacia las Matemáticas (PREDISP) y la calidad educativa del efecto pares (INSUF). Los análisis de RLM informan relaciones significativas entre todas las variables del modelo y el puntaje, principalmente los aportes de INSUF y PREDISP a la variabilidad explicada, persistentes aun controlando la interacción por el resto de predictores. Al segmentar los resultados por sexo, se evidencia que la feminización del curso beneficia levemente el rendimiento de los varones en el grupo. Se concluye que en el rendimiento de este tipo de pruebas interviene habilidad y predisposición hacia el aprendizaje, las cuales se potencian o limitan en virtud de la calidad educativa de la influencia de pares y composición social que tenga el alumnado.

Fecha de recepción: 21 de diciembre de 2018. **Fecha de aceptación:** 23 de septiembre de 2019.

[1] Universidad del Bio-Bio, Centro de Investigación CIDCIE. carlosro@ubiobio.cl, orcid.org/0000-0002-9346-0780
[2] Universidad del Bio-Bio, Centro de Investigación CIDCIE. gpadilla@ubiobio.cl, orcid.org/0000-0003-0882-1818

Palabras claves: *Rendimiento escolar, SIMCE, calidad en la educación, Predisposición al aprendizaje.*

Abstract: This paper analyzes the results of the 2014 SIMCE Mathematics test applied to the 2nd year of secondary education in Chile using Multiple Linear Regression models, emphasizing structural, intermediate and individual variables. Partial and Semi-partial Pearson correlations are reported, informing the interaction between the students' scores (PJE) and variables such as the favorable attitudinal profile towards Mathematics (PREDISP) and the educational quality of the peer effect (INSUF). The RLM analyzes report significant relationships between all the variables of the model and the score, mainly the contributions of INSUF and PREDISP to the variability explained, persistent even controlling the interaction by the rest of the predictors. When segmenting the results by sex, it is evident that the feminization of the course slightly benefits the performance of the males in the group. It is concluded that the performance of this type of tests intervenes skill and predisposition towards learning, which are strengthened or limited by virtue of the educational quality of the influence of peers and social composition that students have.

Keywords: *School performance, SIMCE, quality education, predisposition to learning.*

INTRODUCCIÓN

Entablar debates sobre educación es siempre una tarea sujeta a complejidades y matices. La diversidad de contenidos, problemáticas y perspectivas que de ella se desprenden solo es superada por la naturaleza de los fenómenos que contiene. En el sistema educativo chileno pese al significativo esfuerzo por superar los problemas de inclusión y deserción temprana, persisten históricas dificultades para erradicar la segmentación y segregación escolar, problemáticas que discurren con otros fenómenos emergentes. La escuela evidencia segmentadas capacidades para instalar habilidades escolares, entendidas como dominio curricular expresado en una calificación, así como debilidades en la generación de competencias sociales para el desarrollo personal y social de sus estudiantes.

El rendimiento académico, componente sustancial del mecanismo evaluativo del sistema escolar, es un constructo complejo que no es solo expresión de la aptitud, motivación y dedicación del estudiante para con su aprendizaje, sino también de las capacidades pedagógicas y disciplinares del profesorado, la gestión educativa institucional y características del entorno escolar y familiar. Variables individuales, intermedias y estructurales que en su interacción generan un sistema heterogéneo de condicionamientos multicausales (Erazo, 2012; Huy, Casillas, Robbins y Langluy; 2005; Gómez, Oviedo y Martínez, 2011). Usualmente el rendimiento del estudiante es evaluado a través de métodos cuantitativos y, por medio de una puntuación o nota procura reflejar con cierto rigor métrico el nivel de dominio que tiene sobre los contenidos del currículum escolar vigente (Beguet *et al.*, 2001), y en términos agrupados, es reflejo también de la calidad de los procesos educativos.

A nivel individual, el rendimiento académico estaría íntimamente relacionado con las habilidades y conocimientos previos del estudiante, reconociéndose el esfuerzo como factor, más no como un determinante (Jano y Ortiz, 2003). Existe además la controvertida creencia, sostenida en los resultados de algunas pruebas estandarizadas, que vincula a los hombres con un mejor rendimiento en los subsectores curriculares asociados con la lógica y el razonamiento, siendo percibidos con un perfil más matemático que sus pares mujeres, a quienes se relaciona con habilidades lingüísticas y socioafectivas (Inglés, Díaz, García, Ruiz, Delgados y Martínez, 2012; Madrid, 2006; Echavarri, Godoy y Olaz, 2007; Treviño, Valdés, Castro, Costilla, Pardo y Donoso, 2010).

Desde una perspectiva tradicional son la capacidad intelectual y la aptitud las variables cognitivas más relevantes, aun cuando hay quienes han demostrado que éstas explicarían tan solo 10% del rendimiento escolar (Lozano, González, Núñez, Lozano y Álvarez, 2001). Estudios recientes otorgan preponderancia en este ámbito a componentes motivacionales, de predisposición actitudinal, estrategias de autorregulación y persistencia en la tarea. El perfil actitudinal del estudiante con base a representaciones de seguridad, confianza, capacidad percibida para la resolución de problemas, tolerancia a la frustración, predisponen a determinados niveles de logro (Erazo, 2012). Por ejemplo, la motivación crece como factor explicativo del rendimiento de los estudiantes, influyendo no solo en la adquisición de conocimientos circunscritos al currículum, sino en su predisposición hacia el aprendizaje voluntario de contenidos adicionales y de calidad (Camacho y Del Campo, 2013), actitud orientada al éxito y atribución de logros al esfuerzo propio (Boza y Toscano, 2012), activación de estrategias cognitivas y de autorregulación (Cerezo y Casanova, 2004), mejoramiento de las relaciones psicosociales y de satisfacción en el aula (Paiva y Saavedra, 2014), reducción del temor al fracaso y entropía del curso (Barca, Almeida, Porto, Peralbo y Brenlla, 2012); en síntesis, relevan la importancia del desarrollo de una visión positiva hacia el estudio (Orellana y Segovia, 2015).

Aun siendo consistente y válido, en tanto reflejo de un determinado aprendizaje o logro de objetivos curriculares preestablecidos, el rendimiento escolar no es producto de una única capacidad exhibida, inherentemente atribuida al sujeto, sino resultado sintético de un conjunto de factores que actúan en y desde la persona que aprende (Pita y Corengia, 2005). Respecto de variables estructurales o intermedias, el rendimiento se ve influenciado por condiciones de tipo escolar e infraestructura institucional (aulas, equipamiento, herramientas educativas) que delimitan un control de clima escolar, liderazgo institucional y regulación de comportamientos que tributan a su mejoramiento (Erazo, 2012). Si aceptamos esta diversidad de variables, transitamos desde la medición estrictamente unidimensional y objetiva hacia un enfoque multidimensional que contempla en la discusión factores personales y sociales o de contexto que influyen en el rendimiento de los estudiantes. Elementos como el estilo de aprender, la capacidad intelectual, las estrategias de estudio, condición económica, escolaridad de los padres y/o el entorno social (Alonso, Gallego y Honey, 1999), tienen un efecto intermediario entre la cognición y sus indicadores objetivos (Omar, Urteaga, Delgado y Formiga, 2010).

Bajo los anteriores supuestos, las variables de aula configuran parte del rendimiento que exhibe el estudiante en diversos subsectores de aprendizaje, permitiendo a nivel agregado identificar diferencias en los resultados de pruebas estandarizadas que éstas no pueden explicar a nivel individual. Por ejemplo, el trabajo pedagógico con grupos pequeños beneficiaría el rendimiento escolar, tal y como exponen en su estudio Montero, Villalobos y Valverde (2007), mientras el buen rendimiento generalmente exhibido en grupos grandes sería un efecto enmascarado, con varios preceptos pedagógicos en contra.

Por otra parte, la presencia femenina tributaría a mejorar las calificaciones a nivel individual y del grupo curso. A medida que la mixturización de género en el curso alcanza proporciones óptimas mejoran las condiciones para el aprendizaje en el aula y el tipo de socialización a través de la instalación de procesos de coeducación entre hombres y mujeres (Villalobos, Wyman, Schiele y Godoy, 2016). La orientación hacia las metas de aprendizaje significativo que mostrarían las mujeres, a diferencias de las de refuerzo social que persiguen los varones (Inglés y cols, 2012), su capacidad en la resolución de conflictos mediante el diálogo por sobre el uso de la violencia física (Tijmes, 2012) y el mayor interés, actitud y habilidades sociales para estudiar que demuestran en comparación a los hombres (Echavarri, Godoy y Olaz, 2007; Cano, 2000), hace de la feminización del espacio educativo un factor relevante en la instalación de competencias cognitivas y habilidades sociales en el aula.

La calidad del clima de aula repercute en los niveles de apropiación, profundidad y cobertura del currículum. Espacios de convivencia deteriorada por la falta de disciplina y respeto entre pares, o escasa preocupación y retroalimentación docente, inhiben la efectividad de la acción pedagógica generando un desgaste profesional. Situación relevante, toda vez que el rendimiento escolar variará según los métodos y materiales didácticos utilizados, la motivación de los estudiantes y el tiempo dedicado por los profesores a la preparación de sus clases (Durón y Oropeza, 1999; Valenzuela, 2007).

Todos estos factores, presentes *ab origene* pero de interés contemporáneo, han ampliado el campo de conocimiento acerca del rendimiento escolar. Su asociación con perfiles actitudinales favorables, feminización de los grupos, percepción del clima del aula y calidad educativa de la influencia de pares, es significativa. En la medida que el aprendizaje se suscita en un contexto relacional y no condicionado únicamente por factores individuales del estudiante ni competencias disciplinares y pedagógicas del propio docente, el abordaje de las condiciones y composición de aula aporta precisión y profundidad a los análisis sobre aprovechamiento educativo, cuyos hallazgos brindan la posibilidad de orientar propuestas concretas de intervención pedagógica en estas áreas no tradicionales del aprendizaje.

En concordancia con lo descrito, este trabajo tiene como objetivo analizar el comportamiento del rendimiento en las pruebas SIMCE Matemáticas aplicada a estudiantes de Segundo Año de Enseñanza Media en el año 2014. Mediante modelos de Regresión Lineal Múltiple, se busca establecer la capacidad predictiva que tienen sobre el rendimiento en SIMCE Matemáticas (PJE) las variables independientes: Predisposición actitudinal hacia el aprendizaje de las matemáticas (PREDISP); Percepción del clima de aula (CLIMA); Mixturización de género del curso (FEM); Calidad educativa de la influencia de pares (INSUF); y Composición socioeconómica del alumnado (GSE).

METODOLOGÍA

Muestra

La muestra está constituida por 241.730 estudiantes distribuidos en un total de 7.133 cursos correspondientes a Segundo año de Enseñanza Media, los cuales participaron en Chile del proceso de medición SIMCE 2014. Las unidades educativas fueron seleccionadas automáticamente mediante la identificación del estudiante que cursa educación secundaria, por lo cual están exentas solamente aquellas que ofrecen exclusivamente primaria.

Es un grupo homogéneamente distribuido por sexo (50,2% son mujeres), con una preponderante presencia de residentes urbanos (96,7%). En su mayor parte asisten a establecimientos de administración Particular Subvencionada (57,9%) y son de nivel socioeconómico Bajo y Medio Bajo (55,8%), conforman grupos de tamaño heterogéneo con una media de 35.7 alumnos por curso, donde cerca de un tercio registra más de 40 integrantes (28,6%). En las pruebas SIMCE Matemáticas solo 23.7% de los estudiantes registra un nivel de logro adecuado, esto es, exhibe una apropiación pertinente de los contenidos del curriculum vigente, con lo cual puede resolver gran cantidad de ejercicios directamente, seleccionando y organizando información. Por otra parte, un significativo 43.5% no supera los 252 puntos SIMCE, situándose en un nivel de logro insuficiente, por lo que escasamente cuentan con los aprendizajes elementales sobre conceptos y procedimientos del razonamiento matemático para el año académico en que se encuentran.

Tabla 1: *Caracterización de la muestra de estudio*

	Estudiantes
Sexo:	
- Hombre	49,8
- Mujer	50,2
Dependencia	
- Municipal	33,8
- Part. Subvencionado	57,9
- Part. Pagado	8,3
GSE	
- Bajo/Medio Bajo	55,8
- Medio	23,5
- Medio Alto/Alto	21,7
Nivel de logro SIMCE Mat	
- Insuficiente	43,5
- Elemental	32,8
- Adecuado	23,7

Fuente: SIMCE 2014.

INSTRUMENTO

El sistema de la Medición de la Calidad de la Educación en Chile está conformado por una batería de pruebas estandarizadas para cada uno de los subsectores del curriculum. Adicionalmente, se reúne información aportada por los miembros de la comunidad educativa (profesores, estudiantes y apoderados) respecto de distintos tópicos vinculados directa o indirectamente al proceso de aprendizaje mediante la cumplimentación de cuestionarios de contexto.

Para efectos de esta investigación se hace uso explícitamente de los resultados de la Prueba SIMCE Matemáticas correspondientes a Segundo año de Enseñanza Media o Secundaria del proceso de medición 2014. Datos de puntaje y nivel de logro alcanzado en la Prueba SIMCE Matemáticas que es complementada con información extraída de los cuestionarios de contexto contestados por los propios estudiantes. De estos instrumentos se agregan las variables/índices Predisposición favorable hacia las matemáticas (PREDISP) y Percepción del clima de aula en que acontece el aprendizaje (CLIMA). A un nivel más agregado, considerando como unidad de análisis atributos del grupo curso o colegio, se incorporan las variables de capital cultural y socioeconómico de los alumnos que preferentemente atiende el establecimiento (GSE), la mixturización de género expresada en la proporción de mujeres que integran el grupo curso (FEM) y la calidad de la exposición de pares con base al rendimiento que obtiene la unidad educativa en SIMCE Matemáticas (INSUF).

VARIABLES

	Descripción
Puntaje Matemáticas estudiante	Nivel de logro exhibido en el dominio del currículum expresado en puntaje SIMCE. Tiene un recorrido continuo entre 150 y 400 puntos (variable dependiente o de respuesta).
Género	Sexo del estudiante (0= hombre; 1= mujer).
GSE (GSE)	Variable ordinal expresada en 5 niveles de medición que hace referencia al grupo o categoría en que se sitúa el establecimiento en razón de la configuración socioeconómica del estudiantado que atiende (0= Bajo; 1= Medio Bajo; 2= Medio; 3= Medio Alto; 4= Alto).
Mixturización de género (FEM)	Índice que da cuenta de la presencia femenina dentro de los grupos curso. Variable categorizada con base a la proporción de mujeres existentes en el curso (Escasa= <,30; Moderada= entre ,31 y ,65; Alta= >,65).
Clima de aula (CLIMA)	Percepción de los estudiantes en torno al respeto a las normas de convivencia, organización y seguridad del espacio que comparten, reportada a través de los cuestionarios de contexto. Índice que se construye a partir de la composición aditiva de 11 ítems de respuesta graduada en 4 niveles (mínimo=11/máximo=44). Variable continua tipificada y categorizada en 3 niveles (Deficiente= $<-1\ \sigma$; Regular= entre $-1\ \sigma$ y $1\ \sigma$; Buena= $>1\ \sigma$).
Predisposición favorable hacia las Matemáticas (PREDISP)	Predisposición actitudinal del estudiante en torno a sus gustos y preferencias en el enfrentamiento curricular de las Matemáticas. Índice que se construye desde los reportes de los cuestionarios de contexto a partir de la composición aditiva de 4 ítems de respuesta graduada en 5 niveles (mínimo=5/máximo=20), tipificada t categorizada en 3 niveles (Baja= $<-1\ \sigma$; Media= entre $-1\ \sigma$ y $1\ \sigma$; Alta= $>1\ \sigma$). Variable continua tipificada y categorizada en 3 niveles (Baja= $<-1\ \sigma$; Media= entre $-1\ \sigma$ y $1\ \sigma$; Alta= $>1\ \sigma$).
Nivel de rendimiento insuficiente (INSUF)	Proporción de estudiantes por curso que exhiben puntajes deficientes en SIMCE Matemáticas, siendo expresión de la calidad de la influencia de pares sobre el estudiante. Transita entre 0 y 1, mientras más cercano a 1 peor es la calidad educativa del grupo. Para efectos de representación esta variable también se categoriza con base a las proporciones (Baja= <30; Medio= entre 30 y 65; Alta= >65).

PROCEDIMIENTO

Luego de un análisis exploratorio de las Bases de Datos (*Resultados SIMCE Matemáticas 2° Medio 2014* y *Cuestionarios de contexto estudiantes 2° Medio SIMCE 2014*), en que se controlan valores anómalos y datos perdidos, se procede a elaborar índices y colapsar variables. En específico, a nivel de curso se estructuraron índices de mixturización de género (FEM) y proporciones de estudiantes con rendimiento insuficiente (INSUF). A nivel de estudiante, se generaron los índices mediante la acción aditiva de un conjunto de ítems referentes a la percepción del clima de aula (CLIMA) y perfil actitudinal que tienen hacia las matemáticas (PREDISP). Nuevas variables que, junto a la conformación socioeconómica del estudiantado de la unidad educativa (GSE), fueron transferidas desde los cuestionarios de contexto hacia la base de trabajo utilizando como semilla el folio del estudiante (IDALUMNO) y el código del curso (COD_CURSO).

Atendiendo a las características del espacio bivariante, se analizan las medias de los puntajes de los estudiantes a nivel general, distinguiendo por sexo, controlando según atributos individuales y estructurales del grupo curso. En estos contrastes de hipótesis se aplicaron los test estadísticos t de Student para muestras independientes (t_{ind}). Adicionalmente se elabora una matriz de correlaciones (r_{xy}) expresión de la asociación y variación entre pares de índices, se construyen gráficos de linealidad a fin de resguardar el cumplimiento de los requisitos para los análisis de Regresión lineal Múltiple (RLM) posteriores.

En términos generales interesa mostrar el efecto que el aumento en unidades de *FEM, INSUF, PREDISP, CLIMA y GSE* tiene sobre PJE (variable de respuesta), y que en su conjunto entregan un porcentaje de variabilidad explicada por el modelo respecto del fenómeno de estudio (Modelo General). Reconociendo que la expresión estadística de estos predictores pudiese tener un comportamiento diferenciado con base a atributos no contemplados por el modelo, es que se decidió replicar la RLM segmentando también por sexo del estudiante, a fin de evidenciar posibles diferencias significativas en los puntajes según la naturaleza de la variable de control.

Se aplican modelos RLM, paso a paso, procurando discriminar respecto de la aportación que tiene el regresor en la capacidad predictiva del modelo. Si bien los sucesivos modelos relevan la importancia de las variables explicativas INSUF y PREDISP muy por sobre los otros predictores (FEM, GSE y CLIMA), se tomó la decisión metodológica de incorporarlos igualmente en el análisis (Modelo General). Esto en atención a su preponderancia teórica, sea como estructurante del

Sistema Escolar chileno, como lo es la composición socioeconómica del alumnado (GSE) o configuradora de las condiciones en que se suscita el aprendizaje (CLIMA y FEM). No obstante, con base al principio de parsimonia y bajo aporte predictivo de las variables CLIMA, FEM y GSE, se opta por estructurar un segundo modelo de RLM (Modelo Reducido), contemplando solo los predictores de mayor variabilidad explicada (PJE~INSUF+PREDISP).

Complementariamente se exhiben correlaciones Parciales y Semi-parciales para determinar las contribuciones que hacen los predictores a la variable PJE, junto con explorarse la bondad de ajuste del modelo en razón de los criterios de error estándar, ANOVA y coeficientes de determinación general/ajustado.

RESULTADOS

En la tabla 2 muestra los rendimientos promedio en SIMCE Matemáticas de los estudiantes en general y por sexo según atributos personales y de su grupo curso. El puntaje promedio que registran en esta prueba es de 264,6 puntos (±67,7), con una diferencia estadísticamente significativa a favor de los varones [t_{ind}=15,021; gl=181.850; p<0,01], aunque pequeña al momento de estimar el tamaño del efecto [*Cohen's d*= ,0709981; TE= ,0354767].

De acuerdo al perfil del estudiante se observan mejoras significativas en el nivel de logro exhibido en la prueba SIMCE Matemática en razón de una más favorable predisposición que se tenga con y para el aprendizaje de los contenidos de este subsector [PREDISP; F=13324,5; gl=2; p<0,01], y la mejor percepción que se tenga del clima del aula [CLIMA; F=828,48; gl=2; p<0,01]. En términos agregados, los rendimientos mejoran conforme aumenta el capital cultural o nivel socioeconómico del establecimiento [GSE; F=19168,02; gl=4; p<0,01]; existe una menor proporción de estudiantes al interior del curso que presentan un nivel insuficiente de rendimiento en Matemáticas, como expresión de las condiciones de educabilidad o calidad de la influencia de pares [INSUF; F=52197,8; gl=2; p<0,01]; y la presencia de mujeres se vuelve predominante [FEM; F=9486; gl=2; p<0,01].

Tabla 2: Puntajes SIMCE Matemáticas estudiantes Segundo Año Medio

	Hombre	Mujer	Total
Variables (%)	x (d.s)	x (d.s)	x (d.s)
Actitud Matemáticas (PREDISP)[1]			
- Deficiente (19,1)	235,6 (61,2)	238,9 (58,6)	237,6 (59,6)
- Regular (62,8)	260,7 (63,9)	269,1 (63,8)	260,5 (63,9)
- Buena (18,1)	316,3 (62,1)	314,3 (59,8)	315,5 (61,1)
Clima de aula (CLIMA)[2]			
- Deficiente (14,1)	251,9 (69,1)	248,2 (65,9)	250,1 (67,6)
- Regular (72,0)	271,0 (68,0)	265,5 (66,2)	268,2 (67,2)
- Buena (13,9)	274,3 (67,1)	271,1 (65,3)	272,6 (66,1)
Nivel Socioeconómico Establecimiento (GSE)[3]			
- Bajo (21,9)	220,2 (52,6)	213,9 (51,0)	217,2 (51,9)
- Medio Bajo (33,9)	245,9 (60,2)	239,1 (57,9)	242,6 (59,2)
- Medio (23,5)	284, 9 (60,3)	278,3 (58,4)	281,5 (59,4)
- Medio Alto (12,1)	312,9 (56,7)	303,6 (54,7)	308,0 (55,9)
- Alto (8,6)	336,7 (52,8)	331,1 (49,3)	333,9 (51,2)
Nivel insuficiencia Matemáticas (INSUF)[4]			
- Alta (52,3)	220,7 (51,4)	215,4 (49,3)	218,1 (50,4)
- Media (24,2)	273,5 (53,7)	265,6 (52,6)	269,5 (53,3)
- Baja (23,5)	318,3 (49,2)	310,3 (47,6)	314,1 (48,5)
Mixturización de género (FEM)[5]			
- Escasa (10,4)	240,5 (61,6)	247, 9 (65,6)	242,2 (62,6)
- Moderada (73,1)	268,0 (68,7)	261,1 (66,6)	264,5 (67,7)
- Alta (16,6)	272,4 (65,7)	267,4 (66,3)	268.2 (66,3)
General	267,0 (68,6)	262,2 (66,6)	264,6 (67,7)

[1] variable continua tipificada y categorizada en 3 niveles (Baja= <-1 σ; Media= entre -1 σ y 1 σ; Alta= >1 σ).

[2] variable continua tipificada y categorizada en 3 niveles (Deficiente= <-1 σ; Regular= entre -1 σ y 1 σ; Buena= >1 σ).

[3] variable ordinalizada en 5 categorías construida como índice compuesto por la escolaridad e ingresos de los apoderados del establecimiento y el Índice de Vulnerabilidad de los estudiantes definido por JUNAEB.

[4] variable categorizada con base a las proporciones de estudiantes con bajo rendimiento en Matemáticas en el curso (Baja= <,30; Medio= entre ,30 y ,65; Alta= >,65).

[5] variable categorizada con base a la proporción de mujeres existentes en el curso (Escasa= <,30; Moderada= entre ,31 y ,65; Alta= >,65).

Fuente: SIMCE 2014. Elab. Propia.

La matriz de correlaciones del Tabla 3 evidencia relaciones intensas y significativas de la variable respuesta (PJE) con cada una de las independientes, particularmente elevadas con INSUF [R_{y3}= -,663; P<0,001], GSE [R_{y2}=,542; P<0,001] y PREDISP [R_{y4}=,403; P<0,001]. Menos relevante pero igualmente significativos son los coeficientes de correlación para las variables FEM [R_{y1}=,121; P<0,001] y CLIMA [R_{y5}=,102; P<0,001].

Tabla 3: Matriz de Correlaciones

	PJE	FEM	GSE	INSUF	PREDISP
FEM1	,121**				
GSE2	,542**	,124**			
INSUF3	-,663**	-,165**	-,677**		
PREDISP4	,403**	-,020**	,062**	-,075**	
CLIMA5	,102**	,056**	-,017**	-,109**	,204**

Fuente: SIMCE 2014. Elab. Propia.

Por otra parte, se observan bajas correlaciones entre las variables independientes utilizadas en el modelo, reduciendo los problemas de sobreestimación por multicolinealidad. La excepción la constituye GSE, variable que en su relación con el rendimiento escolar del curso en matemáticas (INSUF) exhibe un coeficiente de correlación elevado [R_{y3}= -,677; P<0,001]. Cabe hacer presente aquí que dados los procesos de segmentación socioeducativa del sistema escolar chileno con base al capital cultural y económico familiar, la variable GSE es un componente estructural del rendimiento académico, por lo que se opta mantenerla en el modelo no obstante el comportamiento descrito.

Aplicada Regresión Lineal Múltiple con las variables antes señaladas (Tabla 4), se obtiene un modelo predictor (Modelo General) del rendimiento académico [F= 3,759e+04; gl= 5 y 145702; p-value<0,01], lo que permite aceptar en consecuencia la existencia de un efecto real y significativo de las variables predichas sobre el rendimiento en SIMCE Matemáticas. En términos estadísticos el Modelo General evidencia una alta capacidad predictiva, con una variabilidad explicada del 56% (Múltiple R-squared= 0.5633), la cual no evidencia cambios significativos al ajustarse por tamaño muestral (Adjusted R-squared= 0.5633). Estos resultados dan cuenta de la pertinencia e importancia de las variables INSUF [t=-248,613;

p-value<0,01], PREDISP [t=205,127; p-value<0,01], FEM [t=9,661; p-value<0,01], GSE [t=23,326; p-value<0,01] y CLIMA [t=-23,281; p-value<0,01] al momento de estimar las variaciones en los puntajes que los estudiantes pueden obtener en SIMCE Matemáticas.

Cabe hacer presente que la incorporación paso a paso de variables explicativas mejora, como es lógico, la variabilidad explicada del modelo, aunque de forma menos relevante al incorporar GSE, CLIMA y FEM. De hecho, tan solo el aporte que hacen INSUF y PREDISP alcanza el 56,1% en tanto R ajustado o de la variabilidad explicada (Modelo Reducido). Si bien la mejora producida en la estimación por parte del resto de variables es escasa, buscando un equilibrio entre la parsimonia y la inclusión de variables teóricamente importantes, se decide incluirlas igualmente en uno de los modelos.

En consecuencia, la ecuación que configura el rendimiento en nuestro Modelo General viene definida por:

$$PJE = 245.043 + 5.513(FEM) + 3.220(GSE) - 129.714(INSUF) + 6.523(PREDISP) - 0.535(CLIMA)$$

Mientras en el modelo reducido:

$$PJE = 242.369 - 137.927(INSUF) + 6.328(PREDISP)$$

Según el Modelo General, conforme aumenta la feminización (FEM) el rendimiento del curso mejora (+5,5 puntos). Similar comportamiento se observa al analizar el perfil actitudinal favorable hacia las matemáticas (PREDISP; +6,523 puntos) y la mejor condición socioeconómica del establecimiento al que pertenece el estudiante (GSE; +3,220 puntos). A su vez, incidiría negativamente en el rendimiento escolar del estudiante el deficiente nivel de logro exhibido por su grupo curso en este subsector curricular (INSUF; -129,714 puntos).

Tabla 4: Modelo regresión para rendimiento SIMCE Matemáticas

	Modelo General			Modelo Reducido		
	Estimate [coef.std]	Std. Error [coef.std]	T value [Pr(>|t|)]	Estimate [coef.std]	Std. Error	T value [Pr(>|t|)]
(Intercept)	245.043 [-.159]	.970	252.714 [***]	242.369 [-.167]	.451	537.9 [***]
FEM	5.513 [.016]	.571	9.661 [***]	-	-	-
GSE	3.220 [.057]	.138	23.326 [***]	-	-	-
INSUF	-129.714 [-.582]	.522	-248.613 [***]	-137.927 [-.618]	.368	374.6 [***]
PREDISP	6.523 [-.349]	.032	205.127 [***]	6.328 [.338]	.031	207.4 [***]
CLIMA	-0.535 [-.039]	.023	-23.281 [***]	-	-	-

Signif. codes: 0. '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1.

Modelo General: Residual standard error: 42.53 on 145702 degrees of freedom (96022 observations deleted due to missingness). Multiple R-squared: 0.5633, Adjusted R-squared: 0.5633. F-statistic: 3.759e+04 on 5 and 145702 DF, p-value: < 2.2e-16

Modelo Reducido: Residual standard error: 42.76 on 153537 degrees of freedom (88190 observations deleted due to missingness). Multiple R-squared: 0.5612, Adjusted R-squared: 0.5612. F-statistic: 9.817e+04 on 2 and 153537 DF, p-value: < 2.2e-16

Nota: coef.std= coeficientes estandarizados de los regresores.

Fuente: SIMCE 2014. Elab. Propia.

Por otra parte, el Modelo Reducido que contempla solo las variables más relevantes (INSUF y PREDISP) muestra coeficientes de valor diferenciado pero de igual orientación al Modelo General, aunque estas diferencias se hacen irrelevantes al momento de estandarizar los coeficientes. En efecto, mientras en el Modelo General el coeficiente estandarizado para PREDISP es de .35 en el Modelo Reducido se posiciona en .34; a su vez, INSUF alcanza cifras estandarizadas de -.58 y -.62 respectivamente.

Considerando las limitaciones que tiene en este tipo de análisis la interpretación directa de los coeficientes para determinar sus pesos predictivos, tanto por razones de escala como por autocorrelación, es que se hace necesario deslindar los aportes para determinar las contribuciones específicas al margen de la variabilidad compartida.

Tabla 5: *Correlaciones Pearson, Parciales y Semi-parciales.*

	r Pearson	r Partial	r semi partial
FEM_1	,121**	,025**	,017
GSE_2	,542**	,061**	,040
$INSUF_3$	-,663**	-,546**	-,430
$PREDISP_4$	,403**	,473**	,355
$CLIMA_5$	,102**	-,061**	-,040

**= significativo al 0,01

Fuente: SIMCE 2014. Elab. Propia.

Como se observa en el Tabla 5, las variables incorporadas al modelo correlacionan significativamente con la variable de respuesta (PJE), especialmente intensas con INSUF (r_{y3} = -,663), GSE (r_{y2} = ,542) y PREDISP (r_{y4} =,403). No obstante, al controlar la relación entre la variable dependiente (PJE) y su regresor eliminando la variabilidad del conjunto de las otras variables incorporadas al modelo, se observan cambios significativos en las correlaciones, siendo especialmente notorias las reducciones establecidas a nivel de GSE ($r_{y2.1345}$ =,061), FEM ($r_{y1.2345}$ =,025) y CLIMA ($r_{y5.1234}$ = -,061). Regresores que bajo esta situación de control que establece la correlación parcial registran reducciones que los hace estadísticamente poco significativos al modelo en comparación a las aportaciones que hacen las variables INSUF y PREDISP. Así, los aportes concretos que hace cada variable al modelo tomando en consideración el cuadrado de las correlaciones semi-parciales, o lo que es lo mismo, la proporción de la variabilidad de Y debida exclusivamente a la acción del regresor, viene determinada en términos de importancia por INSUF y PREDISP, contribuyendo con un 18,5% y 12,6% al rendimiento SIMCE Matemáticas respectivamente, una vez eliminada la variabilidad compartida con los demás predictores. Las demás variables explicativas (FEM, GSE y CLIMA) tienen aportes marginales por debajo del 0,02%, no obstante se toma la decisión de mantenerlas en el modelo por su relevancia teórica justificada en la problematización.

DISCUSIÓN

Dentro del análisis bivariante inicial de comparación de medias de los puntajes alcanzados por los estudiantes de Segundo Año Medio en las pruebas SIMCE Matemáticas, cabe destacar tres argumentos centrales. Primero, las variables individuales y las condiciones de educabilidad tienen un efecto en los puntajes. Así, la media general de 264,6 puntos varía positivamente entre los estudiantes conforme existe alta predisposición hacia el aprendizaje de las matemáticas (+50,9 ptos.) y manifiestan buena percepción del clima de aula (+8 ptos); y entre grupos a medida que mejor es su conformación socioeconómica (+69,3 ptos), cuentan con una pequeña presencia de estudiantes con bajo dominio de contenidos (+49,5 ptos) y poseen una alta proporción de mujeres entre sus miembros (+3,6 ptos). Especialmente interesante resulta el comportamiento de quienes están circunscritos a grupos socioeconómicos altos, presentando los mejores puntajes de la muestra, en otras palabras, a la luz de los datos la tesis de que la pertenencia a grupos privilegiados asegura en gran medida un buen rendimiento no parece tan alejada de la realidad. Tal y como han expuesto profusamente Bellei y González (2003); Gil Flores (2011), Contreras, Gallegos y Meneses (2009), Gil (2006), Meneses, Parra y Zenteno (2005), Gallegos y Meneses (2007), Larrocaou, Ríos y Mizala (2013).

Segundo, desde la perspectiva cognitiva se establecen configuraciones de los sistemas de pensamiento con base al género, donde cada sexo emplearía distintas estrategias para resolver problemas (Echavarri, Godoy y Olaz, 2007), y junto con ello manifestaría predilecciones motivacionales y actitudinales diferenciadas en determinadas áreas del curriculum (Cervini, Dari y Quiroz, 2015; Mayer, 2015). Si bien nuestros datos informan de diferencias estadísticas significativas entre los puntajes obtenidos en beneficio de los estudiantes varones, a nivel de tamaño del efecto esta diferencia se hace prácticamente irrelevante, al menos en lo que a este grado de instrucción curricular de las matemáticas respecta.

Tercero, cabe destacar que a medida que aumenta la proporción de mujeres en un curso mejor es el rendimiento de los miembros varones, y que frente a una baja motivación de aprendizaje hacia las matemáticas, las mujeres parecen ser más responsables que los hombres en alcanzar buen rendimiento. La asociación entre género y logro en Matemáticas y Lenguaje en la educación, o “efecto género” (Cervini, Dari y Quiroz, 2015), es una discusión de largo aliento y documentada desde décadas, la cual si bien asocia a los hombres con matemáticas y a las mujeres con lenguaje, aun no queda claro desde qué edad lo hace (Leahey y Guo, 2001), a qué nivel de profundidad del desarrollo del curriculum de las matemáticas se evidencia con mayor intensidad, cuánto lo determina el tipo de medición realizada o si se ha reducido o mantiene estable (Tsui, 2007).

En un análisis de mayor profundidad, se aplicaron modelos de Regresión Lineal Múltiple. Las variables más significativas y con mayor capacidad explicativa en términos de variabilidad explicada del rendimiento SIMCE Matemáticas fueron predisposición que manifiesta el estudiante hacia el aprendizaje en este subsector curricular (PREDISP) y la calidad educativa del grupo curso, expresada en la proporción de estudiantes que perteneciendo a dicha unidad no logran reconocer y aplicar procedimientos matemáticos elementales para el nivel escolar en que se encuentran (INSUF). Por otra parte, la mixturización de género del curso (FEM), el nivel socioeconómico del establecimiento (GSE) y el clima de aula en que acontece el aprendizaje (CLIMA) resultan menos relevantes en aportación al modelo, tanto como coeficiente estandarizado, variabilidad explicada o correlación semi-parcial.

Los esfuerzos individuales son imprescindibles para alcanzar logros educativos, encontrar sentido a los aprendizajes y darles valor de uso (Santos, 2003). El estudiante puede convertirse en un agente activo de su aprendizaje, capaz de diferenciarse positivamente del resto del grupo con base a sus habilidades y predisposición al aprendizaje (Lozano, González, Nuñez, Lozano y Alvarez, 2001; Gómez y Soares, 2013), a pesar de compartir características socioculturales o recibir similar calidad de enseñanza. Un perfil actitudinal positivo (PREDISP) no solo es expresión de habilidades intrínsecas en el dominio de las matemáticas, sino además fuente de motivación, dedicación y persistencia en la tarea, lo que redunda en mejores y consistentes niveles de logro.

No obstante lo anterior, las habilidades y predisposición favorable hacia el aprendizaje de las matemáticas siendo necesarias no son suficientes para garantizar mejor rendimiento. Las cualidades inmanentes del sujeto reciben, en mayor o menor medida, la influencia de características del grupo que condicionan la calidad de la experiencia de aprendizaje. Mejores desempeños educativos del grupo curso inciden positivamente sobre los niveles de logro escolar; al contrario, cuando aumenta la proporción de estudiantes que presentan dificultades para comprender los contenidos, reconocer y aplicar procedimientos básicos a la resolución de ejercicios que involucran razonamiento matemático (INSUF), se deteriora la calidad educativa de la influencia de pares en detrimento de los niveles de logro exhibidos por el estudiante.

Otras variables socioeducativas o agregadas como expresión de las condiciones de aula, tales como clima escolar (CLIMA) y mixturización de género

(FEM), aunque significativas se constataron menos relevantes. En lo que a nuestros datos respecta la incidencia de la mujer al interior del grupo curso se observa más atenuada con ocasión de la influencia de los predictores INSUF y PREDISP incorporados al modelo. No obstante ello, se constata que a medida que aumenta la proporción de mujeres lo hace también el rendimiento, efecto que se acentúa en el caso de los hombres. Inferencia que es consistente con la literatura que establece que la presencia de mujeres a nivel de grupo curso favorece las condiciones para el aprendizaje mediante la regulación de comportamientos, fomento de estrategias comunicativas para la resolución de conflictos y organización grupal (Villalobos *et al*, 2016; Oyarzún, Estrada, Pino y Oyarzún, 2012; Tijmes, 2012; Lozano *et al*, 2001).

Por su parte, el CLIMA de aula como predictor registra un comportamiento contrario a lo esperado, cuya mejor percepción por parte del estudiante afecta negativamente los resultados del aprendizaje. Tradicionalmente un adecuado ambiente escolar, como expresión de un clima de respeto y comunicación entre agentes educativos, preconfigura las condiciones favorables en que acontece el proceso educativo (Arón, Milicic y Armijo, 2012). No obstante ello, cabe hacer presente que contextos de aprendizaje, en particular aquellos con altos niveles de exigencia, eventualmente tensionarían la relación profesor-alumno, alterando con ello la percepción evaluativa que los estudiantes hacen y manifiestan como valoración del clima de aula. Esto presionaría, por otra parte, a los docentes a reducir los niveles de exigencia y profundidad con que se aborda el currículum con el objetivo de asegurar el manejo de aula y no perder control. En consecuencia, sacrifican el compromiso intelectual que conllevaría a un mayor nivel de logro educativo para mantener el orden con más facilidad. Ideas que están en línea de lo planteado también por Gazmuri, Manzi y Paredes (2015).

Si bien en el análisis de RLM las variables explicativas PREDISP e INSUF registran mayor capacidad predictiva, no podemos obviar que el capital cultural familiar acumulado, el tipo de relaciones sociales establecidas, la disposición de recursos económicos y el involucramiento parental en los procesos educativos inciden significativamente en el rendimiento. Como correlato de la segmentación y segregación económica que caracteriza estructuralmente al sistema educacional chileno, se observa una relación entre nivel de logro en SIMCE Matemáticas (PJE) y composición socioeconómica del alumnado que atiende el establecimiento (GSE), donde a medida que mejora la condición socioeconómica aumentan también los puntajes, tanto del estudiante como del grupo curso. Ello explicaría la fuerte y signifivativa correlación que tiene GSE con PJE (r_{y2}= ,542) e

INSUF (r_{y3}= -,663). De esta forma, se configuraría un sistema escolar donde la diversidad intragrupo está restringida a la interacción entre estudiantes de características socioeconómicas y rendimiento similares. Homogeneidad de varianza interna que contrasta con la alta variabilidad observada entre unidades escolares con base a procesos de segmentación socioeducativos.

CONCLUSIONES

El mejoramiento del rendimiento escolar, medido en puntaje SIMCE, está íntimamente relacionado con la homogenización social, cultural y económica de las familias que adscriben a una determinada unidad escolar, así como a la calidad educativa de la influencia de pares. A medida que se escala por los diferentes escenarios socio-escolares y se refinan los requerimientos de composición del grupo, los puntajes aumentan. Se observan además las más altas y significativas intercorrelaciones precisamente entre rendimiento Matemáticas (PJE), conformación socioeconómica del alumnado del establecimiento (GSE) y volumen de estudiantes con escasa comprensión y aplicación de principios y conceptos matemáticos para este nivel de estudios, utilizada como proxy de la calidad de la influencia educativa entre pares (INSUF).

En el espacio multivariante, los modelos de regresión determinaron significación estadística de la totalidad de las variables estructurales, intermedias e individuales analizadas (GSE, FEM, CLIMA, INSUF y PREDISP), las que aportan en conjunto un 56,3% a la explicación de la variabilidad de los puntajes SIMCE Matemáticas. Especialmente relevantes son las aportaciones de la calidad educativa de la influencia de pares (INSUF) y el perfil actitudinal del estudiante hacia las matemáticas (PREDISP), variables que por sí solas aportan el 56,1% de la variabilidad explicada. De este modo y a la luz del comportamiento de los datos, la calidad, aprovechamiento y rendimiento de los contenidos de este subsector curricular varía significativamente en virtud de factores individuales y del contexto inmediato de la sala de clases. Si en el grupo curso hay una gran cantidad de estudiantes con dificultades para comprender y aplicar principios matemáticos, no solo sus resultados serán bajos, sino que además las posibilidades de superación del resto del alumnado disminuirán. Así, la predisposición para aprender puede encontrar sus limitantes en los bajos niveles de exigencia a los que debe recurrir el profesor para salvaguardar la eficiencia escolar, en la escasa motivación extrínseca que se provee y/o el desinterés generalizado de los pares por adquirir unos conocimientos que pueden caracterizar como difíciles, incomprensibles y hasta poco útiles.

No obstante ser los factores individuales de predisposición y aptitud percibida para con el aprendizaje (PREDISP) y la calidad educativa de la influencia de pares (INSUF) las variables de mayor capacidad explicativa (Modelo Reducido), se tomó la decisión metodológica de mantener en uno de los modelos de RLM los otros predictores en razón de su relevancia teórica (Modelo General).

El efecto género, o comportamiento diferenciado en los subsectores curriculares que tienen los estudiantes según su sexo, fue medido según la mixturización o feminización del aula. Los resultados muestran un aumento de los puntajes conforme más mujeres componen el curso, conformación que beneficia levemente a los hombres. Frente a esto, la explicación vendría dada por el mejoramiento en las condiciones del aula que la presencia femenina propugna al aumentar la organización, involucramiento y comunicación entre pares, posibilitando un mejor ambiente de aprendizaje y aprovechamiento curricular.

A su vez, elementos subjetivos como la persistencia en la tarea, tolerancia frente al fracaso, autorregulación y/o atribución personal de logros alcanzados, se vinculan analíticamente con la predisposición hacia el aprendizaje, la cual supera la adquisición de contenidos curriculares y da cuenta de una asimilación del conocimiento, profundización de lo aprendido fuera de clases y una mayor cantidad de horas invertidas en estudiar. El análisis de RLM informa que la actitud para con el aprendizaje de las matemáticas (PREDISP) es el regresor de mayor aporte predictivo, reforzando la idea que la voluntad y motivación de los estudiantes conlleva un aumento en los niveles de logro alcanzado.

Para nuestros datos, la composición socioeconómica del alumnado tuvo aportaciones significativamente menos relevantes, pese lo cual enfatizamos en su consideración en el modelo. Mantenemos la tesis implícita que los niveles de rendimiento o puntajes en pruebas estandarizadas son reflejo de mejores condiciones de educabilidad, las que se corresponden con la disposición de recursos en el hogar, capital sociocultural y relaciones sociales que cada estudiante tiene y puede acumular con base a su extracción social. Tanto la empobrecida calidad educativa del hogar como la segmentación estructural del sistema educativo, caracterizado por una fuerte homogeneidad intragrupo y alta heterogeneidad extragrupo, restringen el desarrollo de habilidades cognitivas y competencias sociales en el estudiante. Argumento que encuentra sustento en la significativa y fuerte intercorrelación existente entre el regresor *composición sociocultural del alumnado* (GSE) y *calidad educativa de la influencia de pares*

(INSUF), variable esta última cuya presencia en el modelo RLM hace eclipsar la relevancia de GSE.

El fenómeno educativo es complejo y multidimensional. Su calidad no se traduce únicamente en la estimación de niveles de logro o rendimiento alcanzado en pruebas estandarizadas, al estilo SIMCE, sino también en la responsabilidad que le asiste a la escuela por instalar competencias prosociales para vivir en comunidad. Desarrollo personal y social del alumnado, preocupación intrínseca de la escuela, que a su vez impacta sobre los niveles de aprovechamiento educativo, por cuanto son expresión de las condiciones no materiales o relacionales en las cuales se suscita el aprendizaje. En la medida que las condiciones y composición del aula afectan el aprendizaje cognitivo, tal y como hemos podido evidenciar, su preocupación adquiere centralidad como indicador y recurso en la estimación de calidad educativa.

REFERENCIAS

Alonso, C., Gallego, D., y Honey, P. (1999). *Los estilos de aprendizaje* (4° ed.). Bilbao: Mensajero.

Aron, A. M., Milicic, N., y Armijo, I. (2012). Clima Social Escolar: una escala de evaluación –Escala de Clima Social Escolar, ECLIS–. *Universitas Psychologica, 11*(3), 803-813. http://revistas.javeriana.edu.co/index.php/revPsycho/article/view/803.

Barca, A., Almeida, L., Porto, A. M., Peralbo, M., y Brenlla, J. (2012). Motivación escolar y rendimiento: impacto de metas académicas, de estrategias de aprendizaje y autoeficacia. *Anales de Psicología, 28*(3), 848-859.
http://dx.doi.org/10.6018/analesps.28.3.156221.

Beguet, B., Cortada de Kohan, N., Castro, A., y Renault, G. (2001). Factores que intervienen en el rendimiento académico de los estudiantes de psicología y psicopedagogía. *Revista científica de la dirección de evaluación y acreditación de la secretaria general de la Universidad del Salvador-USAL*, 1-22.

Bellei, C., y González, P. (2003). Educación y competitivad en Chile. En O. Muñoz, y O. Muñoz (Ed.), *Hacia un Chile competitivo: instituciones y políticas* (págs. 109-192). Editorial Universitaria S.A.

Boza, Á., y Toscano, M. (2012). Motivos, actitudes y estrategías de aprendizaje: Aprendizaje motivado en alumnos universitarios. *Revista de Curriculum y Formación Profesorado, 16*(1), 125-142. http://www.ugr.es/local/recfpro/rev161ART8.pdf.

Camacho, M., y Del Campo, C. (2013). Impacto de la motivación intrínseca en el rendimiento académico a través de trabajos voluntarios: Un análisis empírico. *Revista Complutense de Educación, 26*(1), 67-80. http://dx.doi.org/10.5209/rev_RCED.2015.v26.n1.42581.

Cano, F. (2000). Diferencias de género en estrategias y estilos de aprendizaje. *Psicothema, 12*(3), 360-367. http://www.psicothema.es/pdf/343.pdf.

Cerezo, M. T., y Casanova, P. (2004). Diferencias de género en la motivación académica de los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa, 2*(3), 97-112. http://www.investigacion-psicopedagogica.com/revista/articulos/3/espannol/Art_3_31.pdf.

Cervini, R., Dari, N., y Quiroz, S. (2015). Género y rendimiento escolar en América Latina. Los datos del SERCE en Matemática y Lectura. *Revista Iberoamericana de Educación, 68*, 99-116.

Contreras, D., Gallegos, S., y Meneses, F. (2009). Determinantes de desempeño universitario: ¿Importa la habilidad relativa? *University Library of Munich, Alemania*(23320), 18-48. https://mpra.ub.uni-muenchen.de/23320/1/MPRA_paper_23320.pdf.

Durón, L., y Oropeza, R. (1999). Actividades de estudio: análisis predictivo a partir de la interacción familiar y escolar de estudiantes de nivel superior. Documento de trabajo. Facultad de Psicología. UNAM. México.

Echavarri, M., Godoy, J. C., y Olaz, F. (2007). Diferencias de género en habilidades cognitivas y rendimiento académico en estudiantes universitarios. *Universitas Psychologica, 6*(2), 319-329. http://revistas.javeriana.edu.co/index.php/revPsycho/article/view/120/105.

Erazo, O. (2012). El rendimiento académico, un fenómeno de múltiples relaciones y complejidades. *Vanguardia Psicológica, 2*(2), 144-173.

Gallegos, S., y Meneces, F. (2007). ¿Es Eficiente el Sistema de Ingreso a la Universidad? El uso de ranking en la Universidad Católica de Chile. 1-12. Recuperado de: http://www.ideaseneducacion.cl/wp-content/uploads/2008/07/paper-puc-sistema-de-ingreso3.pdf.

Gazmuri, C., Manzi, J., y Paredes, R. (2015). Disciplina, clima y desempeño escolar en Chile. *Revista CEPAL*(115), 116-128. http://200.9.3.98/bitstream/handle/11362/37833/REV115ManziParedes_es.pdf?sequence=1yisAllowed=y.

Gil, F. (2006). *Acceso a las universidades una propuesta.* Santiago: Foro Nacional Educación de Calidad para Todos.

Gil, J. (2011). Hábitos lectores y competencias básicas en el alumnado de educación secundaria obligatoria. *Educación XXI : revista de la Facultad de Educación, 14*(1), 117-134. http://dx.doi.org/10.5944/educxx1.14.1.274.

Gómez, D., Oviedo, R., y Martínez, E. (2011). Factores que influyen en el rendimiento académico del estudiante universitario. *TECNOCIENCIA Chihuahua, V*(2), 90-97. http://tecnociencia.uach.mx/numeros/v5n2/data/Factores_que_influyen_en_el_rendimiento_academico_del_estudiante_universitario.pdf.

Gómez, G., y Soares, A. (2013). Diferencia de género con relación al desempeño académico en estudiantes de nivel básico. *Alternativas en Psicología, 17*(28), 106-118. http://pepsic.bvsalud.org/pdf/alpsi/v17n28/n28a09.pdf.

Huy, L., Casillas, A., Robbins, S. B., y Langley, R. (2005). Motivational and skills, social, and self- management of college outcomes: Constructing the student readiness inventory. *Educational and Psychological Measurement, 65*(3), 482-508. https://doi.org/10.1177/0013164404272493.

Inglés, C., Díaz, Á., García, J., Ruiz, C., Delgado, B., y Martínez, M. (2012). Auto-atribuciones académicas: Diferencias de género y curso en estudiantes de educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Psicología, 44*(3), 53-64. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=80525022005.

Jano, D., y Ortiz, S. (2003). Determinación de los factotres que afectan al rendimiento académico en la educación superior. *XII Jornadas de la Asociación de Economía de la Educación*, (pp. 1-12. http://www.economicsofeducation.com/wp-content/uploads/oviedo2005/P4.pdf). Madrid.

Larrocaou, T., Ríos, I., y Mizala, A. (2013). Efecto de incorporación del ranking de notas en la selección universitaria. *departamento de evaluación, medición y registro educacional*.

Leahey, E., y Guo, G. (2001). Gender differences in mathematical trajectories. *Social Forces, 80*(2), 713-732. https://doi.org/10.1353/sof.2001.0102.

Lozano, L., González, J., Núñez, J., Lozano, L., y Álvarez, L. (2001). Estrategias de aprendizaje, género y rendimiento académico. *Revista Gallego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación, 7*(5), 203-216. http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/6894/RGP_7-17.pdf?sequence=1.

Madrid, S. (2006). Profesorado, política educativa y género en Chile. Balance y propuestas. Santiago, Chile: Fundación Chile 21 y Fundación Friedrich Ebert Stiftung.

Mayer, L. (2015). Feminización y masculinización del espacio escolar. La necesidad del "hombre". Un análisis de las estrategias para la prevención de la conflictividad escolar en escuelas secundarias de la ciudad de Buenos Aires. *Universidad Politécnica Salesiana*, 25-46. http://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/10990.

Meneses, F., Parra, A., y Zenteno, L. (2005). Meneses, F., Parra, A., y Zenteno, L. (2005). Se Puede Mejorar el Sistema de Ingreso a las Universidades Chilenas? El uso del ranking en la Universidad Catolica de Chile, Universidad de Chile y Universidad de Santiago de Chile. *University Library of Munich, Alemania* (23048), 1-8. http://mpra.ub.uni-muenchen.de/23048/.

Montero, E., Villalobos, J., y Valverde, A. (2007). Factores institucionales, pedagógicos, psicosociales y sociodemográficos asociados al rendimiento académico en la Universidad de Costa Rica: Un análisis multinivel. *Revista Electrónica de Investiogación y Evaluación Educativa (RELIEVE), 13*(2), 215-234. www.uv.es/RELIEVE/v13n2/RELIEVEv13n2_5.htm.

Omar, A., Urteaga, A., Uribe, H., y Soares, N. (2010). Capital sociocultural familiar, autoestima y desempeño académico en adolescentes. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (México), XL*(2), 93-114. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27018884005.

Orellana, E., y Segovia, J. (2014). Evaluación del clima social escolar mediante semilleros de convivencia de los octavos de educación general básica. (tesis de pregrado). Universidad de Cuenca, Cuenca, Ecuador. http://dspace.ucuenca.edu.ec/jspui/bitstream/123456789/5022/1/Tesis.pdf.

Oyarzún, G., Estrada, C., Pino, E., y Oyarzún, M. (2012). Habilidades sociales y rendimiento académico: Una mirada desde el género. *Acta Colombiana de Psicología, 15*(2), 21-28. http://portalweb.ucatolica.edu.co/easyWeb2/files/23_9963_v25-n2-art2.pdf.

Paiva, F., y Saavedra, F. (2014). Clima social escolar y rendimiento escolar: Escenarios vinculados en la educación. (tesis de pregrado). Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile. http://repobib.ubiobio.cl/jspui/handle/123456789/232.

Pita, M., y Corengia, Á. (2005). Rendimiento académico en la universidad. *V Coloquio internacional sobre gestión universitaria en América del Sur. Poder, Gobierno y estrategias en las universidades de América del Sur.* Mar del Plata, 1-10. http://inter27.unsl.edu.ar/rapes/download.php?id=301: Universidad de Mar del Plata.

Santos, M. (2003). Dime cómo evalúas y te diré qué tipo de profesional y de persona eres. *Revista Enfoques Educacionales, 5*(1), 69-80. http://www.facso.uchile.cl/publicaciones/enfoques/07/Santos_DimeComoEvaluas.pdf.

Tijmes, C. (2012). Violencia y clima escolar en establecimientos educacionales en contextos de alta vulnerabilidad social de Santiago de Chile. *Psykhe, 21*(2), 105-117. http://dx.doi.org/10.7764/psykhe.21.2.548.

Treviño, E., Valdés, H., Castro, M., Costilla, R., Pardo, C., y Donoso, F. (2010). *Documento informativo: Factores asociados al logro cognitivo de los estudiantes de América Latina y el Caribe.* Santiago: OREALC/UNESCO. http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001902/190213s.pdf.

Tsui, M. (2007). Gender and Mathematics achievement in China and the United States. *Gender Issues, 24*(3), 1-11. http://dx.doi.org/10.1007/s12147-007-9047-z.

Valenzuela, J. (2007). Más allá de la tarea: pistas para una redefinición del concepto de Motivación Escolar. *Educação e Pesquisa, 33*(3), 409-426. http://dx.doi.org/10.1590/S1517-97022007000300002.

Villalobos, C., Wyman, I., Schiele, B., y Godoy, F. (2016). Composición de género en establecimientos escolares chilenos: ¿Afecta el rendimiento académico y el ambiente escolar? *Estudios pedagógicos (Valdivia), 42*(2), 379-394. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000200022.

Geraldo Padilla Fuentes

Dirección: Centro de Investigación Educativa (CIDCIE)
Universidad del Bío-Bío
Chillán, Chile

Teléfono: 56-42-2463616

CONTRIBUCIÓN A LA DOCENCIA DOI: 10.24844/EM3201.07

Conocimiento emocional de profesores de matemáticas

Emotional knowledge of mathematics teachers

María S. García-González[1]
Oswaldo Jesús Martínez-Padrón[2]

Resumen: Se presenta una reflexión sobre experiencias educativas en torno al conocimiento emocional del profesorado de matemáticas, en el marco de nuestra interacción con docentes en talleres de matemática emocional y clases de un posgrado en Docencia de la Matemática, en México. Desde dicha experiencia, se proponen dos técnicas que pueden ayudar al docente a desarrollar su conocimiento emocional.

Palabras Clave: *Conocimiento emocional, profesores, matemáticas.*

Abstract: In this article we provide a reflection about educational experiences around the emotional knowledge of mathematics teachers, within the framework of our interaction with teachers in emotional mathematics workshops and postgraduate classes in Mathematics Teaching, in Mexico. From this experience, we propose two techniques that can help teachers to develop their emotional knowledge.

Keywords: Emotional *knowledge, teachers, mathematics.*

Fecha de recepción: 17 de noviembre de 2018. **Fecha de aceptación:** 26 de noviembre de 2019

[1] Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero, México; mgargonza@gmail.com; https://orcid.org/0000-0001-7088-1075.

[2] Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela)- Universidad Técnica del Norte (Ecuador); Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas; ommadail@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-4142-8092

EL AFECTO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

"Para que una cosa sea útil, hay que usarla, pero lo que se odia, más se maltrata que se usa" (Mager, 1984, p. 1). Con esta frase, Robert Mager, uno de los nombres más reconocido en el campo de la formación y la mejora del rendimiento educativo americano, inicia su libro *Developing attitude toward learning* dirigido a profesores y personas interesadas en la educación, título que se corresponde con el objetivo de la obra, ya que trata de principios que los profesores pueden usar para influir positivamente en la actitud de los estudiantes, con la finalidad de que estos terminen su educación no solo con deseos de emplear lo aprendido sino ávidos de aprender más. Reflexiones como la anterior nos llevan a reafirmar la importancia que se le ha otorgado a los factores afectivos en el proceso de enseñanza-aprendizaje en cualquier campo del saber.

En cuanto a las matemáticas, como asignatura escolar, el afecto también ha sido motivo de preocupación de expertos desde hace décadas, basta mencionar al matemático húngaro George Polya quien, desde 1945, ya había advertido que las emociones juegan un papel preponderante en la resolución de problemas matemáticos, haciendo mención a cuestiones asociadas con la voluntad y la determinación, la cual varía según la esperanza o el abatimiento y la satisfacción o la desilusión (Polya, 1965). Casi cuatro décadas más tarde, Schoenfeld (1983), educador matemático, hizo hincapié en el papel que juega el sistema de creencias en la determinación de la toma de decisión de un estudiante mientras resuelve problemas matemáticos, apuntando que las actitudes hacia las matemáticas y la confianza en ellas pueden ser los aspectos que influyen en cómo los estudiantes manejan sus recursos cognitivos.

Esta importancia del afecto en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas llevó al educador matemático Douglas McLeod a conceptualizar el Dominio Afectivo como "un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo), que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos de este dominio las actitudes, creencias y emociones" (McLeod, 1989, p. 245). A partir del trabajo de McLeod, la investigación sobre el afecto y el aprendizaje de las matemáticas creció, incorporándose nuevos constructos como los valores (De Bellis y Goldin, 2006), la motivación, la identidad y la autoeficacia (Goldin, *et al*, 2016), en conjunción con el papel que juegan los estudiantes, los profesores, el saber matemático, la escuela, el discurso y el contexto social correspondiente (Ursini y Sánchez, 2008; Di Martino y Zan, 2010; 2011; Martínez-Padrón, 2016).

Dentro de ese compendio de actores, instancias y otros aspectos concomitantes, en este artículo centraremos la atención en el profesor de matemáticas y sus emociones, porque reconocemos al salón de clases como una micro-cultura que norma sus comportamientos y su sentir, sin excluir una buena gestión y manejo de las relaciones interpersonales que, junto con la comprensión de conceptos, constituyen la base de la inteligencia social requerida para aprender a vivir en un mundo donde se deben dar muestras, de autenticidad, sintonía, aptitud social, sincronía y empatía (Goleman, 2006; Albrecht, 2006). De acuerdo con Rodríguez, Guevara y Viramontes (2017), en México no se le ha dado la importancia justa al problema de estrés laboral en docentes. Igual ocurre en países como Paraguay y Venezuela (Martínez-Padrón; 2008; 2016), donde muchos profesores de matemáticas son colocados en situaciones tensas que no resultan fáciles de gerenciar, debido a que tienen que atender estudiantes cargados con actitudes desfavorables hacia el estudio.

En otros contextos iberoamericanos, Font (2011) señala que las demandas de los sistemas educativos actuales generan malestar, preocupación y angustia en los docentes a quienes les cuesta concretar las herramientas adecuadas para organizar los contenidos matemáticos que deben enseñar, sobre todo cuando se les cuestiona la manera de enseñarlos en el aula. En el caso de España, Gómez, Blanco, Cárdenas y Guerrero (2012) destacan que quienes enseñan matemáticas se sienten estresados por muchas variables, como la falta de interés, la ausencia de motivación y la indisciplina.

En resumen, en el contexto escolar abundan variadas situaciones cargadas de falta de motivación, angustia, preocupación, consternación, ansiedad y otros factores que impactan notablemente tanto a los protagonistas de la clase como a otros actores e instancias del entorno inmediato. Consideramos que todos estos aspectos deben ser atendidos por estar ligados con el éxito o el fracaso de los estudiantes, sus docentes, sus escuelas y otros elementos concomitantes.

¿QUÉ ES UNA EMOCIÓN?

Solomon (2008) señala que definir “emoción” es una tarea tan difícil como sería dominarlas, y las considera más peligrosas y comprometidas que la propia razón de los sujetos, aunque esta última es quien debe controlarlas. Agrega que las emociones suelen afectar hasta el juicio de los sujetos implicados, pudiendo estar vinculadas con deseos e involucradas con actitudes, creencias, percepciones, estados de ánimo y otros factores morales, sociales, culturales y psicológicos. Stets y Turner (2008) agregan que si la mirada es realizada desde el ámbito sociológico ha de tomarse en cuenta la cultura, en vista de la necesidad de recaudar detalles sobre las regulaciones de los comportamientos de los sujetos mediante sus interacciones comunicacionales. Por nuestra parte nos ceñimos al paradigma cognitivo, desde las teorías de la valoración en psicología, quienes suponen que las emociones son consecuencias de nuestras evaluaciones de ciertos eventos, particularmente nos ceñimos a la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones (Ortony, Clore y Collins, 1996), llamada comúnmente teoría OCC.

La teoría OCC está fundamentada en la idea de que las emociones son desencadenadas por las valoraciones cognitivas que la gente hace de una situación de manera consciente o no. Desde esta perspectiva, las emociones son entendidas como "reacciones con valencia ante acontecimientos, agentes u objetos, la naturaleza particular de las cuales viene determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante" (Ortony, Clore y Collins, 1996, p. 16), siendo su fuente de evidencia el lenguaje, desde donde es posible conocer los orígenes y las emociones experimentadas por las personas. Con base en este fundamento teórico, para identificar una emoción centramos la atención en la palabra emocional asociada y en la situación que la desencadena.

De acuerdo con lo planteado, se avizora una situación investigativa espinosa sustentada en lo complejo que resulta separar a los elementos constituyentes de las emociones en relación con lo cultural, social, biológico, filosófico o psicológico, sobre todo cuando se hace referencia a componentes de factores como la angustia, la tensión o la depresión producida por el descenso de la autoestima o por la presencia de la desesperanza y el desánimo. Tales aspectos también impactan en la configuración de creencias, actitudes, motivaciones y otros factores del dominio afectivo ligados con el éxito o con el fracaso de los protagonistas de la clase de Matemática (Martínez-Padrón, 2016). Empero, existen senderos como el visionado por la teoría OCC, donde el conocimiento de las valoraciones cognitivas apertura posibilidades de concretar emociones aliadas a situaciones concretas.

Para cerrar esta sección, es oportuno dilucidar algunos aspectos relacionados con el afecto, los sentimientos y las emociones. Damasio (2009) *asevera que "la emoción y las reacciones relacionadas están alineadas con el cuerpo, los sentimientos con la mente*" (p. 7), de manera que se puede concretar que "los pensamientos desencadenan emociones... [y] las emociones corporales se transforman en el tipo de pensamientos que denominamos sentimientos o sensaciones"

(p. 6). Este mismo autor cita a Spinoza quien declara al afecto como una serie de "impulsos, motivaciones, emociones y sentimientos" (p. 7), lo cual resulta prudente para allanar las dificultades que a veces se presentan durante el discurso.

LAS EMOCIONES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Las emociones del profesorado se clasifican en dos grupos: negativas y positivas. Las negativas implican experiencias desagradables durante el momento de la enseñanza; entre ellas se citan el estrés, la desmotivación y el síndrome de Burnout, un trastorno emocional provocado por el estrés laboral que conlleva a experimentar ansiedad e incluso depresión (Schutz y Zembylas, 2009; Rodríguez, Guevara y Viramontes, 2017). Cuando este grupo de emociones se presenta en grados intensos pueden conducir hasta el abandono de la profesión (Hannula, Liljedahl, Kaasila y Rösken, 2007). Entre las emociones negativas, la que aparece con más frecuencia en los profesores de matemáticas es la llamada ansiedad matemática (Fennema y Sherman, 1976; Hannula, Liljedahl, Kaasila y Rösken, 2007; Bekdemir, 2010). Las emociones positivas, por el contrario, implican experiencias de placer al momento de conducir una clase, entre ellas se encuentran el entusiasmo, la alegría, la satisfacción y el interés (Di Martino y Sabena, 2011; Anttila, Pjyhältö, Soini y Pietarinen, 2016).

De acuerdo con resultados de investigaciones, existen dos razones por las que se desencadenan las emociones negativas de los docentes que enseñan matemática: (a) las experiencias emocionales experimentadas cuando eran estudiantes: generalmente, quienes tuvieron experiencias negativas con las matemáticas las siguen experimentando cuando se convierten en profesores, conservando la creencia de que las matemáticas son difíciles (Di Martino y Sabena, 2011; Coppola, Di Martino, Pacelli y Sabena, 2012); y (b) el conocimiento de la asignatura: muchos de los docentes que tienen la responsabilidad de enseñar matemáticas no siempre son especialistas en los contenidos que les marca el currículo escolar (Philipp, 2007).

Particularmente, nuestras investigaciones sugieren que las emociones, positivas y negativas, del profesor de matemáticas suelen desencadenarse en función de las metas alcanzadas por sus estudiantes en el salón de clases (García-González y Martínez-Sierra, 2016), por ejemplo, "que los estudiantes aprendan". Mientras que muchas de las emociones que experimentan los estudiantes en la clase de matemáticas son desencadenadas por normas del sistema escolar y valoradas por los estudiantes como metas del salón de clases, entre ellas: participar en clases, resolver problemas, y graduarse. Si estas metas son alcanzadas, las emociones que experimentan los estudiantes son positivas, en caso contrario, negativas (Martínez-Sierra y García-González, 2014; 2016; 2017).

Haciendo algunas especificaciones sobre los tipos de emociones en referencia, en la Tabla 1 se muestran ambos grupos y varias situaciones desencadenantes que pueden asociarse con emociones particulares de los profesores de matemáticas y de sus estudiantes. Debe tenerse claro que para concretar cualquiera de ellas se hace necesario ligarlas con las vivencias que tales protagonistas dibujan o narran, por ejemplo, en relación con los contenidos matemáticos que son estudiados, enseñados, aprendidos o evaluados. En el caso de los estudiantes, se ha encontrado que un importante contingente de ellos que, históricamente, se ha angustiado por tener la creencia de que las matemáticas son difíciles, le tienen fobia tanto a la asignatura como a quien la enseña (Martínez-Padrón, 2016), a pesar de que existen docentes que se esfuerzan porque sus estudiantes se interesen por la clase y logren aprenderse los contenidos desarrollados en ella.

Tabla 1. Emociones de profesores y estudiantes en matemáticas.

ESTUDIANTES		PROFESORES	
Emociones	**Situaciones desencadenantes**	**Emociones**	**Situaciones desencadenantes**
Satisfacción Decepción Miedo Fobia Aburrimiento Interés Júbilo Congoja Orgullo Reproche Autoreproche Gusto Disgusto	Asistir a clases Participar en clase Resolver problemas Aprobar el examen Aprobar el curso Graduarse de bachillerato Entrar a la universidad Conseguir un empleo	Reproche Congoja Júbilo Agrado Ira Fobia Orgullo Gratitud Decepción Remordimiento Gratificación Autoreproche	Que los estudiantes: Aprendan Se interesen en la clase Participen en la clase Se gradúen Cursen una carrera profesional

Fuente: Martínez-Sierra y García-González, 2014; 2016, 2017; García-González y Martínez-Sierra, 2016.

También existen investigaciones que reportan que en la clase de matemáticas muchos estudiantes aún dejan comandarse por emociones negativas que secuestran hasta su capacidad de razonamiento (Goleman, 1996; 2006; Martínez-Padrón, 2008; 2016; Martínez-Padrón, Contarino y Ávila, 2015; Maaß y Schlöglmann, 2009) no logrando vencer los naturales escollos que hay que arrostrar en cualquier evento que pudiera surgir en el aula de matemáticas o en cualquier otro ambiente donde se estén gestando procesos sistematizados que conduzcan al uso de contenidos matemáticos.

EL CONOCIMIENTO EMOCIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

El término *conocimiento emocional* del profesor de matemáticas es referido al conocimiento que el profesor debe tener sobre sus emociones y la de sus estudiantes durante la enseñanza de esta disciplina (García-González y Pascual-Martín 2017), por lo que tiene que estar consciente de las emociones que se experimentan en el aula y lo que las desencadena, así como de los procederes para su regularización. Con base en Gaxiola (2005) y López y Valls (2013) argumentamos que tener conocimiento emocional implica las siguientes habilidades:

1. Reconocer que sentimos: las emociones son parte de nuestra naturaleza humana.
2. Reconocer qué sentimos: ser capaces de reconocer qué emoción experimentamos ante determinada situación.
3. Concretar, con claridad, la palabra que representa la emoción que realmente sentimos, por ejemplo, no es lo mismo sentir miedo que pavor, sabiendo que este último da cuenta de una intensidad mayor que el miedo.
4. Reconocer qué situación desencadena eso que sentimos.
5. Distinguir las emociones negativas de las positivas.
6. Regular las emociones que experimentamos, siendo capaces de actuar en consecuencia.
7. Poder ayudar a otros a conocerse emocionalmente, por ejemplo a nuestros estudiantes.

Al trabajar con profesores nos hemos percatado que no todos poseen conocimiento emocional que les permita reconocer y gestionar emociones de manera adecuada. Es común que no siempre puedan ponerle nombre a lo que sienten, y al cuestionarles sobre una emoción que experimentan en la clase de matemáticas, responden con la propia palabra *emoción* para dar cuenta de estados como la alegría o satisfacción por algo o por alguien. Por nuestra parte consideramos que los resultados de conocerse emocionalmente pueden ser ventajosos, dado que facilita la toma de decisiones para actuar o detectar el camino correcto que se desea seguir; además de que las emociones evalúan en forma correcta lo que nos pasa, preparándonos para comprender lo que le pasa a otros (Gaxiola, 2005).

ABORDAJE METODOLÓGICO

Esta investigación está alineada al paradigma fenomenológico-interpretativo, dado que toma en cuenta la interioridad de los profesores de matemáticas que formaron parte de dos grupos: uno constituido por asistentes a un taller sobre el conocimiento emocional del profesor de matemáticas, realizado en una Universidad de Perú, y otro conformado por los participantes de un curso de posgrado en Docencia de la Matemática, en una Universidad de México. Tal alineación la inscribe en el paradigma cualitativo y para materializar las evidencias se solicitó a dichos profesores que dibujaran o narraran eventos o experiencias emocionales, vivencias y motivaciones ligadas con sus clases de matemáticas, seguidas de sus correspondientes significados contextuales. Todo ello involucró un compendio de historias y relatos que tuvieron que ver con su ser, su sentir y su hacer como docente de matemáticas.

El carácter fenomenológico fue asumido según Martínez-Miguélez (2006), quien destaca que la realidad a abordar en este tipo de estudios no es la externa del sujeto sino la interna y personal, por eso toma en cuenta "una realidad cuya esencia depende del modo en que es vivida y percibida por el sujeto" (p. 137).

El conjunto de aspectos teóricos se concretó con una investigación documental donde se incluye la teoría de la OCC y otros aspectos que permitieron no solo visionar el panorama y concretar los postulados de sustento, sino atesorarlos con apoyo de dos técnicas pautadas para identificar emociones.

TÉCNICAS PARA IDENTIFICAR EMOCIONES

Enseguida se presentan dos técnicas que hemos implementado para identificar emociones, las cuales son útiles para ponerle nombre a la emoción experimentada e identificar la situación que la desencadena.

El dibujo

Desde la Matemática Educativa se han realizado estudios usando dibujos para averiguar las creencias que los estudiantes tienen de las matemáticas y de los matemáticos (Picker y Berry, 2000; Aguilar, Rosas y Romo-Vazquez, 2016; Yazlik y Erdogan, 2017). Henrion (1997) sugiere que las imágenes revelan no solo creencias, sino suposiciones y expectativas subyacentes, pudiendo proporcionar ideas de lo que sentimos. Por esta razón, el dibujo es una técnica que hemos replicado y hemos comprobado su funcionalidad al pedirle a los profesores de diferentes niveles escolares, que realicen un dibujo de una experiencia emocional positiva, y una negativa, de cualquiera de las clases de matemáticas que ellos han vivido durante su experiencia laboral.

La indicación que se les da a los docentes es que realicen, de manera individual, el dibujo de una experiencia emocional sin incluir palabras emocionales, después lo muestran al resto de profesores, quienes identificarán la emoción allí expresada (ver Figura 1). Este ejercicio es muy fructífero, ya que tanto el que dibuja como quienes lo identifican, fortalecen su conocimiento emocional al reconocer en sí mismos y en los demás las emociones que se experimentan. Después de que los observadores hablan de la emoción que ven en el dibujo, quien dibujó debe decir si esa era la emoción que de verdad quería comunicar. La mayoría de las veces hay coincidencias por parte de los observadores. Al final se pide a quien dibujó que escriba la palabra emocional asociada con el dibujo. Este ejercicio ayuda, también, a reconocer la situación que desencadena la emoción.

Figura 1. Expresando las emociones mediante dibujos.
Fuente: Taller "El conocimiento emocional del profesor de matemáticas". Lima, Perú, agosto de 2017.

La Figura 2 es una producción de una profesora de bachillerato que cursa una Maestría en Docencia de las Matemáticas ofertada en una Universidad de México. Ella dibujó una emoción positiva y una negativa de la clase de matemáticas; por lo expresivo de sus dibujos fue fácil identificar las emociones: la alegría de que los alumnos le presten atención y la tristeza cuando esto no ocurre.

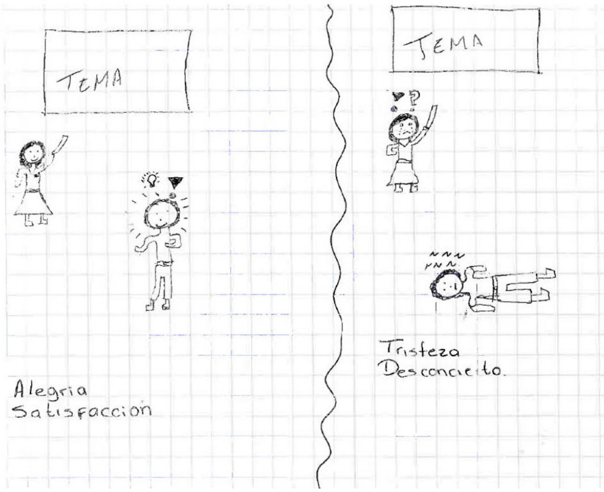


Figura 2. Emociones positivas y negativas en la clase de matemáticas.
Fuente: elaboración propia

Centremos la atención en la Figura 2 y obsérvese cómo la docente, el tema y el estudiante se ven involucrados en la situación desencadenante de la emoción. A la izquierda aparece la docente con una sonrisa, debido a que el alumno ha entendido su explicación del tema, esto se deduce al observar al alumno con un foco sobre la cabeza, lo que da cuenta de una emoción positiva que ella etiqueta como *alegría* y *satisfacción*. Al lado derecho, aparece una situación opuesta: la docente aparece con una mueca triste, con lágrimas, con signos de admiración e interrogación sobre su cabeza. Consideramos que con todos estos signos ella expresa su desconcierto ante la situación. En el caso del alumno, la serie de zetas junto a él, nos lleva a pensar en el aburrimiento y la falta de atención. Con esta última imagen, la docente representa la *tristeza* y el *desconcierto* cuando el estudiante no entiende el tema que ella explica. Interpretamos que la situación que desencadena la emoción, positiva y la negativa, es el aprendizaje de los temas.

Como se describió antes, a la profesora se le facilita identificar la emoción que experimenta y la situación que la desencadena. Cuando mostró su dibujo en clase, todos logramos identificar la emoción que quería comunicar. Esta es una habilidad que no todos tenemos desarrollada, de ahí la importancia del ejercicio que nos ayuda a poder nombrar eso que sentimos.

LA NARRATIVA

Los humanos son, por naturaleza narradores de historias (Connelly y Clandinin, 1990) y relatos, y eso ocurre en todas las culturas. Su objeto suele ser variado y, entre otros aspectos, permiten entretener, educar o conocer aspectos ligados con experiencias vividas. En el caso de las narraciones, variados personajes, argumentos, gestos y expresiones forman parte de ellas, por eso se les considera relevantes y valiosas para cuando se desea conocer realidades que dependen de la manera como los sujetos las viven, visionan y perciben su mundo (Martínez-Padrón; 2011). Todo eso suscita multiplicidad de miradas y puntos de vista que le dan importancia a la investigación narrativa en vista de que "aporta la posibilidad de aproximarse a vivencias sociales desde relatos individuales y también, a la resignificación subjetiva de la realidad a propósito de los cambios de ésta mientras se narra a lo largo del tiempo" (Arias y Alvarado, 2015, p. 178). La narrativa, por tanto, permite estudiar maneras y formas en que los humanos experimentan el mundo.

En el campo de la Matemática Educativa, las narraciones se usan cada vez con mayor frecuencia, especialmente en investigaciones sobre cuestiones afectivas (Di Martino y Zan, 2010; Martínez-Sierra y García-González, 2014; 2016; 2017). Al implementar esta técnica en entornos escolares y al momento en que ellos hacen el papel de participantes de algún curso, usualmente se pide a los docentes que se tomen un tiempo libre, fuera de actividades cotidianas, para escribir su historia como docentes de matemáticas, posteriormente cada uno la lee en clase y quien escucha debe de comentar acerca de una experiencia positiva o negativa del relato. Esto, además, es un buen ejercicio para reflexionar sobre la práctica educativa, solo que a diferencia del dibujo requiere de tiempo para escribir, escuchar y ser escuchado.

Enseguida se exponen algunos fragmentos de narraciones de cuatro profesores de distintos niveles educativos, donde el objetivo es que el lector se percate de la parte emocional narrada. Para efectos de identificación de esos profesores, los hemos distinguido con la siguiente nomenclatura: P_i, donde i= A, B, C y D.

- P_A: Profesor de nivel secundaria que atiende a estudiantes de 12-15 años, y tiene 8 años de experiencia docente.
- P_B: Profesor de nivel primaria que atiende a estudiantes de 6-12 años, y tiene 12 años de experiencia docente.
- P_C: Profesor de nivel bachillerato que atiende a estudiantes de 15-18 años, y posee 8 años de experiencia docente.
- PD: Profesor de nivel secundaria, atiende a estudiantes de 12-15 años, y posee 2 años de experiencia docente.

También se establece que en cada evidencia narrativa, la palabra que concreta la expresión emocional se destaca en *cursivas* y la situación desencadenante se <u>subraya</u>.

El primero de estos profesores es P_A, quien manifiesta emociones de insatisfacción y descontento desencadenadas por el incumplimiento de tareas por parte de los estudiantes. Para él es importante que las tareas sean entregadas a tiempo, porque quiere inculcar el valor de la puntualidad. Sin embargo, esta forma de proceder fue vista por algunos padres de familia como reflejo de un mal profesor, situación que lo obligó a volverse más tolerante con la entrega de tareas, aunque ocasiona que no disfrute sus clases.

> **P_A**: Hasta el momento *no me siento satisfecho conmigo, no me siento feliz* dando clases, ya que observo <u>que si pido las tareas en tiempo y forma los padres en vez de que me lo agradezcan, me tachan de mal profesor</u>, he observado que <u>a la mayoría de los padres lo que les importa es la calificación, y no que sus hijos aprendan</u>. Esta situación me obligó a ser más flexible en la revisión de tareas, actividades, etc., cosa que *no me gusta*.

Pero también reconoce emociones positivas, como el orgullo al ver que sus estudiantes continuaron su educación escolar y se encuentran ya cursando una carrera profesional, y aún más, se siente satisfecho cuando ellos reconocen el papel que ha jugado para que se encuentren ahí.

> **P_A**: *Me hace sentir orgulloso* de mi trabajo cuando encuentro a mis ex-alumnos estudiando sus carreras, me saludan y me dan las gracias por lo que les he enseñado, esto me da *una satisfacción enorme*, porque reconocen mi trabajo.

El segundo caso involucra a P_B, un profesor con un amplio conocimiento emocional, quien reconoce que la relación afectiva que tiene con sus estudiantes ha favorecido la relación profesor-estudiante en el aula de clases, y comenta sobre el aprecio que sus estudiantes le demuestran, mismo que es correspondido por él. Creemos que esta situación la favorece la personalidad del profesor y la edad de los estudiantes, ya que en los primeros años escolares, éstos tienden a ser más afectivos y sociables, con el paso de los años este comportamiento va cambiando.

> **P_B**: ...Y cierro *con el fruto más dulce y que más he saboreado*: el aprecio de mis estudiantes. Este hecho siempre lo he tomado como la *fuente que me alienta y me empuja para ser mejor cada día*. Esta estrecha relación afectiva que logro establecer con la mayoría de mis estudiantes desde un inicio es un componente positivo de mi práctica docente. Ellos comúnmente expresan de manera abierta sus sentimientos hacia mí y *les gusta mucho que les dé un abrazo*. En la hora del recreo no quieren despegarse de mí, quieren seguir platicando, pero no sobre lo que estudiamos en el aula, sino de nuestras vidas.

El tercer profesor es P_C un docente de nivel bachillerato que se siente contento por la labor que realiza, sorteando las malas prácticas de sus estudiantes. En su discurso se da evidencia de la tolerancia que practica en la clase de matemáticas, particularmente en los cursos de Cálculo, a los que en la mayoría de los casos los alumnos llegan con conocimientos muy escasos de Aritmética y Álgebra que, como se sabe, son necesarios para el estudio y comprensión del Cálculo. Comenta que en su institución es muy común que algunos profesores de matemáticas no impartan sus cursos y dejen a los estudiantes sin clases, fomentando así malas prácticas en los últimos. Él lucha contra estas malas prácticas, asiste con puntualidad a sus cursos, no se muestra autoritario con los alumnos, pero si se hace respetar, los escucha y responde a sus preguntas. Este comportamiento ha desencadenado en una relación de confianza de sus alumnos.

> **P_C**: Trato de combatir con hechos las malas prácticas que por costumbres se han hecho hábitos, tanto en profesores como en alumnos. Trato de estar siempre puntual

en el aula, preparo mi clase, no me impongo a los estudiantes, los escucho, *no me molesta* que me pregunten lo mismo y repetir la explicación del tema cuantas veces sea necesaria, creo que eso les ha generado un cierto *grado de confianza* en mí... Esta situación me hace *sentir bien* con mi trabajo.

El último de los casos es P_D, un profesor novel de nivel secundaria cuyo conocimiento emocional lo llevó a modificar su práctica docente. Este profesor no tiene formación docente, pero si el perfil para impartir matemáticas, es arquitecto. Su caso es ejemplar y digno de ser mencionado. Al aceptar trabajar como docente de matemáticas se dio cuenta que las matemáticas que conocía no eran suficientes para impartir clases, esta situación le desencadenaba emociones negativas. En cada clase que desarrollaba, sentía temor, agobio y estrés, signos claros de ansiedad matemática.

P_D: Cuando inicié en segundo año de secundaria como mi conocimiento de la matemática era muy poco *me sentía frustrado* por no poder enseñar más...En mi caso el desconocimiento de algo *me da temor y ese temor me agobiaba*, ese agobio creo que se notaba en la clase con mis alumnos porque estaba *molesto, irritable*, no me concentraba.

Ser consciente de su exiguo conocimiento de la matemática y de las emociones que esto le ocasionaba, llevó a P_D a buscar ayuda para mejorar como docente, y decidió ingresar a una Maestría en Docencia de la Matemática. Al estar cursándola, recibió apoyo de sus profesores y compañeros, además de un proceso de acompañamiento para regular sus emociones. En particular, el acompañamiento lo llevó a modificar su práctica docente y al reforzar sus conocimientos matemáticos adquirió seguridad para conducir sus clases (García-González, y Martínez-Sierra, 2018).

P_D: Yo creía que ser maestro de matemáticas era muy difícil y agobiante, hasta llegué a pensar que yo no servía para eso, pero ahora sé que se puede llegar a disfrutar ser profesor... yo busqué prepararme más en el tema, me propuse estudiar una Maestría en Docencia de la Matemática que me dio las herramientas y la *seguridad* que requería para desempeñarme en el ámbito de la educación matemática.

El caso de ansiedad matemática de P_D puede ser representativo de profesores noveles, quienes, aunque comprometidos con su labor, en sus primeros años experimentan emociones negativas, mismas que superan con el paso de los años (Anttila, Pyhältö, Soini y Pietarinen, 2016). Este caso resulta especial por dos razones, él no tenía la formación para ser docente de matemáticas y se inscribió en una Maestría en Docencia de la Matemática para convertirse en profesor de matemáticas. De su historia podemos aprender que la ansiedad matemática se puede aliviar cuando hay un reconocimiento explícito de quien la padece y disposición para hacerlo.

Resumiendo lo encontrado, podemos observar que la teoría OCC y la perspectiva fenomenológica resultan útiles para conocer y describir las emociones, y las situaciones que las desencadenan mediante los dibujos y las narraciones dadas por los profesores en estudio. Valoraciones como las declaradas por P_D al momento de reconocer sus falencias docente de matemáticas, evidencian la presencia de factores éticos, morales, sociales, y psicológicos que emergieron al evaluar su propio conocimiento profesional como docente de matemáticas, habida cuenta de sentirse frustrado, temeroso y hasta agobiado por la valoración de no poder enseñar más, situación ética que marcó el hecho de tomar la decisión de prepararse mejor en matemáticas, a fin de controlar las emociones que le causaban irritabilidad y hasta falta de concentración. Situaciones como ésta se enmarcan en el contexto sociocultural de la clase que también se evidencia en el caso de P_A, aunque ahora se concreta con una tendencia conductual de los estudiantes al no hacer efectiva la entrega de tareas en el tiempo acordado. Asuntos de esta naturaleza producen insatisfacciones que decantan en descontentos sociales, en este caso, por algunos padres de los estudiantes quienes emiten opiniones que causan malestar de orden psicológico y hasta agitaciones físicas que pueden delatarlo ante otros miembros de la clase. Incluso, pueden afectar el juicio del profesor, si decidiera no ser tolerante ante estas situaciones asociadas con su estado de ánimo.

En ambos casos, se marca un referente cultural que obliga a regular el comportamiento y las acciones de los sujetos interactuantes en la dinámica de la clase, de manera que las respuestas emocionales pueden girar en muchas direcciones, según la experiencia emocional que posean los protagonistas de la clase. En relación con el afecto, se puede notar que la situación narrada por P_B es grata para él y para sus estudiantes por el hecho de estar cargada de emociones positivas. Eso se acopla a un referente psicológico detectado en la personalidad del profesor y la de sus estudiantes. Todo eso genera un proceso de valoración favorable y manifiesto en la satisfacción de ser cada día mejor.

A MANERA DE CIERRE

La pretensión de este escrito ha sido la comunicación de resultados de investigación sobre las emociones de docentes, desde el área de la Matemática Educativa. Se han mostrado las emociones más frecuentes que emergen en las clases de matemáticas y lo que las desencadenan, guiados siempre por la teoría OCC y por las vivencias de los participantes conocidas a través de dos técnicas que pueden ayudar al profesor a alfabetizarse sobre su conocimiento emocional, lo que implica el reconocimiento de las emociones que se experimentan en clase y las situaciones que las desencadenan. Desde esa experiencia se puede concluir que el conocimiento emocional permite:

1. Regular nuestras emociones, una vez que somos consciente de ellas, baste como ejemplo el caso del profesor P_D, quien padecía de ansiedad matemática debido a su poco conocimiento matemático, una vez que lo fortaleció, ganó seguridad, misma que se manifestó en sus clases de secundaria y en la relación con sus estudiantes.
2. Ayudar a los estudiantes a conocer sus propias emociones, explicarles que es sano experimentar emociones en el salón de clases, porque es algo natural en los seres humanos. Desde allí, podemos asistirlos a que ellos le den un nombre a eso que sienten, a separar las emociones negativas de las positivas y ayudarlos a reconocer qué puede desencadenar cada tipo de emociones, y las acciones que en consecuencia se deben tomar para tener una sana vida emocional. A futuro, esto fomentará la formación de seres capaces de tomar decisiones acertadas en su vida, con una conciencia plena de sí mismos.

En relación con lo metodológico se hace necesario resaltar las bondades del paradigma fenomenológico interpretativo, puesto que permitió hurgar en la interioridad de los profesores de matemáticas que formaron parte del grupo de estudio. Desde ese lugar epistemológico y con apoyo de lo dibujado y narrado por ellos, se pudo dar cuenta de sus experiencias, visiones y percepciones aderezadas por sus contextos particulares de clases, teniéndose la seguridad de que de todos esos insumos, cargados de significados, emergieron de la realidad donde se encuentran inmersos.

Tenemos claro que estudiar las emociones, su naturaleza y las situaciones que las desencadenan siempre será una tarea exigente y, por ende, su conocimiento profundo no siempre puede ser develado con la debida finura. Manejar los estados emocionales tampoco es una tarea fácil, máxime cuando estamos claros de las dificultades que existen para dominarlas o controlarlas, debido a que pueden secuestrar hasta la razón de los sujetos. Por tanto, consideramos que quedan muchas conjeturas abiertas a solicitud de su propia esencia, en tal sentido, recomendamos; (a) ahondar en trabajos donde la línea fuerte sean los factores emocionales intrínsecos ligados con las matemáticas, penetrando, con rigor, en los fenómenos y reacciones relacionadas con la mente y el cuerpo, en virtud de su carácter complejo y difuso; y (b) atender la construcción y aplicación de instrumentos que puedan soterrar y medir, desde diferentes vértices y miradas epistemológicas, aspectos como la ansiedad matemática y la aversión hacia la matemática, en vista de que quedan muchos velos por quitar, sobre todo en lo referido a la aversión que, como se sabe, debe ser atendida con urgencia, habida cuenta de conocer la presencia de un importante contingente de estudiantes que rechazan y odian a las matemáticas y suelen trastornar la actuación de los docentes que las enseñan (García-González y Martínez-Sierra, 2018). Calle (2002) advierte que además de perturbar la mente, la aversión "es una actitud…de rechazo, resistencia, conflicto, oposición y acritud, que puede derivar en animadversión, odio, ira, malevolencia, afán de venganza, irritabilidad crónica, agresividad e incluso violencia" (p. 59). Todo esto puede colocar a los estudiantes en condición de irascibles, lo cual representa una situación angustiante y compleja a la que tiene que arrostrar el docente de matemáticas.

REFERENCIAS

Aguilar, M., Rosas, A., Zavaleta, J. y Romo-Vázquez, A. (2016). Exploring high-achieving students' images of mathematicians. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 527-548.

Albrecht, K. (2006). *Inteligencia social*, (G. Dols, Trad.). Javier Vergara Editor (Trabajo original publicado en 2006).

Anttila, H., Pyhältö, K., Soini, T. y Pietarinen, P. (2016). How does it feel to become a teacher? *Emotions in Teacher Education. Social Psychology of Education*, *19*(3), 451-473.

Arias Cardona, A. y Alvarado Salgado, S. (2015). Investigación narrativa: apuesta metodológica para la construcción social de conocimientos científicos. *CES Psicología*, *8*(2), 171-181.

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 311-328. http://doi.org/10.1007/s10649-010-9260-7.

Calle, R. (2002). *Las zonas erróneas de tu mente*. Ediciones Temas de Hoy S. A.

Connelly, M. y Clandinin, J. (1990). "Stories of experience and narrative inquiry". *Educational Researcher*, *19*(5), 2-14.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T. y Sabena, C. (2012). "Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics". *Nordic Studies in Mathematics Education*, *17*, 3-4.

Damasio, A. (2009). *En busca de Spinoza. Neurobiología de la emoción y los sentimientos*. (J. Ros, Trad.), Editorial Crítica S. L.

De Bellis, V. y Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 131-147.

Di Martino, P. y Sabena, C. (2011). "Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future". In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI* (pp.89-105). Tallinn University.

Di Martino, P. y Zan, R. (2010). "Me and maths: towards a definition of attitude grounded on students' narratives". *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 27-48.

Di Martino, P. y Zan, R. (2011). "Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions". *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, *43*(4), 471-482.

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales: Instruments designed t-o measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(5), 324-326.

Font, V. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria. En M. Marín, G. García, L.J. Blanco y M. Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV,* (pp. 165-194). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

García-González, M. y Martínez-Sierra, G. (2016). "Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio". En J.A Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T Sánchez,

P. Hernández, C. Fernández, F.J Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). SEIEM.

García-González & Pascual-Martín (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, *8*(15), 133-148.

García-González, M. S. y Martínez-Sierra, G. (2018). Diego: Una historia de superación de ansiedad matemática en profesores. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXII (pp. 221-230). SEIEM.

Gaxiola, P. (2005). *La inteligencia emocional en el aula*. Segunda edición. Aula nueva. SM.

Goldin, G., Hannula, M., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middleton, J., Pantziara, M. y Zhang, Q. (Eds.). (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions*. Springer.

Goleman, D. (1996). *La inteligencia emocional*, (E. Mateo, Trad.). España: Javier Vergara Editor (Trabajo original publicado en 1995).

Goleman, D. (2006). Inteligencia social. La nueva ciencia de las relaciones humanas. Editorial Kairós.

Gómez, R., Blanco, L., Cárdenas, J. y Guerrero, E. (2012). Desencadenantes del estrés y emociones en docentes de matemáticas de secundaria. Estudio realizado con una escala de elaboración propia. En V. Mellado, L. Blanco, A. Borrachero y J. Cárdenas (Eds), *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas*, volumen I; (pp.45-66), Grupo de Investigación DEPROFE.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R., y Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. P. Park, y D.Y. Seo (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 153-156). Seoul, Korea.

Henrion, C. (1997). *Women in Mathematics: The addition of difference*. University Press, Bloomington and Indianapolis.

López, C. y Valls, C. (2013). *Coaching educativo, las emociones al servicio del aprendizaje*. SM.

Maaß, J. y Schlöglmann, W. (2009). *Beliefs and attitudes in Mathematics Education. New Research Results*. Sense Publishers Totterdam.

Mager, R. (1984). *Developing attitude toward learning*. Kogan.

Martínez- Miguélez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa* (2ed.). Trillas.

Martínez-Padrón, O. J. (2008). Actitudes hacia la Matemática. *Sapiens*, *9*(2), 237-256.

Martínez-Padrón, O. J. (2016). ¿Qué dicen los docentes paraguayos en cuanto al afecto en el aprendizaje de la Matemática?: Una mirada desde el Curso Ñanduti. *UNIÓN*, *45*, 24-43.

Martínez-Padrón, O. J. (2011). *El afecto en el aprendizaje de la Matemática, Texto de Curso Ñanduti: Paraguay, Curso Iberoamericano de Formación Permanente de Profesores de Matemática. Centro de Altos Estudios Universitarios*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI). Andalucía, España.

Martínez-Padrón, O. J., Contarino, A. y Ávila, J. (2015). Aspectos emocionales que impactan el desempeño de los estudiantes en el aula de Matemática. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, 181-189. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Martínez-Sierra, G. y García-González, M. (2014). "High school students' emotional experiences in mathematics classes". *Research in Mathematics Education 16*(3), 234-250.

Martínez-Sierra, G. y García-González, M. (2016). "Undergraduate mathematics students' Emotional experiences in linear algebra". *Educational Studies in Mathematics 91*(1), 87-106.

Martínez-Sierra, G. & García-González, M.S. (2017). Students' emotions in the high school mathematics classroom: The appraisals in terms of a structure of goals. *International Journal of Science and Mathematics Education 15*(2), 349–369. DOI: 10.1007/s10763-015-9698-2.

McLeod, D. B., y Adams, V. M. (Eds.) (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer Verlag.

Ortony, A., Clore, G. L., y Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). España: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988).

Philipp, R. (2007). "Mathematics teachers' beliefs and affect". In Frank Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Information Age Publishing.

Picker, S. y Berry, J. (2000). "Investigating pupils' images of mathematicians". *Educational Studies in Mathematics*, *43*(1), 65-94.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (J. Zagazagoitía, Trad). Editorial Trillas.

Rodríguez, J., Guevara, A. y Viramontes, A. (2017). Síndrome de burnout en docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, *7*(14), 45-67.

Schoenfeld, A. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem-solving skills. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 345-395). Academic Press.

Schutz, P., y Zembylas, M. (2009). Introduction to advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives. En P. Schutz, M. Zembylas (Eds.), *Advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives.* Springer.

Solomon, R. (2008). The philosophy of emotions, In M. Lewis, J. Haviland-Jones, y L. Feldman (Eds), *Handbook of emotions*, 3rd ed, (pp. 3-16). The Guilforf Press.

Stets, J., y Turner, J. (2008). The sociology of emotions, In M. Lewis, J. Haviland-Jones, y L. Feldman (Eds), *Handbook of emotions*, 3rd ed, (pp. 32-46). The Guilforf Press.

Ursini, S. y Sánchez, G. (2008). "Gender, technology and attitude towards mathematics: a comparative longitudinal study with mexican students". *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, *40*(4), 559-577.

Yazlik, D. y Erdogan, A. (2017). "Image of the high school students towards mathematicians". *Journal of educational and instructional studies in the world*, *6*(4), 1-14.

María S. García González

Dirección: Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero, México; mgargonza@gmail.com

Teléfono: 01 (747) 47 193 10 Ext. 4138 y 4137.

 DOI: 10.24844/EM3201.08

Álgebra *vs.* Aritmética. Una propuesta didáctica que posibilita la construcción problematizada de un espacio matemático de trabajo constructivista en el aula

Algebra vs Arithmetic. A didactic proposal that allows the problematized construction of a mathematical space of constructivist work in the classroom

Eugenio Ariel Valiero[1]

Resumen: Actualmente (finales de la segunda década del siglo XXI), se observa que, en las propuestas didácticas de las prácticas docentes de enseñanza secundaria, se ha desplazado la actividad aritmética escolar para dar mayor exclusividad a la enseñanza matemática a través del Álgebra. Este proceso se ha descripto como *algebrización* de la educación matemática escolar, que incluso se extiende más allá de la propia actividad de la Aritmética, y abarca también la didáctica de la Geometría, del Análisis Matemático, y de la Estadística.

El siguiente trabajo constituye un aporte reflexivo acerca de posibles propuestas didácticas que prescindan de la tarea con generalizaciones procedimentales, o algoritmos, y del uso de diferentes lenguajes y representaciones correspondientes al Álgebra. Para superar la situación descripta que enfatiza la enseñanza algebraica, se sugiere abordar la Aritmética en el contexto áulico de producción de saberes significativos (vinculado esto al constructivismo) en trabajo de colaboración entre pares estudiantes. En él, se abordarán dos propuestas: una efectivamente puesta en práctica con un grupo de 5 estudiantes de 2º año de educación secundaria, y la otra, como sugerencia a desarrollar.

Fecha de recepción: 22 de junio de 2018. **Fecha de aceptación:** 06 de noviembre de 2019.

[1] Especialista Docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria. Ministerio de Educación de la Nación-Instituto Nacional de Formación Docente (MEN-INFoD). Profesor del Instituto de Enseñanza Superior "Dr. Luis Federico Leloir". Estudiante de la Maestría en Didáctica de las Ciencias/Matemática, Universidad Nacional del Rosario (UNR), Argentina. eugeniovaliero@gmail.com. orcid.org/0000-0001-9392-0882

Palabras clave: *Álgebra. Algebrización. Enseñanza de la Aritmética. Educación secundaria. Propuesta didáctica.*

Abstract: At the moment (end of the second decade of the 21st century), it is observed that, in the didactic proposals of teaching practices of secondary education, the school arithmetic activity has been displaced to give greater exclusivity to the mathematical teaching through the Algebra. This process has been described as algebrization of school mathematics education, which even extends beyond the activity of Arithmetic itself, and also covers the didactics of Geometry, Mathematical Analysis, and Statistics.
The following work constitutes a reflexive contribution about possible didactic proposals that do without the work with procedural generalizations, or algorithms, and of the use of different languages and representations corresponding to the Algebra. To overcome the described situation that emphasizes algebraic teaching, it is suggested to approach Arithmetic in the aulic context of production of significant knowledge (linked to constructivism) in collaborative work between student peers. In it, two proposals will be addressed: one effectively implemented with a group of 5 students in the second year of secondary education, and the other, as a suggestion to develop.

Keywords: *Algebra. Algebrization Teaching of Arithmetic Secondary education Didactic proposal.*

INTRODUCCIÓN

Diferentes autores, entre ellos Irma Saíz, y Silvia Etchegaray (2016), señalan que la formación en competencias matemáticas, en los distintos niveles de los sistemas educativos, se ha centrado a lo largo de los años en el denominado *proceso de algebrización*, según el cual se construye una versión escolar de la matemática, basada en la producción de mecanismos de pensamiento y acción, donde se abordan con un enfoque desde el Álgebra las estructuras y propiedades de objetos matemáticos a ser enseñados. La situación no solo se expresa respecto de la didáctica del Álgebra, sino que se plantea también respecto de la enseñanza de la Geometría, del Análisis Matemático, y de la Estadística (Saiz, y Etchegaray, 2016).

En tal sentido, puede admitirse, desde una mirada constructivista, que la algebrización del quehacer aritmético en el aula, se vería enriquecida en caso en que se priorizaran niveles de abordaje que comprendan las enseñanzas y los aprendizajes.

Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y, Lasa (2015), describen 3 niveles de razonamiento algebraico, basados en distinciones ontosemióticas: presencia de objetos algebraicos intensivos, tratamiento de dichos objetos mediante operaciones y transformaciones con propiedades de estructuras algebraicas, y la presencia de distintos tipos de lenguajes ya sean natural, icónico, gestual o simbólico (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray, y Lasa, 2015).

Visto de esa manera, todo proceso de algebrización de la Aritmética, incluye dichos niveles al enseñar contenidos aritméticos. Desde esa perspectiva, en las aulas de educación secundaria se encontrarían propuestas didácticas que vincularan la enseñanza de la Aritmética a pautas de resolución de problemas mediante algoritmos convencionales, referidos a relaciones entre operaciones y a tipologías que se incorporarían a la actividad matemática como modelos prácticos mecanicistas e incuestionables; lo propio, en ese marco, es que tales propiedades se acepten sin demostración, o que se den secuencias de resolución estandarizadas, o generalizaciones técnicas como expresión de la algebrización, en lugar de trabajarse en el aspecto numérico.

Es decir, que los formatos de representación y operación, los distintos lenguajes, los principios, las relaciones o propiedades aritméticas que representan situaciones o modelizan un problema, por lo general, son dados, externos a la actividad de resolver, no se construyen en el aula para el caso que se resuelve, sino que son creados con anterioridad y, extemporáneos al proceso no solo de aprendizaje sino también al de enseñanza; están allí desde antes que existiera o se presentara a los estudiantes el problema, listos para ser usados, para dar respuesta a intereses matemáticos preexistentes.

Dicho panorama, conforma un marco didáctico de referencia donde lo que se aprende deja fuera la posibilidad creativa de producir las propias referencias y afirmaciones para contextualizar lo que los profesores enseñan y lo que los estudiantes aprenden. Se establece así un entorno de fundamentación técnica, lo cual significa que el conocimiento aritmético se valida mediante un conjunto de normas de operación, por procedimientos pautados con cierta anticipación a la enseñanza y al aprendizaje.

Esto ocurre muchas veces cuando las propiedades aritméticas son transmitidas en forma acrítica y a-reflexiva. Un ejemplo lo constituye la aceptación de la muy difundida, en la formación escolar, propiedad que indica que "los números cuya última cifra es 0 o 5, son divisibles por 5". Este criterio, más allá de su validez general, se enseña con carácter acrítico, incuestionable, y pareciera dar cuenta de una propiedad a la cual en el aula solo nos limitamos a corroborar cada vez. Esta modalidad de trabajo y admisión del conocimiento se podría atribuir más que a un sistema matemático, a un sistema de creencias escolares que se aceptan con carácter técnico y de saber operativo.

De acuerdo a lo que señalan los investigadores Cortés, Hitt, y Saboya (2016), es necesario generar espacios de trabajo matemático escolar que fortalezcan el pensamiento aritmético-algebraico. En ese sentido, caracterizan al pensamiento aritmético como aquel que tiene que ver con el concepto y sentido asignado a lo numérico, al significado de las operaciones, al control aritmético, al cálculo mental y a la lectura y escritura de problemas como habilidades aritméticas (Cortés, Hitt, y Saboya, 2016).

Los mismos autores, citando a Kaput (2000, 2008), mencionan que: *(...) el pensamiento algebraico debe comportar en general dos aspectos principales: 1. Realizar y expresar la generalización de los sistemas simbólicos de manera más formal y convencional, y 2. Razonar con formas simbólicas, incluyendo la manipulación sintáctica guiada de estas formas simbólicas* (Cortés, Hitt, y Saboya, 2016). Debe señalarse además que, las investigaciones de Cortés, Hitt, y Saboya, se dirigen no a pregonar la enseñanza de la Aritmética separada de la del Álgebra, como aseguran se ha venido haciendo durante muchos años para recortar el currículum escolar con contenidos para educación primaria y secundaria, respectivamente, sino a sugerir una didáctica holística entre ambas, desde los primeros años de escolarización (Cortés, Hitt, y Saboya, 2016).

Otros investigadores, tales como Tarriga, y Sierra (2014), han desarrollado propuestas metodológicas de enseñanza del Álgebra para pasar de lo concreto a lo abstracto, en procesos mediados por materiales manipulables, y materiales de tecnología digital (Tarriga, y Sierra, 2014).

No obstante, se observa que las prácticas en el aula han radicalizado la tendencia a sostener el conocimiento matemático a partir de generalizaciones más del lado del Álgebra, exagerando la capacidad de abstracción como vía de conocimiento, lo cual disminuye la significatividad en la clase de Matemática del pensamiento aritmético, y olvidando que el verdadero problema cognitivo debería radicar en generar preguntas acerca de si son siempre válidas ciertas reglas, en plantearse la necesidad de conocer cómo se obtienen las mismas, en poder decidir en qué segmento del campo numérico son aplicables o verdaderas, en abocarse a la búsqueda de los criterios utilizables para argumentar su validez, y en generar un entorno de enseñanza y de aprendizaje problematizado.

LA PROBLEMATIZACIÓN COMO ESTRATEGIA ESCOLAR

En contraposición a lo dicho, es dable pensar, entonces, en propiciar un contexto de producción del quehacer matemático problematizado en la escuela, lo cual demandaría, según Patricia Sadovsky y Carmen Sessa[2] (2005), centrar la acción en los procesos y actividades matemáticos posibilitados en entornos de colaboración grupal; es decir, fomentar la participación en comunidades matemáticas, basando sus recomendaciones en la denominada *Teoría de las Situaciones Didácticas*, de Brousseau, desde donde se admite que el aprendizaje matemático se construye en vínculo con los contextos culturales y sociales. (Sadovsky y Sessa, 2005).

La actividad matemática a la que se refieren las autoras remite a un proceso donde es poco habitual la incorporación explicitada y consciente de saberes didácticos acerca de distintas complejidades cognitivas, por la que, en interacción con otros, se adquieren habilidades para: conjeturar, argumentar, ejemplificar, contra-ejemplificar, contrastar, validar, generalizar, establecer condiciones, definir, simbolizar, representar, contextualizar, descontextualizar, ajustar, justificar, analizar posibilidades, demostrar. Todo ello, a partir del trabajo matemático que debe sostenerse, y retroalimentar en doble sentido el pensamiento propio de cada estudiante y el de sus pares en trabajo colaborativo. Es decir, se desconocen los ordenamientos, las etapas, los momentos y las lógicas de secuenciación de mecanismos, que hacen que dichas habilidades evolucionen desde lo más simple a lo más complejo.

PROPUESTA DIDÁCTICA REAL DE TRABAJO ARITMÉTICO EN EL AULA

Interesaba, al poner en práctica esta propuesta, conocer qué ocurriría respecto del trabajo aritmético en contexto escolar mediante actividades de resolución de problemas; observar los tipos de interacciones entre pares de estudiantes, y las

[2] Docentes e investigadoras del grupo a cargo del Postítulo destinado a Docentes de Educación Primaria SEGCBA.

elaboraciones de trabajo matemático grupal. Para ello se propuso a un grupo de 5 estudiantes de 2º año de la Escuela Secundaria, una situación a resolver formada por 3 consignas, entregadas de a una a la vez, en formato escrito, y leídas en voz alta:

(a) Para dirigirse a un aeropuerto, un contingente de 96 turistas se moviliza de la siguiente manera. Por cada turista que viaja en un taxi, 5 viajan en un autobús. ¿Cuántos turistas utilizan cada medio de transporte?
(b) Si la relación ahora fuera siempre de 4 a 6, ¿qué cantidad de turistas podrían formar el contingente, movilizándose de esa manera?
(c) Encontrar una propiedad aritmética que permita caracterizar todas las cantidades posibles de turistas que puede tener un contingente conservando siempre la relación de 4 a 6. (Saiz y Etchegaray, 2016).

Los estudiantes fueron seleccionados al azar, de un grupo escolar urbano de 28 alumnos cuyos rendimientos académicos, en promedio, no presentaban particularidades sobresalientes, es decir que los mismos no eran alumnos con los mejores rendimientos de aprendizajes, pero tampoco presentaban problemáticas al respecto. Debe aclararse, además, que la elección no se realizó teniendo en cuenta afinidades personales o frecuencia de agrupamiento entre pares en las tareas de aulas; y que, la escuela donde se aplicó la secuencia es una institución pública que pertenece a un barrio céntrico de la ciudad de Gualeguay, provincia de Entre Ríos (Argentina), que promueve como modalidad de enseñanza y de aprendizaje en trabajo en grupos o equipos de estudiantes.

Los alumnos aceptaron rápidamente participar de la actividad para lo cual se les comunicó que se retirarían del aula y que resolvería en un aula apartada sin la presencia del resto de los compañeros o de otros estudiantes de la escuela, y fuera de la clase de Aritmética. También se les aclaró que no constituía una evaluación, que no serían calificados, y que podían disponer de los elementos que comúnmente utilizaban en la clase, por lo que llevaron consigo los útiles tales como hojas, lápices, y calculadora. Se les dijo además que podían conversar entre ellos, y registrar lo que fueran necesitando a medida que resolvían, y que dispondrían de no más de 80 minutos. El docente aplicador de la secuencia fue un profesor de Matemática, estudiante de un curso de especialización superior en enseñanza de la Matemática para la educación secundaria, distinto al docente habitual del grupo seleccionado, que procuró intervenir solo para satisfacer consultas y hacer aclaraciones no procedimentales.

Mediante la primera consigna, se esperaba que los estudiantes abordaran la pregunta y construyeran un modelo aritmético propio respecto de las posibilidades de agrupar a 96 viajantes en taxi o autobús, de acuerdo a las condiciones dadas y mediante la interacción entre pares. Era posible que los estudiantes tomaran el problema como un simple caso de divisibilidad, o que se cuestionaran respecto de los agrupamientos que se debían hacer, y llegaran a advertir que debían construir criterios de solución basados en más de una posibilidad. Respecto del trabajo disciplinar se preveía una tendencia a resolver preconcibiendo que habría una fórmula para ello, dado que es esa una característica de la algebrización.

La segunda consigna, sugería producir cambios en las condiciones que acentuaran la perspectiva no algebrista. En ambas se ponía en juego también la importancia de concebir respuestas no únicas, en enriquecer la participación de todos los integrantes del grupo con el aporte de cada uno, y en analizar lo que ocurriría respecto de la validez de lo que fueran afirmando respecto de la/s respuesta/s a la pregunta. Se buscaba, además, que los estudiantes se cuestionaran si se podría tratar de afirmaciones para un caso, o para unos casos particulares, o para todos los casos, si se efectuaran nuevas modificaciones. La última consigna (c), explicitaba dicho cuestionamiento, a la vez que diera cuenta de las habilidades de algebrización por parte de los estudiantes.

ANÁLISIS DE DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Ante la consigna (a), los estudiantes inicialmente demoraron en organizar su trabajo, debiendo leer varias veces, y formularon sus primeras anotaciones de maneras difusas y desordenadas. En una etapa inicial no se consultaron entre ellos, pero rápidamente la mayoría hizo intentos de escribir múltiplos de 5. Luego de leer varias veces la consigna en forma individual, algunos de ellos se abocaron inmediatamente a localizar una expresión o fórmula que colaborara con la resolución de la consigna, y escribieron datos relacionados con el número de turistas (*96*), y simbolizaciones referidas a las cantidades mínimas de pasajeros y a la clase de transporte (*1T......5A*). Luego de unos minutos algunos iniciaron la construcción de una tabla que vinculaba al número 1 con el 5, al 2 con el 10, al 3 con el 15. Esta tarea ya fue más abierta a la participación colectiva. El entusiasmo hizo que ese proceso se comunicara entre los estudiantes y en poco tiempo construyeran una tabla completa que resolvió la situación:

1	*5*	*6*
2	*10*	*12*
3	*15*	*18*
4	*20*	*24*
5	*25*	*30*
...	...	...
...	...	...
16	*80*	*96*

Colectivamente, mediante la participación de tres estudiantes, propusieron la regularidad advertida por la que se completaban las dos primeras columnas. La tercera columna, correspondiente a la suma de los elementos vinculados en las dos primeras, fue agregada y completada posteriormente, siendo advertida la importancia informativa de su agregado, por uno solo de los estudiantes. Los mismos acordaron como válido el procedimiento y se produjo un momento de mayor confianza en la propuesta, observaciones, y agregados individuales para dar respuesta a la actividad planteada.

En tal sentido, Cambriglia, Sadovsky, y Sessa (2010), proponen pensar que la interacción entre docentes y alumnos, y entre alumnos, propicia la aparición de inquietudes, puntos de vista, acepciones personales, y posicionamientos que establecen el ámbito de construcción de las generalizaciones (Cambriglia, Sadovsky, y Sessa, 2010).

Por otra parte, si bien el registro tabular validó el procedimiento, no pudo precisarse un enunciado general que completara la generalización, no al menos explícitamente, puesto que sí se establecieron generalizaciones; una de ellas es la que asigna a cada grupo de pasajeros la suma entre 1 y 5, que, a la vez genera la secuencia de la tercera columna, donde la "ley" es la suma de 6 en 6.

Siguiendo lo expresado por las mismas autoras mencionadas anteriormente, es posible identificar rasgos históricos institucionales, respecto de la matemática escolar, en las intenciones iniciales, de estos alumnos, de encontrar una fórmula para que rápidamente diera la solución. Esto se podría vincular a las experiencias de aprendizaje matemático vividas con anterioridad en cada trayectoria estudiantil. También, se podría asociar a la afirmación que se hiciera unos párrafos atrás, por la cual la formación académica en la escuela secundaria refiere a conocimientos técnicos, que solicitan del último nivel de abstracción matemática, como lo es el de algebrización, en desmedro de los procesos de aritmetización, donde se pretende un abordaje numérico, de sus relaciones y de las propiedades de las operaciones.

De todas formas, el modelo aritmético (tabla, sucesiones numéricas), donde se prioriza el control de los significados del contexto numérico (número de pasajeros, cantidades, situación problemática, sumas), prevaleció por sobre la intención de elaborar un modelo algebraico por parte de algunos estudiantes. Esto se hizo más evidente en el momento en el que encontraron un criterio de regularidad de construcción de la tercera columna. Pudo advertirse, además, que los estudiantes tuvieron gran participación en la producción y desglose de la información que requería la solución, constituyéndose en integrantes productores de conocimiento contextualizado a la situación apropiada por el grupo.

Algunos aspectos a tener en cuenta son los que se asocian a cuestiones de vocabulario y lenguaje. Los estudiantes consultaron al profesor el significado de algunas palabras presentes en las consignas, por ejemplo, el de "contingente", e incluso dijeron desconocer el término "aritmético", pero no manifestaron inquietudes respecto de lenguajes algebraicos o acerca de registros de representación. Debe mencionarse además que el momento de la construcción de la estrategia de resolución contó con instantes de comunicación entre estudiantes donde se proponían "saltear pasos", "sumar todo", "sumar los grupos de 5", "contar hasta llegar a...". La actividad exploratoria más destacada se generó en los momentos iniciales donde se produjo el diálogo entre pares con pruebas y anotaciones de multiplicaciones para aproximarse a 96.

No obstante, no se presentaron elementos discursivos claros de formulación de conjeturas por parte de los estudiantes (excepto la tabla donde se sistematizó el procedimiento particularizado en cada uno de los casos); es decir, que no manifestaron en lenguaje coloquial verbalmente o por escrito, otras formas de formulaciones de enunciados y afirmaciones verificables o contrastables.

De acuerdo a lo anteriormente dicho, lo deseable hubiera sido que, como afirman María Elena Markiewicz, y Silvia Etchegaray (2006), hubieran surgido conjeturas nutridas, las cuales, según las autoras, constituyen *Primitivas* desde donde las mismas, y sus consecuencias generales, se hacen contrastables frente a conjeturas menores, y así se sostienen o se derriban. Esto puede deberse a lo que anteriormente se dijo respecto de la cultura matemática escolar, que da mayor importancia a los procesos algebraicos, y en menor medida a la construcción de un razonamiento de lo plausible. Al respecto, las investigadoras nos dicen:

> *En el contexto escolar, en particular en la escuela media, no hay demasiados espacios que permitan el desarrollo del razonamiento plausible, la reflexión acerca del mismo y la toma de conciencia de su papel y de su importancia dentro de la matemática.*
>
> *Esto genera en el ámbito de la clase de matemática, una suerte de "confusión argumentativa" producto de la falta de distinción entre distintas formas de validación. (Markiewicz, y Etchegaray, 2006).*

Respecto de la consigna (b), pudieron rápidamente darle solución, en tanto que el procedimiento utilizado fue muy similar, sin necesidad de escribir todos los pares relacionados. Los estudiantes indicaron a partir de dos multiplicaciones (*9x4, y 9x6*), que el número de turistas sería 90. La tabla que exhibieron fue la de los 3 primeros valores, y se mostraron sorprendidos de saber que "sobran 6 turistas".

4	*6*	*10*
8	*12*	*20*
12	*18*	*30*

Si bien advirtieron que la cantidad de turistas sería múltiplo de 10, la respuesta a la consigna (c), se dirigió a encontrar la relación entre los valores de la segunda columna, con los de la primera:

6T/4A = 3/2 *12T/8A = 3/2* *18T/12A = 3/2*

Esto hizo que la suposición obtenida al principio no fuera validada, sino que arribaran a un resultado no apropiado donde la respuesta dependía de condiciones que no explicitaron. Se expone así que la solución a un problema o situación aritmética depende en gran medida de la contextualización numérica, y que, si bien iniciaron un proceso de control sintáctico de la situación modelizada, la algebrización provocó dificultades o inconsistencias por no ser aplicable siempre el resultado obtenido a todos los casos. Esto último no fue advertido ni cuestionado por parte de los estudiantes. La manera de dar solución a la última consigna muestra que en dicho momento se llegó a un cierto margen mayor de algebrización que desde el principio fue en aumento, pero que no logra establecerse concretamente en el tercer nivel del que hablan Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray, y Lasa (2015), puesto que no se construyeron distintos tipos de lenguaje y representaciones que dieran una variedad representativa, comunicacional u ontosemiótica.

Verónica Cambriglia (citada anteriormente), habla también, parafraseando a Mercier (1998), acerca de cierta inversión de roles en el aula, en donde por momentos la acción del alumno se parece a la del profesor, y viceversa. Esos espacios de intercambio no se observaron en la propuesta de la actividad; no más que en forma de oposición ante la inseguridad que presentaron los estudiantes frente a cálculos de algunas multiplicaciones mientras intentaban responder la consigna (b). Uno de los estudiantes dudó de haber multiplicado bien, y en ese momento otro estudiante expresó que ese era el valor correcto: *-9 x 6 es 54… ¿sí?… – Sí. hay que repasar las tablas!*

LA DIVISIBILIDAD COMO POSIBLE PROBLEMA DE CONSTRUCCIÓN DE SABER ALGEBRAICO

Otra actividad como ejemplo para poner en acto el trabajo aritmético de producción que se sugiere en el aula podría ser la que se vincula a la divisibilidad (Teorema Fundamental de la Aritmética). Tómese el caso de los siguientes interrogantes, que se presentan sintéticamente, si haber sido puestos a prueba como actividad en un grupo particular de alumnos, pero que se propone desarrollar a partir de los siguientes planteamientos:

> *Interrogante 1*
> ¿Saben cuántos divisores tienen 5^2 *y* 5^3*? ¿Cuántos divisores tendrá* 5^n*, siendo n un número natural?*
>
> *Interrogante 2*
> *Un número natural tiene exactamente 8 divisores naturales, dos de ellos son 35 y 77 ¿Cuál es el número?* (Instituto Nacional de Formación Docente, 2016).

A partir de cierta exploración numérica podría iniciarse el estudio de los divisores de las potencias segunda y tercera de 5. Estos casos particulares solucionan parcialmente el Interrogante 1, si se admite la divisibilidad de 5^2 entre los únicos divisores naturales 1, 5, y 25, a los que se pueden incorporar los divisores en Z (-1, -5, y -25), es decir serían 3 divisores naturales y 6 divisores enteros. Para 5^3, puede procederse de igual manera, por lo que se reconocen 4 divisores naturales y un total de 8 en el campo de los enteros. Una pregunta que podría surgir es si esos divisores son los únicos, y de qué manera puede confirmarse tal afirmación, o aseverarse. Tal conjetura no quedaría demostrada con un contraejemplo, pero es posible que los estudiantes hagan el intento si es que no poseen la certeza, de localizar otros divisores, sin encontrarlos.

Pero el procedimiento admite otras posibilidades, como lo es el de descomposición de la base de potencia en factores primos, de donde el número de divisores resulta de la suma de divisores primos y las combinaciones posibles entre ellos. Esta conjetura, también requerirá ponerse a prueba.

Se dirá entonces que el trabajo matemático en estos casos, es contextualizado en un problema aritmético, y cuando se desea generalizar los resultados, se hace necesario construir otras conjeturas que pueden obtenerse como extensión del trabajo anterior. Esto significa que el número de divisores para la potencia tercera, cuarta, y sucesivas, posiblemente responda a una regularidad conjeturable, de la que se debe obtener una validación antes de extender la solución a un número n en el exponente de la potencia de 5.

Una alternativa de producción en el aula sería entonces continuar la identificación de los divisores para las "n" primeras potencias naturales:

5^1: 1; 5; -1; -5. (2 divisores en N[3] y 4 divisores en Z[4])
5^2: 1; 5; 25; -1; -5; -25. (3 divisores en N y 6 divisores en Z)
5^3: 1; 5; 25; 125; -1; -5; -25; -125. (4 divisores en N y 8 divisores en Z)
5^4: 1; 5; 25; 125; 625 -1; -5; -25; -125; -625. (5 divisores en N y 10 divisores en Z)
...
5^n: (n+1) en N y (n+1) x 2 en Z. (conjetura solución).

Esta conjetura, que progresa desde una práctica aritmetizada a una construcción algebrizada, requerirá ser verificada, validada y generalizada. La solución así planteada requiere continuar la clarificación del ámbito de validez, y las condiciones bajo las cuales se cumplirá. Los estudiantes seguramente se inquietarían ante afirmaciones referidas a los divisores propuestos de cada potencia, pudiendo cuestionarlos e iniciar procesos de validación que faciliten mayor certeza, y riqueza de producción.

[3] N: número natural.
[4] Z: número entero.

El Interrogante 2, requiere analizar lo que sucede con los divisores conocidos. Si n es el número buscado, y sabiendo que es divisible por 35 = 5 x 7, y por 77 = 7 x 11; luego es también divisible por 5, por 7, y por 11. Se sabe además que todo número es divisible por sí mismo y por la unidad, es decir que 1 también es divisor. Todos los productos de las combinaciones entre los divisores serán divisores. Esto significa que 5 x 11 = 55, lo es. El producto entre 5, 7, y 11 (385), también es divisor de dicho número n puesto que resulta divisible por 35, 55, y 77. Por ser 385 el mayor de los divisores que admite divisores a sí mismo y la unidad, entonces n = 385; quedando el siguiente conjunto de divisores:

1	5	7	11	35	55	77	385

Al igual que para el Interrogante 1, en este caso es necesario que se expliciten las condiciones en las que se cumpliría esta solución, por ejemplo que el enunciado haya solicitado los divisores naturales, los criterios de selección de los factores primos, y las afirmaciones que se fueron imponiendo en el desarrollo, por ejemplo, dar argumentos que validen la afirmación respecto de que, si 35 es divisor, los divisores de 35 son también divisores de n. Éstas, podrían presentarse como limitantes de la producción en clase, o como oportunidad para la formulación de nuevos interrogantes de conocimiento y expansión de propiedades aritméticas, de casos particulares a generales.

CONCLUSIÓN

La Aritmética podría constituirse en una herramienta que posibilite el hacer matemático a la vez que genere una actitud de enseñanza y de aprendizaje significativos, de manipulación y comunicación de objetos de conocimiento de la Matemática escolar, ya sean conceptos, teorías, definiciones, acepciones y condiciones especiales de construcción de saberes en un proceso de exteriorización de propiedades y de relaciones opuesto a la idea simple de "aplicación de técnicas dadas", de algoritmos para resolver, que vincule a las propuestas didácticas con la idea de problematización, es decir, que introduzca posibilidades de preguntarse, por parte de los estudiantes, y de elaborar caminos de hipotetización, validación, y verificación de saberes que en el trabajo matemático se pueden ir construyendo en la tarea de dar solución a un determinado problema aritmético.

Es así que, construir en Matemática en el aula, y particularmente en Aritmética, abriría la posibilidad no solo de resolver significativamente una situación matemática planteada, un determinado problema, una pregunta con contenido aritmético, sino también, como intentó ponerse en práctica en la actividad propuesta, dar lugar a la emergencia de significados, conceptualizaciones, apreciaciones, y a la aplicación de contenidos teóricos aprendidos en la práctica con las consiguientes producciones y concepciones emergentes en la propia tarea de manipulación de objetos matemático por parte de los estudiantes.

En particular, en la actividad propuesta a los alumnos, la secuencia didáctica se presentó bajo la modalidad de resolución de problemas, pero son escasos los elementos que muestran verdaderas interacciones de un proceso altamente significativo entre las personas que intervinieron, ya sean docente y alumnos o alumnos entre sí en interacción de pares, como procesos comunicacionales propios de la modalidad de enseñanza y aprendizaje a través de problemas. También, son escasos los elementos observados que puedan dar cuenta del desarrollo de una tarea netamente constructivista de contenidos aritméticos, puesto que en un primer momento sí surgió la tendencia por parte de los estudiantes de ir en búsqueda de una formulación algebraica.

Construir, en tal sentido, implicaría aplicar saberes previos, y producir nuevos saberes que se ajusten a los requerimientos del trabajo matemático particular, es también un proceso que se construye, y no sin admitir que problematizar, en las enseñanza y en los aprendizajes aritméticos, es instalar interrogantes como práctica habitual, y generar las condiciones sociales de participación colectiva; debe ser parte del proceso natural de adquisición de propiedades, y del contexto matemático productivo en el que lo sabido se ponga en duda y deba ser sometido a pruebas en las actividades grupales entre pares.

REFERENCIAS

Cambriglia, V. Sadovsky, P. y Sessa, C. (2010). *Procesos Colectivos de Generalización*. Publicado en las Memorias de la III REPEM 2010. Santa Rosa, La Pampa. http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem10/memorias/comunicaciones/Trabajos%20Inves/CB%2049.pdf

Cortés, J. C.; Hitt, F.; y Saboya, M. (2016). Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. *Bolema, 30* (54), 240-264. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a12. http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2016000100240&script=sci_abstract&tlng=es

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142. http://funes.uniandes.edu.co/9249/

Instituto Nacional de Formación Docente. (2016). *Clase 06. Continuamos trabajando con la relación de divisibilidad en N y en Z.* Módulo Enseñanza de la Aritmética. Programa Nuestra Escuela. Formación Docente Continua. Especialización docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria. Ministerio de Educación y Deportes de la Nación. Buenos Aires.

Markiewicz, M. E. y Etchegaray, S. C. (2006). *Algunos Resultados de una Investigación Acerca del Razonamiento Plausible o Conjetural.* Memorias de la I REPEM 2006. Santa Rosa, La Pampa. http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Trabinvest/CTI2.pdf

Tarriaga, M; y Sierra, J. (2014). *CONEXIONES ALGEBRAICAS: Metodología de enseñanza-aprendizaje del álgebra para pasar de lo concreto a lo abstracto con el apoyo de tecnología emergente.* Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. 12, 13, y 14 de noviembre de 2014. Buenos Aires. Argentina.

Sadovsky, P., & Sessa, C. (2005). La Conformación de una Comunidad Matemática en un Proceso de Formación de Maestros: un Ejemplo Privilegiado para Conocer Complejidades Acerca de la Clase de Matemática. *Yupana*, *1*(2), 11-24. https://doi.org/10.14409/yu.v1i2.242.

Saiz, I. y Etchegaray, S. (2016). *Clase 01. Iniciación a un estudio didáctico-matemático de la Aritmética.* Módulo Enseñanza de la Aritmética. Programa Nuestra Escuela. Formación Docente Continua. Especialización docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria. Ministerio de Educación y Deportes de la Nación. Buenos Aires.

Eugenio Ariel Valiero

Dirección: Calle: Colón, Núm. 326, Código postal 2840
Ciudad Gualeguay, Entre Ríos, Argentina

CONTRIBUCIÓN A LA DOCENCIA DOI: 10.24844/EM3201.09

Una experiencia de formación para futuros profesores: producir matemática en un contexto de modelización matemática vinculada con fenómenos geométricos

A Teaching Experience for Prospective Teachers: to Produce Mathematics in a Context of Mathematical Modelling Connected with Geometrical Phenomenon

María Florencia Cruz[1]
Cristina Esteley[2]
Sara Scaglia[3]

Resumen: En este artículo presentamos una propuesta de enseñanza que se focaliza en objetos geométricos y se pone en juego con 17 estudiantes que cursan en 2018 una asignatura de geometría del tercer año del programa de formación de profesores en matemática de la Universidad Nacional del Litoral de Santa Fe-Argentina.

Diseñamos y organizamos la propuesta en torno a procesos de modelización matemática, buscando que los estudiantes reproduzcan en el aula actividades propias del quehacer matemático. Las consignas diseñadas para el trabajo de los estudiantes toman como recurso imágenes de figuras tridimensionales.

Cabe indicar que la propuesta y su puesta en aula forman parte de un trabajo de tesis de doctorado en educación matemática en la que se estudia una experiencia educativa con futuros profesores cuando trabajan en un contexto de modelización matemática. Para el presente artículo describimos y analizamos en

Fecha de recepción: 28 de mayo de 2019. **Fecha de aceptación:** 16 de enero de 2020.

[1] Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. ma.florenciacruz@gmail.com, orcid.org/0000-0002-9184-6292.

[2] Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. Universidad Nacional de Córdoba. esteley@famaf.unc.edu.ar, orcid.org/0000-0001-5114-8054.

[3] Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. sbscaglia@gmail.com, orcid.org/0000-0002-4935-2379.

detalle la propuesta y las principales ideas que la sustentan. También discutimos algunos avances vinculados con las producciones emergentes del trabajo de los estudiantes. Finalmente ofrecemos algunas conclusiones.

Palabras Clave: *Formación de Profesores, Modelización Matemática, Geometría, Validación Matemática, Modelo.*

Abstract: In this article we present a teaching proposal that focuses on geometric objects that is carried out in 2018 with 17 prospective teachers. At that time, they are taking a geometry course corresponding to the third year of the formation program for teachers in mathematics of the Universidad Nacional del Litoral de Santa Fe - Argentina.

We design and organize the main moments of the proposal around mathematical modelling processes so that prospective teachers are engaged in characteristic activities of mathematical production. The major task designed for the students' work takes as its main resource printed images of three-dimensional figures.

It is worth noting that the proposal is designed and implemented as part of research associated with a doctoral thesis in mathematics education. In order to emphasize the pedagogical aspect of the implementation of the research work related to the thesis, in this article we describe and analyse in detail the educational proposal. We advance in discussions about the students' productions that emerge from their interactions in classes. Finally, we and offer some conclusions.

Keywords: *Teachers Professional Development, Mathematical Modelling, Geometry, Mathematical Validation, Model.*

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo tiene como propósito dar a conocer y discutir una experiencia de formación para futuros profesores en matemática en un contexto de modelización matemática (MM). Su diseño y ejecución toma como sustento avances de una investigación que persigue por objetivo general estudiar conocimientos puestos en juego por futuros profesores en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), al trabajar en un contexto educativo mediado por actividades de modelización matemática en un curso de geometría. Particularmente, en la investigación interesa indagar los procesos de validación y los sentidos atribuidos a esos procesos por los futuros profesores en el marco de la experiencia de modelización matemática.

El objetivo de la investigación entrelaza temáticas fundamentales en el ámbito de la educación matemática: la formación de futuros profesores, el trabajo con MM y la validación. Estas temáticas se tratan en diversos grupos de discusión en ocasión del 13 Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) celebrado en 2016 y en la 17 Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de la Modelización Matemática y sus Aplicaciones (ICTMA) celebrada en 2015. Algunas producciones que dan cuenta del avance y preocupación de estas temáticas son Stylianides y Harel (2018), Stillman, Blum y Kaiser (2017), Kaiser (2017), Hanna y De Villiers (2012), y Reid y Knipping(2010).

Para responder al objetivo general vinculado con la investigación antes mencionada apelamos a un abordaje de naturaleza cualitativa, particularmente a una investigación de diseño (Bakker y van Eerde, 2015) en la cual se emplea un conjunto de tareas secuenciadas y novedosas, se busca conocer recursos y conocimientos previos puestos en juego por estudiantes, modos en que se crean registros, formas en que surgen concepciones y sus cambios, recursos que se emplean, entre otros (Confrey, 2006).

Atendiendo a las consideraciones metodológicas realizadas diseñamos una propuesta que tiene dos finalidades, una de índole investigativa y otra pedagógica relativa al quehacer del trabajo matemático en un curso de Geometría Euclídea Espacial (GEE). Para el diseño de la propuesta de enseñanza consideramos, entre otros, literatura vinculada con la temática en estudio y resultados de entrevistas realizadas con futuros profesores que cursaron GEE en 2017. Estas últimas nos permiten conocer recursos y conocimientos previos de los estudiantes[4] y concluimos que posiblemente no han tenido oportunidad en su formación de vivir experiencias educativas en las que se apela a MM (Cruz, Esteley y Scaglia, 2018).

Tanto la investigación como este artículo que focaliza en la propuesta, se conectan con cuestiones relativas a formación de futuros profesores en matemática. Esta área posee actualmente interés en el ámbito internacional (Even y Ball, 2009), señalamos los resultados del Survey presentado en el último Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) (Robutti, *et al.*, 2016) y la convocatoria para la próxima Conferencia de Estudio número 25 (ICMI Study

[4] En este texto al mencionar el término estudiantes se refiere a futuros profesores en matemática.

25) a realizarse en febrero de 2020 (Borko, *et al.*, 2019). A su vez, la preocupación respecto a la formación matemática de jóvenes de los distintos niveles educativos pone de manifiesto la necesidad de contribuir y prestar especial atención a la formación docente de quienes enseñarán matemática. En Argentina, la propuesta de estándares creada por el Consejo Interuniversitario Nacional para las carreras de profesorado universitario[5] en matemática (2012), explicita la necesidad de que futuros profesores trabajen con "procedimientos tales como: [...] ejemplificación, validación, contrastación [...], elaboración de conjeturas, modelización y visualización" (pp. 6 y 7).

Recuperando las recomendaciones internacionales y locales, la propuesta de enseñanza diseñada apela a MM como abordaje pedagógico en el sentido de Bassanezi (1994) y Esteley (2014). Esto supone la organización del trabajo en el aula de matemática en torno a las fases que intervienen en un proceso de modelización de naturaleza matemática. Al respecto, Esteley (2014) afirma que "la modelización matemática como abordaje pedagógico se refiere básicamente al trabajo con modelos matemáticos en el aula e intenta reproducir en las mismas, las actividades de la comunidad matemática" (p.1). Cabe indicar que MM como abordaje pedagógico guarda algunas similitudes con resolución de problemas, pero también presentan diferencias[6] (Blum y Niss, 1991; Esteley, 2014).

Para la propuesta de enseñanza se recuperan las ideas de MM y validación en formación de profesores. En la puesta en aula, en el marco de la asignatura GEE, emerge principalmente el trabajo matemático sobre el estudio de figuras tridimensionales y en particular la noción de poliedro. Este contenido resulta de interés en la formación de profesores, dado que forma parte de la propuesta curricular para la escolaridad obligatoria en el sistema educativo argentino (NAP, 2011; Diseño Curricular Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe, 2014).

Con una propuesta pensada desde la MM enlazada con fenómenos geométricos, se busca ir más allá de la enseñanza tradicional de la matemática posibilitando a los estudiantes el contacto con una experiencia de construcción de conocimiento y de reflexión acerca de lo construido. En sinergia con lo propuesto por Blum (2015),

[5] Universidades argentinas ofrecen carreras de grado para la formación de Profesores en Matemática. Los profesores que egresan de esos programas están habilitados para desempeñar en colegios secundarios y en la universidad.

[6] En el campo de la Educación Matemática se presenta un gran volumen de investigaciones que tratan las similitudes y diferencias entre tales abordajes, no se recuperan en este artículo por limitaciones de espacio.

se pone en escena la necesidad de que futuros profesores se apropien de conocimientos necesarios para llevar a cabo actividades de modelado.

Con la propuesta buscamos crear experiencias matemática y didácticamente ricas y que los sujetos las interpreten después de vivirlas, considerando que las personas principalmente piensan y aprenden a través de experiencias que atraviesan (Gee, 2008). Este autor afirma que interpretar la experiencia significa pensar en la acción antes y después de ejecutarla, analizar cómo los objetivos se relacionan con el propio razonamiento de la situación, extraer las lecciones aprendidas y anticipar cuándo y dónde podrían ser útiles. En esta misma línea Dewey (1958) afirma que la educación debe basarse en la experiencia, y más aún, Larrosa (2003) señala que a partir de la experiencia es posible dar sentido a lo sucedido.

Bajo los supuestos descriptos, en este artículo tenemos como objetivos describir, analizar y discutir una experiencia de formación para futuros profesores en un contexto de MM vinculada con fenómenos geométricos. Además avanzamos en la presentación de resultados relevantes destacando producciones emergentes del trabajo realizado por estudiantes que cursaron GEE en el año 2018 en la UNL.

Con el fin de dar cuenta de los objetivos planteados en el siguiente apartado presentamos los constructos teóricos en los que se basa la propuesta, posteriormente la describimos y presentamos producciones de los futuros profesores. Finalmente reflexionamos en torno al sentido de la experiencia desarrollada.

2. CONSTRUCTOS TEÓRICOS QUE APOYAN EL DISEÑO DE LA PROPUESTA

El diseño de la propuesta de enseñanza toma aportes e ideas vinculadas con la MM como abordaje pedagógico. Bassanezi (1994) afirma que emplear la MM como abordaje de enseñanza y medio para el aprendizaje posibilita el desarrollo de ciertos modos de pensamiento y actuación, entre otros, la producción de conocimientos, la realización de abstracciones y formalizaciones y el establecimiento de generalizaciones y analogías. Es importante destacar que bajo este abordaje se pretende que los estudiantes no solo puedan aplicar conocimientos matemáticos ya conocidos, sino que emerjan nuevos, es decir, se produzcan conocimientos que se irán configurando o reconfigurando en el proceso de MM.

La perspectiva mencionada se sustenta en una visión de la matemática como actividad cuasi-empírica (Lakatos, 1978; Ravn y Skovsmose, 2019). La adopción de esta perspectiva supone asumir que la exploración por parte de los estudiantes constituye un aspecto central de la enseñanza, así como la posibilidad de proporcionar oportunidades para que éstos apelen al sentido común y a sus experiencias (Sriraman y Mousoulides, 2014). En este sentido, Lakatos (1978) afirma que:

> Las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones. (p.20).

En relación con lo mencionado, en la figura 1 se muestra un esquema de MM (Bassanezi, 2002). Si bien este esquema se focaliza en el proceso de MM en el ámbito matemático, el mismo se puede emplear como inspiración para pensar la MM como abordaje pedagógico (Esteley, 2014).

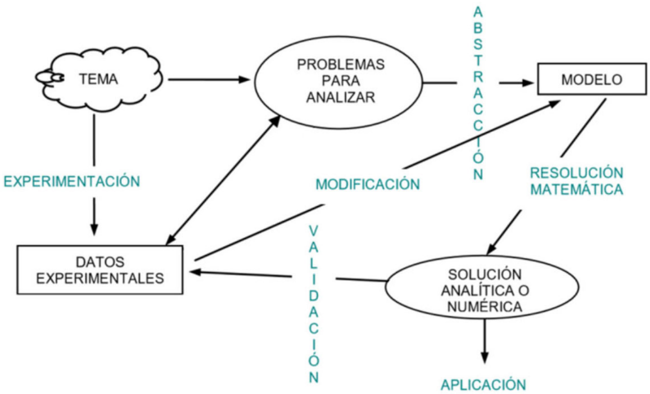


Figura 1: Esquema de proceso de modelización matemática.

Acorde a dicho esquema, quienes se involucran con la MM formulan problemas en el marco de un tema en estudio, emplean datos existentes o producen nuevos con el fin de construir un modelo que dé respuestas al problema, se valida el modelo y en caso necesario se modifica. En ese sentido, el proceso es cíclico e incluye construcciones provisorias.

Cabe notar que el modelo provisorio o final puede tomar diversas formas: analítica, gráfico, verbal, entre otros (Esteley, 2014). Este proceso, como afirma la autora, permite que el o los modelos se modifiquen o convaliden en función de los resultados alcanzados en cada momento del proceso. Esta característica de la MM como abordaje pedagógico resulta eficiente para fomentar la construcción de conocimiento.

Entendemos como modelo la definición aportada por Zahar (1989, p.170): "Modo de explicación, construcción teórica, idealizada, hipotética, que sirve para el análisis o evaluación de una realidad concreta". Bassanezi (1994) pone de manifiesto que el trabajo con MM puede tener importancia intrínseca independientemente de su aplicación a la vida diaria. En el modelado el comienzo es simplemente un problema en el que aún se desconoce la matemática que se pondrá en juego. En esta misma línea, Davis y Hersh (1989) consideran los modelos como herramientas desarrolladas por el hombre para proveer una descripción viable de la realidad social, de la naturaleza o de la propia matemática, cumpliendo una doble función: medio para pasar información y dispositivo para pensar. En concordancia con la postura de Bassanezi (1994; 2002) se hace referencia a modelos producidos libremente por estudiantes, emergentes de su propia construcción y que se consideran intermediarios mediante los cuales se idealiza o simplifica una realidad o teoría compleja para acceder a un tratamiento matemático más formal.

Si bien en general, en el trabajo de Bassanezi (1994; 2002) se privilegian temas y problemas de la realidad perceptual, Freudenthal (1991) guardando coherencia con los principios del trabajo de MM, sugiere ampliar los fenómenos a estudiar. Y no se limita a pensar en el estudio de fenómenos del mundo real (perceptual), sino que resalta la importancia de que los estudiantes enfrenten situaciones que tienen la capacidad de visualizar o imaginar por la influencia de experiencias previas.

En la propuesta de enseñanza que se presenta, el docente cumple un rol de guía y organizador de las interacciones, es el mediador entre las producciones de los estudiantes y la matemática reconocida por la comunidad matemática (Freudenthal, 1991). De este modo, se evidencia el carácter social de la matemática, donde la reflexión colectiva redunda en el avance hacia niveles de comprensión cada vez más altos respecto a la matemática en juego.

En instancias de observación y estudio de la propuesta se busca poner atención en los procesos de validación en el marco de los procesos de MM seguidos. Bassanezi (2002) considera que la misma se presenta cuando se compara el modelo matemático con datos reales o información disponible, de modo tal de posibilitar la aceptación o el rechazo del modelo. A su vez, señala que el grado de aproximación deseado es un factor predominante en la decisión

de aceptar o rechazar el modelo y esto permite la reconfiguración de conocimientos. En este sentido, éstos pueden asumir un carácter provisorio.
Balacheff (2000) realiza una investigación en la que estudia procesos de pruebas puestos en juego por estudiantes, y se refiere a la validación en el ámbito de trabajo matemático:

> En este estudio utilizaremos la palabra razonamiento para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Le asignaremos el término procesos de validación a esta misma actividad cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración). (p.13)

Para este trabajo tomamos como referencia el sentido de validación presente en Bassanezi (2002) o Balacheff (2000). Estas ideas abren la posibilidad de una reflexión colectiva entre estudiantes que permita un avance hacia niveles de comprensión cada vez más altos y quizás más formales que habiliten luego una prueba.

3. LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA: UNA MIRADA HACIA EL DISEÑO Y HACIA LAS PRODUCCIONES

3.1. Consideraciones generales para el diseño

El programa de formación docente en el que llevamos adelante la propuesta tiene una duración de 5 años. Las asignaturas se organizan de modo tal que pueden agruparse en cuatro categorías principales: matemáticas específicas, educación general, educación matemática y formación general. La asignatura GEE pertenece a la primera categoría, se dicta en el primer semestre del tercer año y los estudiantes inscriptos en ella, previamente, no han cursado asignaturas de educación matemática. Cabe indicar que tanto los estudiantes (Cruz, Esteley y Scaglia, 2018) como las docentes que llevan adelante la propuesta no han experimentado escenarios educativos en los que se emplea la MM.

La propuesta se desarrolló en 17 horas reloj, organizadas en 5 clases de 3 horas cada una y una de 2 horas, durante las tres primeras semanas de cursado.

Participan de esta experiencia 17 futuros profesores, sin embargo es necesario señalar que no todos se encuentran presentes en la totalidad de las clases.

Previo al diseño de la propuesta las investigadoras acuerdan con las docentes a cargo de la asignatura en escoger "poliedros" como tema principal para abordar en el proceso de MM. Dicho tema no había sido desarrollado con anterioridad en la carrera Profesorado en Matemática y, al implementarse esta propuesta en las primeras clases, tampoco se había trabajado en este curso.

Se establecen dos problemas relacionados con el tema señalado. El primero solicita determinar qué figura o figuras (de un conjunto de figuras dadas) es un poliedro y el segundo invita a conjeturar si existe alguna relación entre el número de vértices, de aristas y de caras de un poliedro. De este modo, el avance sobre el primer problema permite adentrarse en el segundo con un trabajo previo de reconocimiento de variables pertinentes para el estudio de un poliedro. Finalmente, se trabaja con nuevas problemáticas que formulan los estudiantes con el fin de lograr la puesta en juego de un proceso de modelización completo, dado que los estudiantes en interacción con las docentes delimitan libremente un problema a modelizar y buscan los medios para hacerlo (Esteley, 2014).

En la propuesta se invita a la reflexión constante respecto a modelización y a validación en el ámbito de trabajo matemático. Atendiendo las particularidades que implica la formación de futuros profesores en matemática, se buscó favorecer reflexiones vinculadas a la producción matemática y sus vínculos con cuestiones didácticas.

Pensamos los procesos de enseñanza y de aprendizaje como un espacio en el que emergen conocimientos, por lo que posicionamos la clase como comunidad de práctica (estudiantes y docente). En las comunidades de práctica se negocian significados entre los participantes, se trabaja en conjunto hacia objetivos comunes y el aprendizaje puede ser reconocido por cambios en las identidades personales de los miembros de la comunidad (Forman, 2014).

Organizamos la propuesta en siete momentos, dado que asumimos que la construcción de conocimientos es progresiva. La modalidad de trabajo durante la puesta en juego de la propuesta es generalmente en grupos de tres a cinco integrantes, puesto que consideramos que el intercambio entre pares permite confrontar, comparar, contrastar, unificar y consolidar ideas de los sujetos involucrados respecto a las nociones y conocimientos matemáticos que se ponen en juego en las consignas, de modo que logren profundizar y repensar las ideas que emergen durante el trabajo matemático.

En varios momentos proponemos debate colectivo, dado que consideramos que en escenarios educativos en los que estudiantes presentan al final resultados de un problema en estudio a la comunidad de práctica en la que estén inmersos, tienen un alto valor formativo, pues posibilitan sugerencias para su mejora, intercambios de experiencias y críticas, mejoras de cada producción, entre otros. En definitiva, propician la actividad de comunicar ideas matemáticas y contribuir con una producción de conocimientos.

Finalmente señalamos que durante la puesta en juego de la propuesta sugerimos que los estudiantes completen las consignas en *Google Drive* compartido por la comunidad de práctica de modo tal de asegurar en todo momento el acceso a la producción de todos los grupos durante la clase. En caso que no se disponga de conexión a internet sugerimos que las producciones se realicen en *Word* con el fin de que luego las investigadoras y docente del curso recuperen, organicen y compartan las producciones.

3.2 La propuesta de enseñanza

Organizamos la propuesta en siete momentos. En los momentos uno y cinco se reflexionan y abordan cuestiones en torno a producción matemática y sus enlaces con la didáctica, particularmente se pone énfasis en discusiones que versan en la noción de MM y validación. En los momentos dos, tres y cuatro se trabaja en torno al primer problema matemático, determinar qué figura o figuras (de un conjunto de figuras dadas) es un poliedro. En el momento seis, se aborda el segundo problema matemático, conjeturar si existe relación entre el número de vértices, de aristas y de caras de un poliedro y qué característica tiene. Finalmente, en el momento siete, se propone la formulación, resolución y presentación de un problema geométrico por parte de los futuros profesores.

A continuación presentamos un esquema (Figura 2) en el que caracterizamos sintéticamente la propuesta.

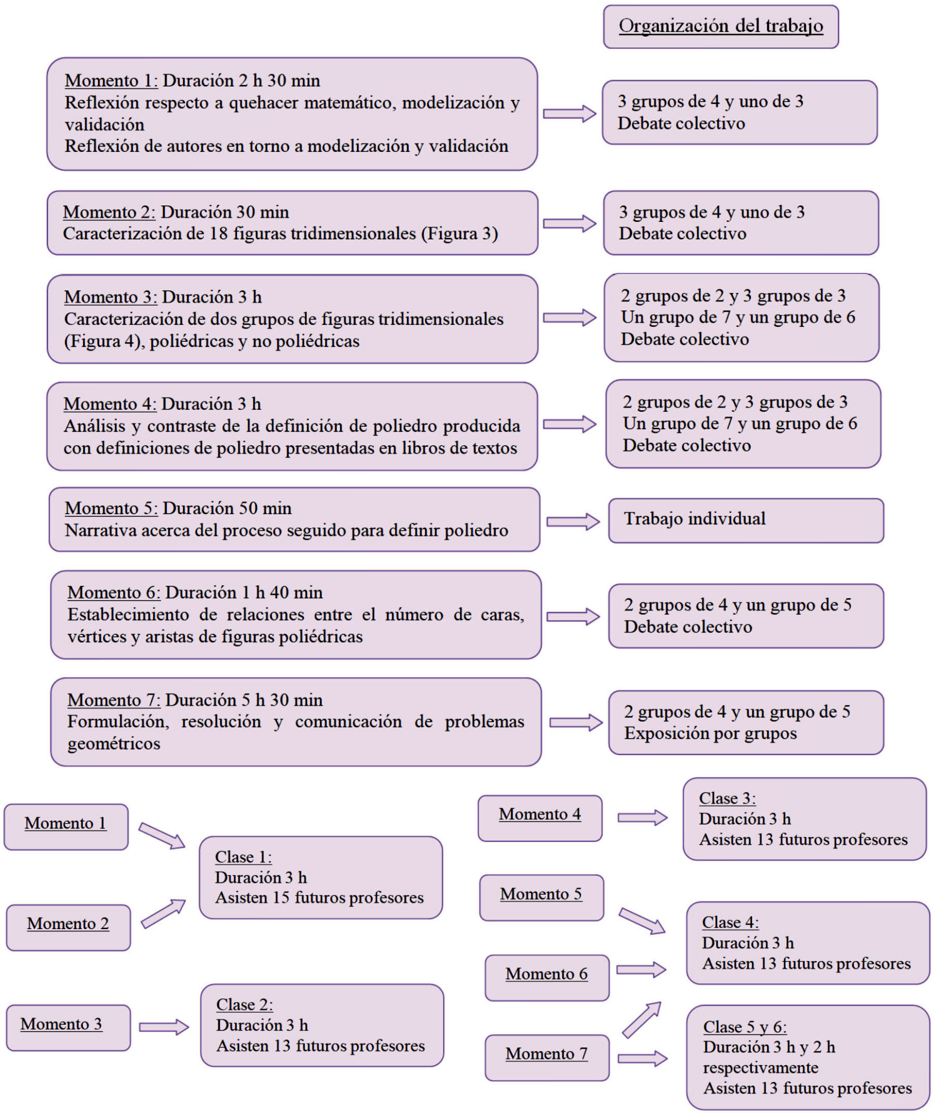


Figura 2. Síntesis de la propuesta.

A continuación presentamos detalles de cada momento, explicitamos las consignas presentadas a los estudiantes, el modo de trabajo y avanzamos presentando algunas producciones del trabajo de los futuros profesores que participan de la experiencia.

3.2.1 Momento 1

El primer momento se lleva adelante en la primera clase de la asignatura GEE a la que asisten 15 futuros profesores que se organizan en cuatro grupos, 3 de 4 estudiantes y uno de 3. La consigna que se presenta es la siguiente:

Lean en grupos los siguientes interrogantes y discutan posibles respuestas a los mismos. Luego realicen una narración en la que recuperen las respuestas de todos los integrantes del grupo (explicitando los acuerdos y desacuerdos que hayan surgido durante las discusiones): a- ¿Cuáles son las actividades que lleva a cabo una persona que hace Matemática? b- ¿Qué entienden por proceso de validación en instancias del trabajo matemático? c- ¿Qué entienden por *proceso de modelización matemática?*

Esta instancia de trabajo permite poner de manifiesto el sentido otorgado al quehacer matemático, procesos de validación y de modelización a partir de experiencias educativas previas, atendiendo a que las palabras producen sentido (Larrosa, 2003).

Posteriormente presentamos a cada grupo (organizados del mismo modo que en la instancia anterior) un breve escrito que incluye el esquema de modelización ilustrado en la Figura 1, un texto en que se expone, siguiendo a Esteley (2014), el modo en que se utilizan algunos términos presentes en el esquema (experimentación, abstracción, resolución, validación, modificación y aplicación) y lo propuesto por Balacheff (2000) acerca de proceso de validación. Buscamos que los estudiantes logren interpretar y analizar constructos teóricos respecto a procesos de validación y de modelización.

Las consignas presentadas son las siguientes: *a- A continuación se les presenta uno de los posibles esquemas en el que se muestra un proceso de modelización (cuyo autor es Bassanezi) y se explicita el modo en que se utilizan algunos términos presentes en el esquema. Interpreten lo presentado a fin de responder qué es o cómo se puede entender un proceso de modelización. b- Además de considerar la visión de validación propuesta por Bassanezi, se presenta la de Balacheff (2000) acerca de proceso de validación. A partir de los* *aportes de estos dos autores formulen una idea sobre qué es o como se puede entender un proceso de validación en el ámbito del trabajo matemático.*

Luego de esta etapa proponemos una discusión colectiva en la que cada grupo pone de manifiesto la producción realizada. Los futuros profesores exponen a la comunidad de práctica la respuesta realizada inicialmente, el análisis de los autores y contrastan su producción con la interpretación realizada a partir de la lectura de los autores.

3.2.2 Momento 2

El segundo momento también se lleva adelante en la primera clase y aquí se da inicio al trabajo de MM. Como se menciona anteriormente, el primer problema matemático que proponemos es determinar qué figura de un grupo de figuras dadas representa un poliedro. Esto es, los estudiantes deberán construir herramientas o instrumentos conceptuales que les permitan discernir acerca de si cada figura es o no un poliedro.

Para iniciar el trabajo en torno a este problema matemático comenzamos solicitando lo siguiente: *Observen las siguientes imágenes (ver figura 3) con el fin de determinar características que poseen.*

El modo de trabajo se propone en grupos organizados del mismo modo que en el momento anterior. La idea en esta instancia es que los futuros profesores caractericen, apelando a variables escogidas por ellos, figuras tridimensionales. Entregamos a cada estudiante una impresión con las imágenes y se encuentran disponibles en el aula representaciones en material concreto de las mismas. Algunas de tales imágenes representan objetos de la realidad y otras son construcciones realizadas con el Software de Geometría Dinámica *GeoGebra*. Entre las imágenes se presentan ejemplos y no ejemplos de poliedros. Consideramos como no ejemplos, tomando aportes de Tall (1989) a las representaciones que no cumplen las condiciones de una definición formal de poliedro, y a las que cumplen con algunas condiciones y no con otras, como se muestra en la figura 3.

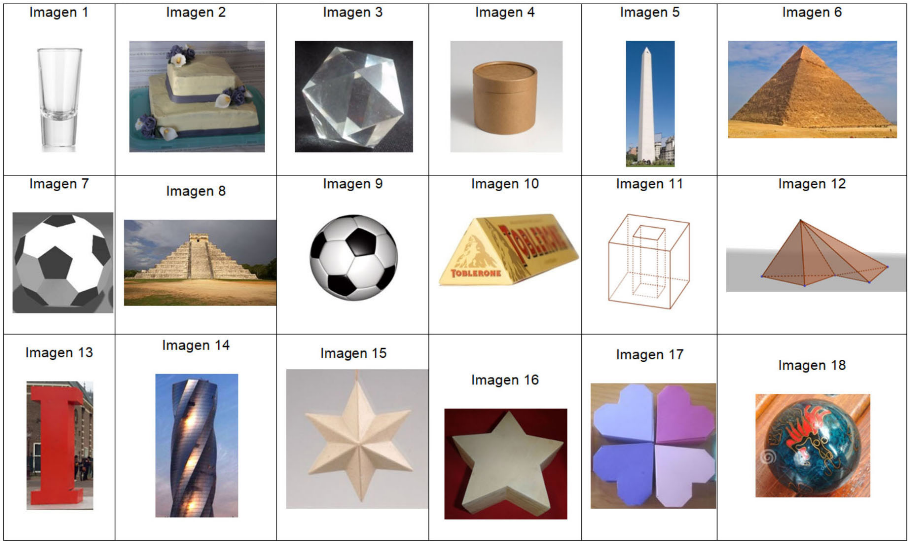


Figura 3. Imágenes presentadas a los estudiantes.

Cabe destacar que en el primer momento dejamos libertad de elección, dado que los estudiantes determinan las características. En este sentido es amplio el abanico de oportunidades de elección: colores, texturas, formas de caras, etc. Sin embargo, en instancias de resolución predomina la selección de características geométricas, posiblemente esto se debe a que se encuentran en un curso de geometría y son estudiantes avanzados en una carrera de profesorado en matemática. Finalmente proponemos una instancia de debate colectivo donde cada grupo expone a la comunidad de práctica el trabajo realizado.

3.2.3 Momento 3

El momento tres de la propuesta se lleva adelante en la segunda clase. En la misma se encuentran presentes 13 estudiantes. En este momento presentamos las mismas imágenes que en la clase anterior, pero organizadas en dos grupos (Figura 4), las que consideramos no poliédricas (Grupo 1) y las poliédricas (Grupo 2).

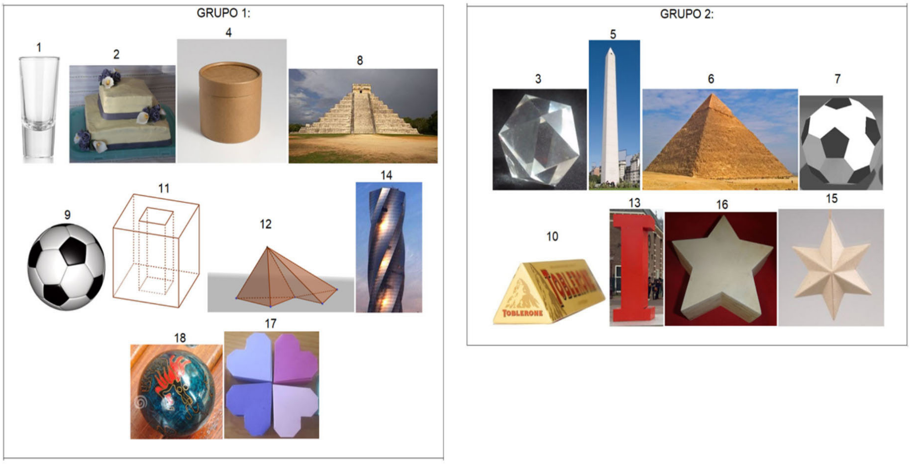


Figura 4. Imágenes organizadas en dos grupos.

En una primera instancia trabajan en cinco grupos, dos grupos de dos estudiantes y tres grupos de tres. Las consignas que presentamos son las siguientes:

> *a) Las imágenes presentadas en la clase anterior se organizan en dos grupos. Determinen características geométricas que permitan que se agrupen de ese modo. ¿Qué nombre le podrías al grupo 1?, y, ¿al grupo 2?*
>
> *b) Representen en el Software de Geometría Dinámica GeoGebra una figura tridimensional que pertenezca al grupo 1 y una que pertenezca al grupo 2 (diferentes a las presentadas anteriormente). Expliquen por qué consideran que dichas representaciones pertenecen respectivamente a los grupos 1 y 2.*

En una segunda instancia, proponemos que se junten con otro grupo y respondan la siguiente consigna: *Discutan con otro grupo las respuestas de los incisos anteriores. Establezcan una única caracterización y determinen dos representaciones en el Software de Geometría Dinámica GeoGebra, una que pertenezca a cada grupo.*

Los estudiantes se organizan en 2 grupos, uno de seis estudiantes y uno de siete. En este momento se busca que los estudiantes logren reconocer características de figuras poliédricas y no poliédricas, validar sus decisiones, iniciar el trabajo de construcción del concepto figural de poliedro (Fischbein, 1993), iniciar la construcción de figuras geométricas con *GeoGebra* en concordancia con las características propuestas, reconocer la equivalencia entre definiciones, entre otros.

En las tablas 1 y 2 exponemos las producciones emergentes de esta instancia. Cabe indicar que las trascripciones de lo escrito por los estudiantes son textuales y aunque puedan presentar algún error o inconveniente las transcribimos sin modificación. En la tabla 1 explicitamos la producción del grupo formado por siete futuros profesores y en la 2 la del grupo de seis.

Tabla 1. Producción de estudiantes del grupo 1 referidas al segundo momento.

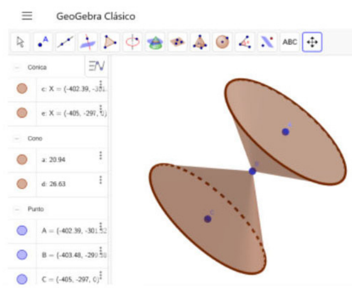
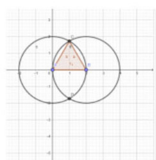
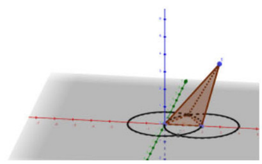
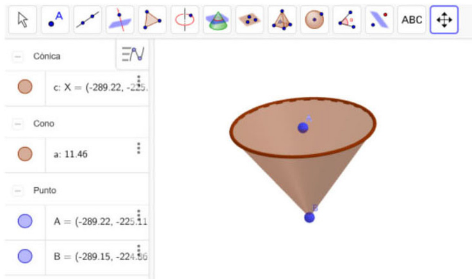
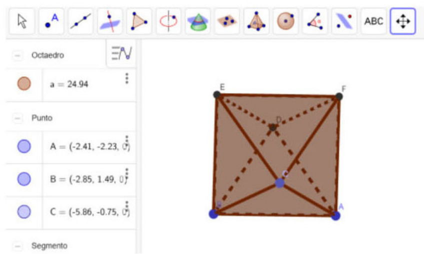
Características determinadas		**Representación realizada en el SGD**
Figuras Grupo 1	*No todos tienen vértices, caras o aristas, no todas sus caras son polígonos, algunos tienen huecos.* *Elegimos como figura dos conos invertidos con sus vértices en común.*	
Figuras Grupo 2	*Todos tienen aristas, caras y vértices, todas sus caras son planas, no tienen huecos.* *Elegimos como figura una pirámide de 4 caras, con base triangular.*	 

Tabla 2. Producción de estudiantes del grupo 2 referidas al segundo momento.

	Características determinadas	Representación realizada en el SGD
Figuras Grupo 1	*Notamos dos grandes grupos entre estos grupos los cuales son: los cuerpos que ruedan y los que tienen base. Además, hay cuerpos que son huecos y que son sólidos.*	
Figuras Grupo 2	*Figuras poliédricas:* *Las figuras dadas son superficies poliédricas, es decir, un conjunto finito de polígonos que tienen las siguientes características:* *Cada lado de una cara es compartido con otra y solo otra.* *Las caras contiguas están en distinto plano.* *Convexas: Icosaedro, dodecaedro, pirámide, obelisco y toblerone.* *No convexas: Las estrellas y la "i"* *Regulares: El icosaedro y el dodecaedro.* *No regulares: Los restantes.*	

En las producciones, desarrolladas mediante el uso de variables pertinentes, vínculos relevantes o categorizaciones, se presenta una primera aproximación a la definición de poliedro, que permite explicar, construir teóricamente e idealizar la noción que posibilitaría luego el análisis de figuras para determinar o discernir si una figura es o no poliedro.

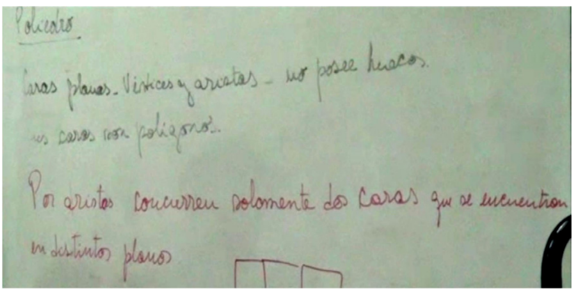
En este sentido, cabe destacar que "En algunos casos son construidos modelos, cuando la situación original es muy compleja para ser estudiada. Se espera que el modelo traiga algún esclarecimiento o información sobre la situación más compleja" (Gazzetta, 1989, p.18) y de ese modo avanzar en la búsqueda de al menos explicaciones provisorias. En este caso, las caracterizaciones de las figuras permiten identificar condiciones que, a su vez, conducirán a la elaboración de definiciones.

Las descripciones y caracterizaciones se constituyen en un primer modelo emergente del trabajo con MM (Cruz, Scaglia y Esteley, 2018; Cruz, Scaglia y Esteley, 2019 b), lo que brinda la oportunidad a los estudiantes de iniciar el camino para producir modelos más complejos, o en este caso particular una definición más clara o más compleja que luego puede ser asumida por la comunidad de práctica.

Respecto al empleo de *GeoGebra,* cabe destacar que es la primera vez que los estudiantes del grupo 1 emplean su vista 3D, en el grupo 2 algunos de los estudiantes ya cursaron GEE por lo que conocen esta herramienta. Ambos grupos lograron realizar las dos construcciones, descubrir comandos y modos de emplear este software, por ejemplo el uso de vistas 2D y 3D en simultáneo. A la vez, resignifican conceptos geométricos que habían trabajado en un curso de geometría plana, previo a la asignatura GEE, como el de simetría central (ver en tabla 1 los conos simétricos respecto del vértice). Estas últimas cuestiones son propias de procesos de MM, donde emergen conocimientos matemáticos y tecnológicos no previstos o que no se sabe que surgirán cuando se inicia el mismo (Bassanezi, 1994).

En instancias de discusión colectiva, con aportes de todos los estudiantes que se encuentran presentes en la clase y docentes, producen la definición que se muestra en la tabla 3:

Tabla 3. Definición de poliedro construida en la comunidad de práctica y transcripción del texto.

	Transcripción de lo escrito en el pizarrón: Poliedro Caras planas- Vértices y aristas - No posee huecos. Sus caras son polígonos. Por aristas concurren solamente dos caras que se encuentran en distintos planos.

3.2.4 Momento 4

El momento tres concluye con la producción del primer modelo (tabla 3 - definición provisoria de poliedro) de la comunidad de práctica. Continuamos la propuesta buscando poner a prueba la producción, incentivando la validación y la decisión por parte de los futuros profesores acerca de la modificación o no del modelo.

Este momento se lleva a cabo en la tercera clase. Asisten 13 estudiantes y se organizan en tres grupos, dos de cuatro y uno de cinco. Las consignas presentadas son las siguientes:

> *a) Busquen por lo menos 2 definiciones de poliedros. La búsqueda la pueden realizar en libros de texto, libros de geometría (reconocidos por la comunidad matemática), internet, entre otros.*
>
> *b) Decidan y expliquen si las definiciones buscadas recientemente son equivalentes. De las imágenes presentadas en la consigna anterior, ¿existen figuras tridimensionales que cumplen alguna de las definiciones y no otras?*
>
> *c) Justifiquen si las definiciones buscadas son o no equivalentes a la establecida en la comunidad matemática "clase de geometría". De las imágenes presentadas en la consigna anterior, ¿existen figuras tridimensionales que cumplen alguna de las definiciones y no otras?*
>
> *d) Preparen una presentación para realizar al resto de la clase, en la que se exponga lo pensado en los incisos anteriores. Tengan en cuenta explicitar y argumentar si la definición establecida en la comunidad matemática "clase de geometría" les sigue pareciendo adecuada.*

Luego del trabajo grupal proponemos que se lleve adelante un debate colectivo. En el mismo, cada grupo expone el trabajo realizado. Para cerrar este momento, las docentes a cargo del curso deciden por restricciones de tiempo, establecer y delimitar la definición (formulada por las docentes tomando aportes de Puig Adam (1980)) que se empleará en las clases de GEE y se utilizará como modelo en el desarrollo de esta asignatura para validar acciones futuras. Cabe señalar que la decisión de finalizar este momento con una definición formulada por el cuerpo docente, sin reconsiderar las ideas de los estudiantes no es una decisión consensuada previamente con las investigadoras. Si bien se entiende que esta decisión es tomada quizás por la necesidad de cumplir con el programa de la asignatura, a partir de esta acción docente consideramos que se produjo un truncamiento del proceso de MM al establecer una definición sin tener en cuenta las voces y producciones de los futuros profesores. No obstante, la riqueza del trabajo de los estudiantes no queda oculta y serán consideradas en ámbitos investigativos.

3.2.5 Momento 5

El momento cinco se lleva adelante en la cuarta clase, en la misma se encuentran presentes 13 estudiantes. En este momento se busca cerrar el trabajo matemático en torno al primer problema, por lo que invitamos a los futuros profesores a realizar una narración escrita individual. La consigna presentada es la siguiente: *Tomando como referencia el esquema del proceso de modelización presentado en la clase 1 describan el proceso seguido al interior de la comunidad para arribar a una definición o modelo de la noción de "poliedro". Dentro del proceso de modelización, ¿cómo vivieron la validación?*

Esta instancia es fundamental porque permite a cada partícipe de la experiencia reflexionar y recuperar individualmente lo vivido en instancias de una experiencia colectiva, pues cada sujeto reconstruye los hechos atendiendo al modo en que atravesó y lo atravesó la experiencia, produciendo así sentido a la vivencia (Larrosa, 2003).

3.2.6 Momento 6

En el momento seis se lleva adelante el trabajo de MM en torno al segundo problema matemático, conjeturar si existe relación entre el número de vértices, de aristas y de caras de un poliedro tomando como referencia empírica las figuras que determinamos como poliédricas (grupo 2) de la figura 4. Detrás de este problema se hace evidente la relación de Euler. Este momento, al igual que el momento cinco, se ejecuta en la cuarta clase. Para esta instancia proponemos que se organicen en 3 grupos, dos de cuatro y uno de cinco.

Comenzamos explicitando la siguiente consigna:

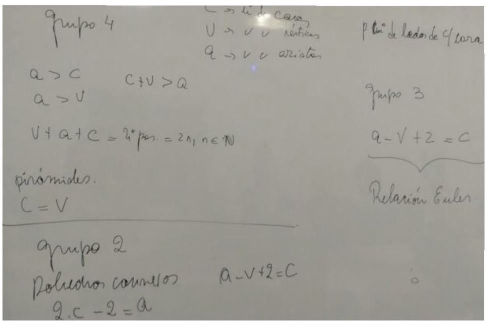
a) Cuando trabajaron con polígonos planos pudieron observar (o no) que el número de aristas coincide con el número de vértices. Por ejemplo, el cuadrado tiene cuatro aristas y cuatro vértices, el pentágono cinco aristas y cinto vértices, etc. Cabe preguntarse entonces, para los poliedros, ¿será posible establecer relaciones entre los números de caras, de vértices y de aristas de los mismos? Los invitamos a que levanten o traten de levantar algunas conjeturas al respecto (decir que no o si es también una conjetura).

b) En caso de haber encontrado alguna relación representen en el software de geometría dinámica GeoGebra figuras tridimensionales que la cumplen y en la hoja de cálculo expliciten la relación.

Cabe indicar que en el grupo 2 de figuras tridimensionales presentado en la figura 3, los "poliedros" cumplen la relación de Euler. Sería una discusión teórica y epistemológica interesante el analizar si es necesario que todo poliedro cumpla la relación de Euler o no, pero no abordaremos ese punto en este artículo.

En el trabajo en aula, llevado a cabo en 3 grupos de 4 estudiantes cada uno, surgen las producciones que fueron escritas en la pizarra y que se muestran en la tabla 4.

Tabla 4. Pizarra de la puesta en común realizada en el momento 6 y transcripción del texto.



Transcripción de lo escrito en el pizarrón:[7]

Grupo 4

$c \rightarrow$ nº de caras
$v \rightarrow$ nº de vértices
$a \rightarrow$ nº de aristas

$p \rightarrow$ nº de lados de cada cara

$a > c$ $\quad a + v > a$
$a > v$
$v + a + c = n^o par = 2.n, n \epsilon N$

Pirámides
$c = v$

Grupo 3
$\underbrace{a - v + 2 = c}$
Relación Euler

Grupo 2
Poliedros convexos $a - v + 2 = c$
$2.c - 2 = a$

[7] El nominar 2, 3 y 4 a los grupos se debe a que desde la primera clase trabajan de ese modo. Los estudiantes del grupo 1 no mantienen la formación del mismo por ausentarse a diversas clases.

Apreciamos que el grupo 4 encuentra diversas relaciones estableciendo hipótesis para limitarlas para ciertos tipos de poliedros. El grupo 2 determina una fórmula para poliedros convexos y luego la relación de Euler para poliedros. La fórmula no se verifica para todo poliedro convexo, sin embargo los estudiantes que realizan esta conjetura afirman que es válida para los poliedros convexos en los que contaron.

El grupo 3 formado por estudiantes que habían cursado previamente la materia y estudiantes que se enfrentan por primera vez a la asignatura arriban a la fórmula de Euler. En este grupo, una de las estudiantes recordaba la relación de Euler y manifiesta que no va a opinar para dar espacio a la formulación de conjeturas por sus compañeras.

Posteriormente en instancias de trabajo colectivo surgen interesantes discusiones respecto a la posibilidad de validación de las conjeturas establecidas.

3.2.7 Momento 7

Organizamos el momento siete en tres instancias: la formulación, resolución y exposición de un problema geométrico formulado por los futuros profesores. La formulación de problemas se lleva adelante en la clase cuatro, la resolución en la clase cinco y la exposición de la resolución en la clase seis. En estas clases asisten 13 estudiantes que se organizan para trabajar en dos grupos de cuatro y un grupo de cinco.

La consigna presentada con el fin de solicitar la formulación de problemas geométricos es la siguiente: *Durante las clases de Geometría Euclídea Espacial llevadas a cabo hasta el momento pensaron y reflexionaron diferentes problemas, por ejemplo, la definición de poliedros, relaciones entre números de caras, vértices y aristas en poliedros, entre otros. Ahora los invitamos a que se hagan preguntas que les surgen a partir del proceso vivido con el fin de que ustedes mismos determinen un problema geométrico.*

Los problemas geométricos diseñados por ellos se presentan en la tabla 5.

Tabla 5. Problemas planteados en términos de interrogantes por los tres grupos.

GRUPO 2: *Nosotras pensamos que si tenemos distintas figuras geométricas (triángulos, rectángulos, cuadrados, pentágonos, etc.) al unirlos podemos formar poliedros. Pero ¿siempre se puede? (tomando cualquier figura y cantidad).* *Nuestra idea es ver que la respuesta va a depender de distintas características de las figuras y lo analizaremos en la clase con los demás grupos utilizando el Polydron y otros elementos (figuras regulares, irregulares, circulares).* *GRUPO 3:* *Con las características descriptas en los poliedros, el concepto de ángulo no se menciona.* *Dado los contenidos estudiados en geometría plana acerca de polígonos, nos preguntamos si existen o no ángulos en el espacio y como se definen, miden y clasifican, si existen ángulos exteriores.* *GRUPO 4:* *Durante estas clases el problema que nos surgió es que en las definiciones aparecen términos que no comprendíamos, por ejemplo: superficie y sólido y esto nos dificultó poder comprenderlos.*[8]

De los problemas formulados por los grupos apreciamos que todos eligen trabajar con situaciones de la geometría tridimensional, a pesar de que la consigna es abierta a un problema geométrico cualquiera.

Luego de este momento en la clase cinco proponemos lo siguiente:

a) Intenten junto a los compañeros con los que diseñaron la problemática determinar una posible "reflexión" y "respuesta" a la misma. Preparen para entregar en el próximo encuentro un archivo de Word en el que se expliciten de modo detallado sus exploraciones, investigaciones, conjeturas, conclusiones, entre otros. Se sugiere que finalmente presenten una reflexión en la que narren como vivieron el proceso de producción y exploración de su problemática.

b) Diseñen una presentación de 15 minutos para que en el próximo encuentro puedan mostrar a la comunidad "clase de geometría" el proceso llevado a cabo al interior del grupo.

[8] La resolución de este problema consiste en la realización de un análisis terminológico para comprender las definiciones.

A partir de este momento los estudiantes han completado la experiencia en torno al proceso de MM (Esteley, 2014). La resolución de una problemática formulada por los mismos estudiantes da lugar a responder preguntas que ellos mismos se hicieron. Se destaca esta cuestión, dado que es posible que no hayan tenido previamente en su formación una experiencia con estas características. Así mismo, el momento de presentación de la resolución de la problemática permite a los estudiantes comunicar resultados de su propia investigación matemática y poner a prueba su producción frente a compañeros y docentes.

4. RELFEXIONES FINALES

Lo descripto ha permitido delinear con detalles una experiencia educativa para futuros profesores. Hacemos evidentes las consignas diseñadas apelando a MM como abordaje pedagógico. Ofrecemos evidencias o ejemplos de las producciones que emergen en el trabajo en aula, así como también posibilidades de los estudiantes para comprometerse con un trabajo de MM y producir conocimientos matemáticos y tecnológicos en esas instancias.

Los futuros profesores que participan en esta experiencia se apropian del proceso de MM de naturaleza intra-matemático. En este sentido, cabe señalar que trabajan con referentes empíricos vinculados con la matemática y recurren a conocimientos ya apropiados de naturaleza matemática para construir modelos, como las definiciones de poliedro, en el sentido de Gazzetta (1989), en una primera instancia o las formulaciones de relaciones al interior de figuras que luego validan recurriendo a diversos procedimientos.

Esta experiencia resulta valiosa para los propios estudiantes y para las docentes del curso. Se han dado evidencias de un trabajo con MM centrado en objetos matemáticos, que da cuenta de las posibilidades formativas que estos procesos de producción de conocimientos otorgan a futuros profesores. Así mismo, la reflexión de los procesos de MM y validación posibilita que emerjan conocimientos didácticos, matemáticos y tecnológicos.

Lo discutido desde una mirada pedagógica está en proceso de análisis en el ámbito investigativo. Así mismo, señalamos la importancia que ha tenido en esta experiencia el trabajo en conjunto entre investigadores y docentes a fin de contribuir en la formación de futuros profesores en matemática. En el ámbito de investigación se logra dilucidar las ideas iniciales de los estudiantes acerca de quehacer matemático, validación y modelización (Esteley, Cruz y

Scaglia, 2019; Cruz, Scaglia y Esteley, 2019 a), este avance pone en evidencia la importancia del vínculo entre investigadores y docentes. Este vínculo se encuentra en estrecha relación con la recomendación propuesta por Ouvrier-Buffet (2015) respecto a la necesidad de involucrar a profesores universitarios de matemáticas e investigadores en educación matemática, a fin de implementar actividades de producción de definiciones a nivel universitario.

Las características de la propuesta diseñada por las investigadoras, que invita a la construcción de una definición de poliedro, finalmente aporta a la asignatura GEE. Esto es así pues en el material de cátedra empleado en la asignatura, en un principio no se explicitaba la definición de poliedro. A partir de la propuesta de esta experiencia las docentes formulan una definición de poliedro que luego presentan a todo el curso.

Finalmente es de destacar que, todo este trabajo, no hubiese sido posible sin el compromiso asumido por los futuros profesores que cursaban GEE en 2018. Para ellos como así también para los docentes del curso formulamos un especial agradecimiento.

REFERENCIAS

Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica.* Euler, G. Puig Ediciones.

Bakker, A y van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics* Education (pp. 429-466). Springer.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente.

Bassanezi, R, (1994). Modelling as a teaching-learning strategy. *For the Learning of Matehematics, 14*(2), 31-35.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem con modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer.

Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects-State Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Borko, H; Dole, S., Esteley, C., Huang, R., Karsenty, R., Miyakawa, T., Da Ponte, P., Potari, D; Robutti, O. y Trouche, L. (2019). Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups-discussion document. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/ICMI%20studies/ICMI%20Study%2025/190218%20ICMI-25_To%20Distribute_190304_edit.pdf

Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. En R. Keith Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-151). Cambridge University Press.

Cruz, M.F., Esteley, C. y Scaglia, S. (2018). Validar, justificar, demostrar en voces de futuros profesores en matemática. En Di Franco (Ed.), *VII Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 105-116). Universidad Nacional de la Pampa.

Cruz, M.F., Scaglia, S. y Esteley, C. (2018). La construcción de definiciones geométricas. En Di Franco (Ed.), *VII Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 42-47). Universidad Nacional de la Pampa.

Cruz, M.F., Scaglia, S. y Esteley, C. (2019 a). ¿Qué piensan futuros profesores de la modelización matemática? En J. Aguirre, L. Proasi y C. De Laurentis (Comp.), *Congreso Latinoamericano Prácticas, problemáticas y desafíos contemporáneos de la Universidad y del Nivel Superior.* Eje: Prácticas, problemáticas y desafíos contemporáneos de la enseñanza de la Matemática en la Universidad y en el Nivel Superior. (pp. 49-55). Universidad Nacional de Mar del Plata.

Cruz, M.F., Scaglia, S. y Esteley, C. (2019 b). *Experiencia de modelización matemática con profesores y futuros profesores.* http://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/734/439

Davis, P. y Hersh, R. (1989) *Experiencia Matemática*. Editorial Labor.

Dewey, J. (1958). *Experiencia y educación*. Losada.

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos*. Filosofía y Humanidades/UNC.

Esteley, C., Cruz, M.F. y Scaglia, S. (2019). *Quehacer matemático y validación: ideas de futuros profesores*. http://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/729/45

Even R. y Ball D. (Ed.). (2009) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics.* Springer.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), pp. 139-162.

Forman, E. (2014). Communities of Practice in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 78-81). Springer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers.

Gazzetta, M. (1989). *A modelagem como estratégia de aprendizagem da Matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores*. Tesis de maestría. Universidade Estadual Paulista.

Gee, J. P. (2008). Learning and Games. En K. Salen (Ed.), *The Ecology of Games. Connecting Youth, Games, and Learning* (pp. 21-40). Cambridge: The MIT Pres.

Hanna, G. y De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education*. Springer.

Kaiser, G (Ed.) (2017). *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. Springer.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza.

Larrosa, J. (2003). *Entre las lenguas. Lenguaje y educación después de Babel*. Laertes.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Tercer ciclo. https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2014). Diseño Curricular. Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe.

Ouvrier-Buffet, C. (2015) A model of mathematicians' approach to the defining processes. K. Krainer y N. Vondrová. *CERME 9 Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2214-2220) Charles University in Prague.

Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de profesorado universitario en matemática. (2012). http://www.cin.edu.ar/comisiones/asuntos-academicos-material-en-tratamiento/subcomision-de-profesorados/

Ravn, O. y Skovsmose O. (2019). *Connecting Humans to Equations*. Springer.

Reid, D and Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M. y Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 48*(5), 651-690.

Sriraman. B. y Mousoulides, N. (2014). Quasi-empiricalReasoning (Lakatos). En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 511-513). Springer.

Stillman, G.S., Blum, W. y Kaiser, G. (Eds.). (2017). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*. Springer.

Stylianides, A.J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An International Perspective*. Springer.

Tall, D. (1989). Concept images, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 37-42.
Zahar, J. (1989). *Dicionário Básico de Filosofia*. Rio de Janeiro.

MARÍA FLORENCIA CRUZ

Dirección: Urquiza 1933 10 D. Santa Fe (Santa Fe). CP: 3000. Argentina.

ENSAYO DOI: 10.24844/EM3201.10

Discusión teórica sobre las prácticas docentes como mediadoras para potencializar estrategias metacognitivas en la solución de tareas matemáticas

Theoretical discussion on teaching practices as mediators in the development of metacognitive strategies for solving mathematical tasks

Milagros de Jesús Cázares Balderas,[1]
David Alfonso Páez[2] y
María Guadalupe Pérez Martínez[3]

Resumen: Una de las expectativas de la educación básica y media superior es lograr que los estudiantes sean sujetos activos y regulen sus aprendizajes. Aunque investigaciones recientes retoman el interés por discutir la metacognición y su impacto en el aprendizaje de las matemáticas, la discusión no profundiza en el papel del profesor. El objetivo de este artículo, es hacer una reflexión teórica sobre las acciones del docente que pueden potencializar estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas para un aprendizaje autorregulado, tomando como referente la metáfora de *andamiaje*. En el documento se discute el concepto de metacognición y su relación con el aprendizaje autorregulado, se exponen las principales líneas de investigación sobre las prácticas docentes en torno a la metacognición, y se analiza el papel del docente como un mediador necesario en la realización de tareas matemáticas que los alumnos no lograrían por sí mismos en una primera instancia.

Fecha de recepción: 12 de junio de 2019. **Fecha de aceptación:** 05 de marzo de 2020.

[1] Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. milagroscazaresb@gmail.com, http://orcid.org/0000-0002-7533-2902.

[2] CONACyT-Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. dapaez@correo.uaa.mx, http://orcid.org/0000-0002-4499-4452

[3] CONACyT-Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. maria.perez@edu.uaa.mx, http://orcid.org/0000-0003-3655-0090

La revisión de literatura permite concluir que el docente construye andamiajes que potencializan la metacognición en los estudiantes, llevándolos a determinar, ejecutar y evaluar procedimientos de solución ante una tarea.

Palabras claves: *metacognición, aprendizaje autorregulado, prácticas docentes, educación matemática, andamiaje.*

Abstract: One of the aims of basic and middle education is to enable students to become active learners and to regulate their learning processes. As a result of this, current research looks at metacognition and its influence on mathematics learning, but the role played by teachers in promoting metacognition has not been studied in depth. The purpose of this paper is to develop a theoretical discussion on the teaching actions that potentiate metacognitive strategies. This discussion is focused on mathematics teaching for self-regulated learning, and it takes as a reference the *scaffolding* metaphor. In order to achieve its purpose, the paper first examines the concept of metacognition and its relationship with self-regulated learning; afterwards the main research strands on metacognition are presented and the role of the teacher as a mediator in solving mathematical tasks is analyzed. The literature review shows that teachers build scaffoldings in order to potentiate metacognition in students, and these *scaffoldings* lead students to determine, execute and assess procedures in the course of solving mathematical tasks.

Keywords: *metacognition, self-regulated learning, teaching practices, mathematics education, scaffolding.*

INTRODUCCIÓN

Una de las expectativas de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en matemáticas es que los profesores promuevan que los estudiantes sean autónomos en su propio aprendizaje, en términos de que reflexionen y regulen sus acciones en tareas matemáticas.[4] Diversos investigadores (Díaz, Pérez,

[4] El concepto de tarea se refiere a “ejercicios, problemas o [...] actividades de contenido matemático que se realizan en la clase” (SEP, 2011, p. 2).

González-Pienda y Núñez, 2017; Preiss, Grau, Torres y Calcagni, 2018) plantean que tal autonomía se puede estimular a través de la implementación de estrategias metacognitivas, pues éstas favorecen que los alumnos se den cuenta de los procedimientos que deben implementar, cómo y para qué llevarlos a cabo ante una tarea matemática. Para Schoenfeld (2012), estas estrategias repercuten en las respuestas que obtienen los estudiantes y pueden incidir en su rendimiento académico.

El estudio de la metacognición surgió desde hace cinco décadas en educación matemática (Desoete y De Craene, 2019) y está centrado, principalmente, en cómo los estudiantes por sí solos regulan sus acciones para dar solución a problemas matemáticos (Díaz, *et al*., 2017; Schoenfeld, 1992). Algunas de las líneas de investigación en este campo estudian la relación entre creencias, conocimiento matemático y aprendizaje autorregulado (Dignath-van Ewijk y van der Werf, 2012), aprender a aprender matemáticas a través de la metacognición (Iriarte, 2011), y uso de estrategias metacognitivas para el rendimiento académico (Kambita y Hamanenga, 2018).

Actualmente, varios investigadores plantean también la necesidad de poner mayor atención a los factores externos al estudiante que potencializan la metacognición para el aprendizaje autorregulado. Se apunta que la clase de matemáticas es un espacio ideal para fomentar estrategias relacionadas con la metacognición (Mato-Vázquez, Espiñeira y López-Chao, 2017; Rigo, Páez y Gómez, 2010), ya sea de manera deliberada o no (Dignath-van Ewijk y van der Werf, 2012; Mato-Vázquez, *et al*., 2017). Sin embargo, de acuerdo con la revisión de literatura, se requiere discutir qué estrategias promueve el profesor al enseñar contenidos matemáticos, cómo lo hace y en qué momento de la clase ocurre.

El presente artículo tiene como objetivo plantear una reflexión teórica sobre la forma en que las prácticas docentes potencializan la metacognición en los estudiantes para autorregular su aprendizaje en tareas matemáticas. Para ello, se toma como referente la metáfora de *andamiaje* (Bruner, 1987), en la cual se concibe que el profesor proporciona los medios o andamios necesarios para solucionar una tarea matemática de manera autónoma y regulada, y a través de este apoyo se potencializan estrategias de corte metacognitivo.

METACOGNICIÓN: INTERACCIÓN ENTRE DOS CONSTRUCTOS

El concepto de metacognición ha sido discutido y usado en diversos contextos de la educación (Desoete y De Craene, 2019; Preiss, *et al*., 2018) y relacionado, principalmente, con el aprendizaje autorregulado (Martínez, 2017; Schoenfeld, 2012; Zimmerman y Moylan, 2009). A continuación, se recurre a su significado y desarrollo inicial para una mejor comprensión del constructo.

Desde una perspectiva psicológica, en sus primeros estudios, Flavell (1976; Jaramillo y Simbaña, 2014) se dio cuenta de que los niños desarrollaban procesos cognitivos de alto nivel para controlar la memoria y recuperar información. Para el control de memoria identificó que implementaban acciones para almacenar información, por ejemplo, atender, codificar, memorizar y estudiar. Con respecto a la recuperación de información, recurrían a reconocer, recordar y reconstruir, entre otras acciones. Para Flavell (1985) la metacognición se relaciona con la metamemoria, y esta última se refiere a:

> los conocimientos y procesos cognitivos que tiene la persona sobre todo lo relativo a la memoria. En la memoria se distinguen, asimismo, entre actividades de almacenamiento y de recuperación. Como sus propios nombres indican, las actividades de almacenamiento sitúan información en la memoria mientras que las actividades de recuperación escogen información de la memoria. Almacenar significa atender, codificar, memorizar, estudiar y cosas por el estilo. Aprender suele ser un buen sinónimo. Recuperar significa reconocer, recordar, reconstruir el recuerdo de lo que se ha almacenado anteriormente. (pp. 277-279)

La metacognición, hoy en día, es definida como el conocimiento que tiene un estudiante de su propia cognición, lo que le permite regular su pensamiento y aprendizaje; consiste en planear, monitorear y evaluar determinados procesos cognitivos que le permitan solucionar tareas específicas de aprendizaje (Martínez, 2017; Medina, Castleberry y Persky, 2017). Las investigaciones más recientes sobre este tema retoman dos tipos de estudios: por un lado, y de acuerdo con Schneider y Artelt (2010), se remiten a los primeros trabajos de Flavell, los cuales aluden al grado de conocimiento y conciencia que posee el alumno de su memoria (Schlagmüller y Schneider 2007, citados en Schneider y Artelt, 2010); y, por otro, discuten la metacognición como un tipo de pensamiento de orden superior que implica un control activo sobre los propios procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas (Baten, Praet y Desoete, 2017).

Dentro de las investigaciones que discuten la metacognición como un tipo de pensamiento de orden superior, se encuentran autores como Osses y Jaramillo (2008), quienes ponen en perspectiva dos constructos teóricos que interactúan entre sí: a) conocimiento cognitivo o metaconocimiento, y b) control metacognitivo o autorregulación del conocimiento. Con el interés de dar cuenta de la relación directa entre ambos constructos, Osses y Jaramillo (2008) señalan lo siguiente:

> Se practica la metacognición cuando se tiene conciencia de la mayor dificultad para aprender un tema que otro; [...] cuando se piensa que es preciso examinar todas y cada una de las alternativas en una elección múltiple antes de decidir cuál es la mejor, cuando se advierte que se debería tomar nota de algo porque puede olvidarse. (p. 191)

De acuerdo con Schoenfeld (1992), el conocimiento cognitivo y metacognitivo se desarrollan simultáneamente en la comprensión de conceptos o procedimientos matemáticos ante una tarea dada; en otras palabras, "los planificadores de problemas efectivos planifican y realizan un seguimiento de qué tan bien van las cosas a medida que implementan sus planes. Si parecen estar progresando, continúan; si hay dificultades, reevalúan y consideran alternativas" (Schoenfeld, 2012, p. 137). A continuación, se describe cada uno de estos constructos.

Conocimiento cognitivo o metaconocimiento

El metaconocimiento para Flavell (1987, p. 21) es "aquella parte del conocimiento del mundo que uno posee y que tiene que ver con cuestiones cognitivas (o quizá mejor psicológicas)". Se refiere al componente de tipo declarativo que un alumno tiene acerca de tres tipos de conocimiento: la tarea matemática y sus demandas, los recursos cognitivos disponibles para afrontarla y el procedimiento que puede utilizar para resolver tal tarea (Sáiz y Guijo, 2010).

En relación con el primer conocimiento, la tarea matemática le demanda al estudiante saber cuál es el objetivo que se pretende lograr en ella y qué características tiene, de modo que lo lleve a identificar el nivel de dificultad y a elegir el procedimiento más apropiado para resolverla (Osses y Jaramillo, 2008). Un ejemplo de ello es cuando un alumno en la clase de matemáticas "identifica que la manera en la cual está expuesta el problema dificulta la comprensión" (Klimenko y Alvares, 2009, p. 18) o cuando un estudiante distingue el tipo de tarea y la relación que ésta tiene con sus conocimientos previos (Sáiz y Román, 2011).

El conocimiento sobre los recursos cognitivos incluye las potencialidades y limitaciones cognitivas que el alumno tiene y que le facilitarán desarrollar la tarea matemática, así como tomar consciencia de lo que le afecta para su rendimiento académico (Osses y Jaramillo, 2008). En relación con este conocimiento, se ha reportado que los estudiantes revisan por cuenta propia los procedimientos implementados para resolver problemas matemáticos como una estrategia para validar el resultado (Barrera y Cuevas, 2017; Márquez y Cuevas, 2017).

El tercer tipo de conocimiento implica conocer los procedimientos que el alumno domina para aprender y que puede implementar en la solución de diversas tareas matemáticas (Dignath y Büttner, 2008); por ejemplo, saber que una forma de calcular la pendiente de una gráfica lineal es mediante su definición o a través de dos de sus puntos (Santos, 2010).

Control metacognitivo o autorregulación del conocimiento

La autorregulación del conocimiento está relacionada con las estrategias de planear, monitorear y evaluar los procedimientos que usa el estudiante para dar solución a tareas matemáticas. Para Zimmerman y Moylan (2009), estas estrategias se definen como la capacidad que tiene un alumno para utilizar el metaconocimiento de manera eficiente en la solución de tareas, pues le permite darse cuenta de qué conocimientos matemáticos requiere, con cuáles cuenta y cómo implementarlos. En otras palabras, a través del uso de estas estrategias, el alumno es capaz de iniciar, dirigir y regular su propio aprendizaje al realizar una tarea matemática. Desde esta perspectiva, de acuerdo con Barrera y Cuevas (2017), los alumnos llevan a cabo las siguientes acciones para definir el procedimiento de solución ante una tarea dada:

> Meditan el plan antes de comenzar a plasmarlo, eligen el método que consideran más pertinente según las necesidades del problema, consideran desde un inicio solo los datos relevantes y decantarse por elegir aquellos tipos de procedimientos que generalmente les funcionan (gráficos, esquemas, dibujos, entre otros). (p. 7)

Después de planear e identificar la alternativa de solución que consideran más viable, los alumnos siguen el plan que han diseñado por lo que desarrollan procedimientos algorítmicos necesarios que incluyen:

> La secuencia lógica de sus pasos, ajustes en los cálculos, cambios en su estrategia inicial ya sea porque su método no los llevó a la respuesta [esperada], no les parece que responda a las necesidades del problema o para optimizar la solución. (Barrera y Cuevas, 2017, p. 7)

Una manera de sintetizar lo señalado por Barrera y Cuevas, y que permite visualizar la autorregulación cognitiva de un estudiante al solucionar una tarea matemática, es el *Modelo Cognitivo Social de Autorregulación* propuesto por Zimmerman y Moylan (2009). Este modelo toma como base aspectos socio-cognitivos, en particular, da cuenta de los factores que influyen para que ocurra la autorregulación del aprendizaje en el contexto de tareas (Panadero y Tapia, 2014).

De acuerdo con el *Modelo Cognitivo Social de Autorregulación*, la autorregulación del aprendizaje son los "pensamientos, sentimientos y acciones autogenerados para alcanzar los objetivos de aprendizaje" (Zimmerman y Moylan, 2009, p. 299) que el alumno pone en marcha al solucionar una tarea matemática. Además, este *Modelo* plantea la autorregulación como un proceso cíclico que involucra tres fases o estrategias metacognitivas, las cuales mantienen una estrecha relación entre sí: planear, monitorear y evaluar (figura 1).

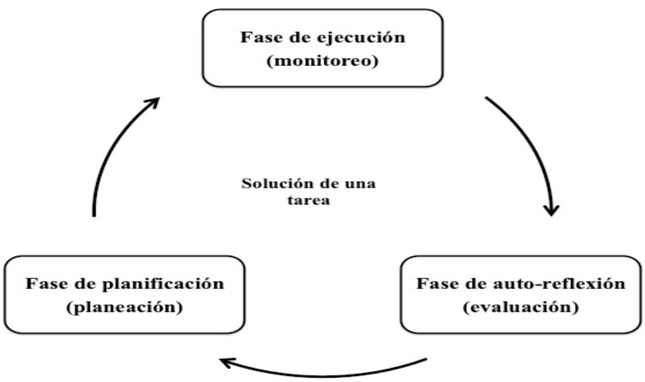


Figura 1. Fases y estrategias metacognitivas para la autorregulación del aprendizaje en la solución de una tarea matemática. Adaptada de Zimmerman y Moylan (2009, p. 300).

En la figura anterior se destacan dos aspectos. El primero tiene que ver con la interrelación entre las estrategias metacognitivas, las cuales dependen de la frecuencia de retroalimentación proveniente de fuentes internas y externas. En el contexto de la educación, la fuente externa se refiere a las acciones del profesor de matemáticas, y la fuente interna a la propia motivación del alumno para llevar a cabo una tarea. Ambas fuentes de retroalimentación son relevantes en el desarrollo e implementación de tales estrategias, la manera en cómo se presentan facilita o debilita el esfuerzo e interés del estudiante para autorregular su aprendizaje.

El segundo aspecto corresponde al concepto de metacognición. En el modelo de Zimmerman y Moylan (2009) la metacognición se concibe como un proceso continuo que involucra la reflexión y la acción. Al ser un "circuito de retroalimentación personal" (p. 300), cuando el alumno realiza una tarea matemática, hace uso de la información sobre su rendimiento y los resultados para implementar futuras adaptaciones.

Con base en lo señalado por Zimmerman y Moylan (2009), en los siguientes apartados se presenta la descripción de cada estrategia metacognitiva y la relación entre ellas al momento de solucionar una tarea matemática.

Planeación: ¿qué tengo que hacer para dar respuesta a la tarea matemática?

Para afrontar una tarea matemática, se espera que el estudiante trace un plan de acción, es decir, que determine el procedimiento o el algoritmo de solución (Polya, 1979; Schoenfeld, 1992). La planeación, como estrategia metacognitiva, surge cuando el alumno se enfrenta a una tarea e involucra la motivación, los procesos cognitivos y su esfuerzo para resolver la tarea, de modo que lo lleven a establecer el procedimiento a utilizar (Zimmerman y Moylan, 2009).

La planeación implica que el alumno analice la tarea a partir de sus conocimientos previos, es decir, que la descomponga en indicaciones o identifique los datos clave para determinar cómo resolverla (Polya, 1979; Santos, 2010). También permite que el alumno diseñe una estrategia personal en la que establezca objetivos para resolver la tarea matemática, de acuerdo con sus características particulares, las habilidades y el tiempo que disponga (Zimmerman, 2008).

El análisis de la tarea involucra dos elementos: establecer metas y elaborar un plan de acción, donde el alumno elige las estrategias de tipo cognitivas y relacionadas con el manejo de recursos didácticos y matemáticos (Quintana-Terés, 2014). Además de analizar la tarea, el alumno identifica creencias de tipo motivacional que repercuten en sus acciones en relación con el cumplimiento de la tarea. Las creencias, de acuerdo con Zimmerman (2008), pueden estar relacionadas con: autoeficacia, expectativas de resultados, interés, valor intrínseco de la tarea matemática, así como orientación hacia el cumplimiento de ésta como meta de aprendizaje. Enseguida, se explican con mayor detalle.

La autoeficacia le permite al estudiante motivarse y darse cuenta de la capacidad que tiene para cumplir con un determinado nivel de desempeño en la tarea. Por otra parte, las expectativas de resultados se refieren a las creencias que tiene un alumno sobre la posibilidad de éxito que tendrá al realizar determinada tarea matemática. Además, el interés y valor intrínseco de la tarea representan el grado de importancia que el alumno le asigna y reflejan el compromiso que tiene para realizarla y culminarla.

Otras creencias motivacionales que Zimmerman y Moylan (2009) identifican son las referidas a la orientación hacia la meta, que es el compromiso que un alumno tiene con el logro de las metas establecidas en la planeación. Tener metas le permite al estudiante considerarse capaz de lograr la tarea, dedicar mayor tiempo y esfuerzo para tal logro. En este contexto, el alumno trata de demostrar su capacidad para recibir opiniones favorables sobre su desempeño, tomando como base su esfuerzo (Quintana-Terés, 2014).

Una manera de potencializar la estrategia de planificación en la clase de matemáticas es impulsar a los alumnos a que se cuestionen a sí mismos sobre su entendimiento de la tarea antes de iniciar el proceso de solución. Lo anterior puede promoverlo un docente a través de plantear preguntas que lleven a los alumnos a pensar si comprendieron la instrucción, si identificaron los datos necesarios en la tarea matemática (Fourés, 2011) y los procedimientos que consideran necesarios para resolver la tarea matemática. En este sentido, Polya (1979) señala:

> cuando el profesor hace a sus alumnos una pregunta o una sugerencia [...], puede proponerse dos fines. Primero, el ayudar al alumno a resolver el problema en cuestión. Segundo, el desarrollar la habilidad del alumno de tal modo que pueda resolver por sí mismo problemas ulteriores. (p. 27)

Monitoreo: ¿lo estoy haciendo bien?

La estrategia de monitoreo permite que el estudiante controle sus acciones y procesos cognitivos, por ejemplo, procedimientos matemáticos o algoritmos que realiza para resolver una tarea matemática. Según el modelo de Zimmerman y Moylan (2009), esta estrategia está en la fase de ejecución. El monitoreo involucra el autocontrol y la auto-observación; a continuación, se explica cada uno.

El autocontrol se refiere a mantener la concentración y el interés en la solución de una tarea, lo cual incluye poner en marcha una serie de estrategias de monitoreo específicas y generales. Las estrategias de tipo específicas puntualizan el desarrollo de un proceso sistemático para atender aspectos propios de una tarea, por ejemplo: subrayar un texto para recordar las ideas o conceptos matemáticos más importantes (Panadero y Tapia, 2014). Por su parte, las estrategias de tipo general están relacionadas con la motivación y le permiten al alumno incentivar y mantener el interés para realizar la tarea. Una de estas estrategias ocurre cuando el estudiante se *habla a sí mismo* para recordar el objetivo por cumplir y así regula su motivación, por ejemplo: "este problema no va a poder conmigo, conseguiré averiguar cómo resolverlo" (Panadero y Tapia, 2014, p. 456).

La auto-observación hace referencia al seguimiento de tipo mental que el alumno realiza en función de: a) los resultados de su desempeño y de la calidad de lo que hizo, b) los procedimientos para dar solución a una tarea matemática, y c) su eficacia para lograr los objetivos previamente planteados. Así, en caso de que un estudiante realice de manera incorrecta la tarea y se dé cuenta de ello, la auto-observación le permitirá revisar sus procedimientos matemáticos y volver a implementarlos o determinar uno nuevo, esto último requerirá que regrese a la fase de planeación. Cabe señalar que, para Panadero y Tapia (2014), la auto-observación se logra si el alumno realiza auto-monitoreo, auto-registro de las acciones y procedimientos implementados en la tarea matemática.

El auto-monitoreo es comparado con la auto-evaluación durante la realización de una tarea y se refiere a comparar lo que se está realizando en función de algún criterio que sirva como base para valorar la ejecución. El auto-registro, por su parte, consiste en anotar las acciones que se realizan durante la ejecución de una tarea matemática (Panadero y Tapia, 2014), por ejemplo, cuando un alumno apunta, mentalmente o por escrito, la cantidad de tiempo que le lleva resolver una ecuación de segundo grado, con la finalidad de resolver otras ecuaciones en un menor tiempo.

Ahora bien, en la clase de matemáticas, el docente al fungir como mediador puede plantearle preguntas que lleven a los alumnos a verificar, rectificar y revisar el procedimiento que ha determinado para dar solución a una tarea dada. Tomando en consideración la idea de Polya (1979), en torno a las fases de resolución de problemas, el maestro puede preguntarle, por ejemplo, si ha seguido el plan que había diseñado previamente o por qué el procedimiento implementado funciona para una tarea o si funcionará para tareas similares.

Evaluación: ¿lo he hecho bien?

La evaluación como estrategia de aprendizaje metacognitiva está relacionada con la respuesta y el producto final de una tarea matemática, e implica que el alumno reconozca qué tanto la planeación y el monitoreo influyeron en los resultados que obtuvo. De acuerdo con Zimmerman y Moylan (2009), la evaluación tiene dos componentes: el auto-juicio y la auto-reacción.

El auto-juicio tiene que ver con la reflexión que el alumno hace en términos de juzgar su actuación en la solución de la tarea: si el procedimiento lo implementó de manera adecuada o si le faltó hacer algo. Para Panadero y Tapia (2014), la autoevaluación y atribuciones causales son los componentes del auto-juicio. En la auto-evaluación, el alumno compara su desempeño con la meta inicial, el desempeño y las respuestas de sus compañeros o la respuesta dada por el docente (Quintana-Terés, 2014). Las atribuciones causales implican que el estudiante considere las creencias con relación a las causas de los resultados, "negativo –contrario a lo esperado– o positivo", que obtuvo al concluir la tarea (Panadero y Tapia, 2014, p. 458).[5] Estas creencias responden tanto a factores internos como externos; dentro de los internos se encuentran el esfuerzo, suerte o grado de habilidad, y en los externos, están el nivel de demanda cognitiva de la tarea y la exigencia del docente para realizarla (Quintana-Terés, 2014).

La auto-reacción está vinculada con el comportamiento de los alumnos en respuesta a los juicios propios sobre los procedimientos realizados para el cumplimiento de la tarea. La auto-reacción comprende la satisfacción y las decisiones de tipo adaptativas y defensivas. De acuerdo con Quintana-Terés (2014), las decisiones adaptativas ocurren cuando el estudiante tiene la disposición para seguir usando o modificar un determinado procedimiento o algoritmo

[5] Los afectos positivos generan un mayor interés y motivación para realizar la tarea (Panadero y Tapia, 2014).

matemático, y las decisiones defensivas hacen que el alumno evite realizar esfuerzos adicionales para aprender, esto con el interés de prevenir futuras insatisfacciones.

Para potencializar la evaluación, como estrategia metacognitiva, el docente de matemáticas, puede hacer preguntas que guíen a los alumnos hacia la reflexión y revisión con respecto al procedimiento utilizado para resolver la tarea, por ejemplo, que identifiquen si éste fue ejecutado de manera correcta y si se verificó el resultado obtenido (Ellis, Denton y Bond, 2014). El docente le puede solicitar al alumno que argumente la razón de utilizar determinado procedimiento, o que describa cómo lo seleccionó e implementó, así como la percepción sobre su rendimiento en la solución de la tarea (Klimenko y Alvares, 2009).

PRÁCTICA DOCENTE Y METACOGNICIÓN EN MATEMÁTICAS

En educación matemática existe una variedad de estudios teóricos y empíricos que abordan el tema de la metacognición debido a su relevancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Kambita y Hamanenga, 2018). Por ejemplo, la investigación desarrollada por Díaz, *et al*. (2017) tuvo como objetivo dar cuenta de la forma en que varios docentes promueven que sus estudiantes universitarios realicen las siguientes actividades al resolver una tarea matemática:

> 1) efectuar una reflexión sobre formas de estudio para alcanzar un determinado objetivo [...]; 2) comentar brevemente [...] experiencias personales sobre procedimientos de planificación del estudio, formas de estudio que facilitan la comprensión y la supervisión del propio proceso de estudio; 3) posteriormente a la clase, estudiar en forma autónoma el tema. (p. 97)

Los resultados presentados por Díaz, *et al*. (2017) muestran que cuando los alumnos reciben orientación y apoyo por parte del docente, tienen mayores puntuaciones en autorregulación del aprendizaje, así como un aumento en la percepción sobre la eficacia de las estrategias de aprendizaje metacognitivas. En este estudio, Díaz, *et al*. emplearon un diseño cuasi-experimental, donde participaron tres docentes que estaban a cargo de tres materias, en tres carreras universitarias seleccionadas por la semejanza en sus objetivos y contenidos de estudio.

Otra de las líneas de investigación es la evaluación de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos. Diversos estudios resaltan que el nivel metacognitivo de los estudiantes es eficiente y, que utilizan con mayor frecuencia estrategias de monitoreo, mientras que la planificación y evaluación las emplean en menor medida (Barrera y Cuevas, 2017; Fernández y García, 2013). En el estudio realizado por Barrera y Cuevas (2017) se aplicó un test con cinco problemas de aritmética y una entrevista semiestructurada sobre los propios procesos de resolución de problemas a 14 estudiantes universitarios, de 18 a 25 años de edad. Los resultados muestran un escaso uso de estrategias metacognitivas por parte de los estudiantes al resolver los problemas y presentan dificultades para reflexionar sobre sus procedimientos de solución.

Una tercera línea, que ha emergido en las últimas dos décadas, versa sobre el papel del profesor en el desarrollo de la metacognición para el aprendizaje autorregulado en la solución de tareas matemáticas. Al respecto, diversas investigaciones postulan que las estrategias metacognitivas pueden ser enseñadas de manera intencionada o imprevista (Dignath-van Ewijk y van der Werf, 2012) teniendo diferentes niveles de impacto en los aprendizajes de los estudiantes. Rigo, *et al*. (2010) señalan que la enseñanza de las estrategias metacognitivas puede darse cuando el docente les solicita a los alumnos que argumenten o demuestren si el procedimiento matemático que usaron ante una determinada tarea es correcto o si funciona para tareas similares, lo anterior como un medio para la generalización del procedimiento. En este sentido, durante la enseñanza de las matemáticas, el profesor brinda oportunidades para que el estudiante cuestione, monitoree y evalúe su aprendizaje.

Entre otras líneas de investigación se pueden mencionar los estudios que centran su atención en la relación entre conocimiento y las creencias de los docentes sobre el fomento de la autorregulación para el logro de aprendizaje, por ejemplo, Dignath-van Ewijk y van der Werf (2012) encontraron que algunos docentes "disponen de actitudes positivas hacia la idea de proporcionar autonomía en el estudiante" (p. 8), pero otros desconocen cómo apoyar la autorregulación de manera efectiva en los alumnos para así lograr una autonomía en su aprendizaje. Lo anterior refleja la necesidad de conocer qué es lo que los docentes conocen y creen con respecto a la metacognición y a potencializarla en sus alumnos.

ANDAMIAJE: UN MEDIO PARA PROMOVER ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS

La interacción social entre el docente y los alumnos es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, así como el uso de estrategias metacognitivas y el desarrollo de tareas (Larios, Font, Giménez y Díaz, 2012). Esta interacción puede darse a través de lo que Bruner (1987; van de Pol, Volman y Beishuizen, 2010) llama *andamiaje*, donde el aprendizaje se da como un proceso colaborativo y de manera autorregulada. Según el *Modelo Cognitivo Social de Autorregulación* (Zimmerman y Moylan, 2009), las estrategias metacognitivas pueden ser promovidas y potencializadas en el alumno a partir de intervenciones que hace el docente en la solución de tareas matemáticas.

Desde la perspectiva sociocultural, el aprendizaje ocurre con apoyo de otros (Vygotsky, 1978), como lo es el docente. Al tener mayor dominio sobre un tema, se espera que el profesor proporcione los medios necesarios para desarrollar habilidades en el alumno que le permitan solucionar la tarea matemática de manera autónoma y regulada (Bruner, 1987; Wood, Bruner y Ross, 1976). Para Bruner (1987) tal apoyo debe ser provisional, de modo que en un sentido metafórico sea un *andamiaje* que vincule los conocimientos previos del alumno y los que se espera construya al realizar una tarea por sí solo.

El andamiaje en la enseñanza de las matemáticas implica un "... control adulto [i.e., del profesor] de aquellos elementos de la tarea que inicialmente están más allá de la capacidad del aprendiz, lo que permite concentrarse y completar solo aquellos elementos que están dentro de su rango de competencia" (Wood, *et al.*, 1976, p. 90). En este sentido, el docente tiene el objetivo de mediar el logro de los aprendizajes de manera paulatina, hasta que la responsabilidad de manejar y dominar el proceso de aprendizaje y logro de la tarea matemática sea solo del alumno.

Para que ocurra el andamiaje en matemáticas, el profesor debe implementar las siguientes acciones: a) motivar al estudiante durante el desarrollo de una tarea matemática; b) mantener el interés en el alumno por resolver la tarea, c) acompañar al alumno en el manejo y control de la frustración tras intentar una actividad y no lograrla (Bruner, 1987; Wood, *et al.*, 1976). Además, tales acciones, como objetivo del andamiaje, deben lograr que sea el alumno quien determine, implemente y argumente el procedimiento de solución (Medina, *et al.*, 2017).

Diversas investigaciones en educación matemática (van de Pol, *et al.*, 2010; van de Pol, Volman, Oort y Beishuizen, 2015) distinguen tres elementos específicos del andamiaje: a) contingencia, b) desvanecimiento y c) transferencia de responsabilidad. Enseguida se describe en qué consiste cada uno de ellos.

El primero se refiere a que el apoyo brindado por el docente debe estar al mismo nivel o que se pueda adaptar al grado actual del rendimiento del alumno o de lo que el docente pueda percibir como competencia que ya es capaz de desarrollar el estudiante, por él mismo. Es importante que en este elemento del andamiaje, el docente de matemáticas adecue su nivel de comprensión con el del alumno, de tal manera que le brinde el profesor las condiciones para que construya sobre lo que conoce, y el maestro pueda decidir sobre cuándo retirar el apoyo, en función de las respuestas del alumno (van de Pol, *et al.*, 2010). Por ejemplo, Schoenfeld (2012) plantea que antes de resolver un problema, el estudiante asimila y se orienta a la situación y hacia cierta información que ya conoce.

El desvanecimiento del apoyo, pasando del andamiaje más directivo e intenso en la etapa inicial, a formas más autorreguladas, dependerá del nivel del desarrollo y competencia del alumno. Cuando se está aprendiendo una actividad nueva o el desarrollo de una tarea matemática, el andamiaje es oportuno, ya que a través de ayudas verbales, físicas o estímulos cognoscitivos se va instruyendo sobre cómo y qué hacer. A medida que el alumno va interiorizando esos procedimientos, llega un punto en que ya no le son necesarios (van de Pol, *et al.*, 2010).

Por último, la transferencia de responsabilidad se dirige hacia una entrega gradual del desempeño de una tarea matemática al estudiante (van de Pol, *et al.*, 2010). En este elemento, el docente debe considerar y enfocar su atención en las respuestas de los alumnos, en brindar tiempo suficiente para que recuperen información, desarrollen sus respuestas, y para impulsar en ellos la posibilidad de realizar tareas por sí solos.

Como parte de algunos datos empíricos que reflejan cómo el andamiaje influye en la enseñanza y en el aprendizaje de matemáticas, se retoman las ideas presentadas por Márquez y Cuevas (2017); quienes resaltan que, al enseñar contenidos matemáticos, el profesor modela procedimientos que le permiten al alumno con apoyo y, en un momento dado, de manera autónoma planear, monitorear y evaluar su aprendizaje, al grado de que generaliza los conocimientos matemáticos (e.g., fórmulas, conceptos y procedimientos).

Lo anterior muestra que, desde la perspectiva del andamiaje, los docentes de matemáticas deben orientar las tareas hacia la reflexión, autocontrol y direccionalidad del aprendizaje, de modo que provoquen en el estudiante la necesidad de usar estrategias cognitivas y metacognitivas (Klimenko y Alvares, 2009).

CONSIDERACIONES FINALES

La revisión de literatura presentada evidencia la necesidad de estudios centrados en la práctica del profesor y de los estudiantes en la clase de matemáticas, como sus contribuciones discursivas que den cuenta de las interacciones que propician el aprendizaje en matemáticas (van de Pol, *et al.*, 2010). Con esta idea, se retoma el interés de este artículo, que analiza cómo el andamiaje propuesto por el docente en su práctica promueve la reflexión y potencializa la metacognición en el alumno para el aprendizaje autorregulado en tareas matemáticas, ya que de acuerdo con Jiménez y Gutiérrez (2017), lo que el docente de matemáticas piense o conciba determina su estilo y forma de enseñanza, y esto se refleja en su práctica docente.

Las diversas líneas de investigación aquí expuestas, destacan el uso de estrategias metacognitivas en la solución de tareas matemática para lograr un aprendizaje autónomo, que le permita al alumno autorregularse al realizar otras tareas matemáticas. Dichas líneas también sugieren la necesidad de documentar de qué manera y en qué situaciones se promueve y mejora el aprendizaje metacognitivo en los estudiantes de matemáticas, en contextos no intervenidos y en diferentes niveles educativos (Educación Básica, Media Superior y Superior), pues en todos los grados o niveles, el docente tiene la responsabilidad de promover y generar espacios donde el alumno autorregule su aprendizaje (NCTM, 2014).

La literatura muestra que, en la clase de matemáticas se puede promover de manera deliberada o no el uso de estrategias metacognitivas. A la luz de esto, se sugieren futuras líneas de investigación desde un enfoque cualitativo que permitan describir a profundidad la realidad de la práctica docente en educación matemática. Resulta importante realizar estudios que centren el interés en conocer la relación entre las creencias y el conocimiento de los docentes acerca de sus propias estrategias metacognitivas y estudiar si predicen la promoción de la autorregulación cognitiva en sus alumnos durante la clase y a través del andamiaje (Dignath-van Ewijk y van der Werf, 2012).

El análisis propuesto da pie para presentar posibles investigaciones que den cuenta de la efectividad del andamiaje en la clase de matemáticas y en los niveles de educación Media Superior y Superior, pues el alumno de estos niveles sigue en proceso de formación en conocimientos, habilidades y desarrollo de estrategias de aprendizaje que le permitan aprender a lo largo de la vida. Además, es necesario documentar cómo se promueve la metacognición a través del andamiaje al plantear tareas matemáticas en la clase. Por último, resulta trascendental analizar y describir la práctica docente para fomentar la mejora en sus propios procesos metacognitivos y la reflexión profesional de su quehacer (Grau, Calcagni, Preiss y Ortiz, 2017), ya que los docentes al ser expertos en el contenido matemático poseen una completa comprensión de los contenidos que enseñan, por lo que son capaces de presentar los temas utilizando diversas estrategias (Preiss, *et al.*, 2018).

REFERENCIAS

Barrera, M. y Cuevas, J. (2017). Uso de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas aritméticos de estudiantes de primer ingreso de la licenciatura en enseñanza de las Matemáticas. *Trabajo presentado en el XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa* (pp. 1-12). San Luis Potosí. http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v14/doc/2380.pdf

Baten, E., Praet, M. y Desoete, A. (2017). The relevance and efficacy of metacognition for instructional design in the domain of mathematics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 49*(4), 613-623.

Bruner, J. (1987). *Actual minds, possible worlds.* Cambridge: Harvard University Press.

Desoete, A. y De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: An overview. *ZDM Mathematics Education*, *51*(4), 565-575.

Díaz, A., Pérez, M., González-Pienda, J. y Núñez, J. (2017). Impacto de un entrenamiento en aprendizaje autorregulado estudiantes universitarios. *Perfiles Educativos*, *39*(157), 87-104.

Dignath, C. y Büttner, G. (2008). Components of fostering self-regulated learning among students. A meta-analysis on intervention studies at primary and secondary school level. *Metacognition and Learning, 3*(3), 231-264.

Dignath-van Ewijk, C. y van der Werf, G. (2012). What teachers think about self-regulated learning: Investigating teacher beliefs and teacher behavior of enhancing students' self-regulation. *Education Research International*, *2012*, 741713, 1-10.

Ellis, A., Denton, D. y Bond, J. (2014). An analysis of research on metacognitive teaching strategies. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 116,* 4015-4024.

Fernández, M. y García, P. (2013). Autorregulación y rendimiento académico en matemáticas. *Aula Abierta*, *41*(1), 39-48.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L. B. Resnick (Ed.), *The Nature of Intelligence* (pp. 231-236). Lawrence Erlbaum Associates.

Flavell, J. H. (1985). *Cognitive development.* Englewood Cliffs. Prentice Hall. [Traducción al castellano: Pozo, M. J. y Pozo, J. I. (Eds. y Trads.). (1993). *El desarrollo cognitivo*. Aprendizaje Visor].

Flavell, J. H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. En F. E. Weinert y R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, Motivation, and Understanding* (pp. 21-29). Lawrence Erlbaum.

Fourés, C. (2011). Reflexión docente y metacognición. Una mirada sobre la formación de formadores. *Zona Próxima*, *14*, 150-159.

Grau, V., Calcagni, E., Preiss, D. y Ortiz, D. (2017). Teachers' professional development through university-school partnerships: Theoretical standpoints and evidence from two pilot studies in Chile. *Cambridge Journal of Education*, *47*(1), 19-36.

Iriarte, P. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona Próxima*, *15*, 2-21.

Jaramillo, L. y Simbaña, V. (2014). La metacognición y su aplicación en herramientas virtuales desde la práctica docente. *Sophia*, *Colección de Filosofía de la Educación, 16*, 299-313.

Jiménez, A. y Gutiérrez, A. (2017). Realidades escolares en las clases de matemáticas. *Educación Matemática*, *29*(3), 109-129.

Kambita, D. y Hamanenga, J. (2018). The impact of problem solving approach on students' performance in mathematical induction: A case of Mukuba University. *Journal of Education and Practice, 9*(5), 97-105.

Klimenko, O. y Alvares, J. (2009). Aprender cómo aprendo: la enseñanza de estrategias metacognitivas. *Educación y Educadores, 12*(2), 11-28.

Larios, V. Font, V. Giménez, J. y Díaz, A. (2012). Teaching practices research as a source to develop training programs for mathematics teachers. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 22*(suplemento 1), 284-287.

Márquez, C. y Cuevas, R. (2017). Estrategias cognitivas y metacognitivas en estudiantes de educación secundaria con aptitudes sobresalientes. *Trabajo presentado en el XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa* (pp. 1-8). http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v14/doc/2452.pdf

Martínez, X. (2017). Pedagogías metacognitivas y la construcción de un foro dialógico. *Innovación Educativa, 17*(74), 8-10.

Mato-Vázquez, D., Espiñeira, E. y López-Chao, V. (2017). Impacto del uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas. *Perfiles educativos*, *39*(158), 91-111.

Medina, M. S., Castleberry, A. N. y Persky, A. M. (2017). Strategies for improving learner metacognition in health professional education. *American Journal of Pharmaceutical Education, 81*(4), 78.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.

Osses, S. y Jaramillo, S. (2008). Metacognición: Un camino para aprender a aprender. *Estudios Pedagógicos*, *XXXIV*(1), 187-197.

Panadero, E. y Tapia, J. (2014). ¿Cómo autorregulan nuestros alumnos? Revisión del modelo cíclico de Zimmerman sobre autorregulación del aprendizaje. *Anales de Psicología, 30*(2), 450-462.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Preiss, D. D., Grau, V., Torres, D. y Calcagni, E. (2018). Metacognition, self- regulation, and autonomy support in the chilean mathematics classroom: An observational study. *New Directions for Child and Adolescent Development*, *162*, 115-136.

Quintana-Terés, M. (2014). *El aprendizaje autorregulado en estudiantes de educación superior* (Tesis doctoral). Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente, ITESO, México.

Rigo, M., Páez, D. A. y Gómez, B. (2010). Prácticas metacognitivas que el profesor de nivel básico promueve en sus clases ordinarias de matemáticas. Un marco interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3) 405-416.

Sáiz, M. y Román, J. (2011). Entrenamiento metacognitivo y estrategias de resolución de problmemas en niños de 5 a 7 años. *International Journal of Psychological Research, 4*(2), 9-19.

Sáiz, M. y Guijo, V. (2010). Competencias y estrategias metacognitivas en educación infantil: un camino hacia el desarrollo de procedimientos de resolución de problemas. *International Journal of Developmental and Educational Psychology, 2*(1), 497-504.

Sáiz, M. y Román, J. (2011). Entrenamiento metacognitivo y estrategias de resolución de problemas en niños de 5 a 7 años. *International Journal of Psychological Research, 4*(2), 9-19.

Santos, L. M. (2010). *La función cuadrática*. Trillas.

Schneider, W. y Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *42*(2), 149-161.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). McMillan.

Schoenfeld, A. H. (2012). How we think. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *7*(10), 135-149.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2011). *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas Escolares. Casos y Perspectivas*. SEP. http://edu.jalisco.gob.mx/cepse/sites/edu.jalisco.gob.mx.cepse/files/matematicas_web.pdf van de Pol, J., Volman, M. y Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. *Educational Psychology Review*, *22*(3), 271-296.

van de Pol, J., Volman, M., Oort, F. y Beishuizen, J. (2015). The effects of scaffolding in the classroom: Support contingency and student independent working time in relation to student achievement, task effort and appreciation of support. *Instructional Science*, *43*(5), 615-641.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society. The development in higher psychological processes.* Harvard University Press.

Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*(2), 89-100.

Zimmerman, B. (2008). Goal Setting: A key proactive source of academic self-regulation. En D. H. Schunk y B. J. Zimmerman (Eds.), *Motivation and Self-Regulated Learning: Theory, Research, and Application*s (pp. 267-295). Taylor & Francis.

Zimmerman, B. y Moylan, A. (2009). Self-regulation: Where metacognition and motivation intersect. En D. J. Hacker, J. Dunlosky y A. C. Graesser (Eds.), *Handbook of Metacognition in Education* (pp. 299-315). Routledge.

Milagros de Jesús Cázares Balderas

Domicilio: Av. Universidad #940, Ciudad Universitaria. Aguascalientes, Aguascalientes. CP 20130.

Teléfono: (044) 812 602 90 94

 DOI: 10.24844/EM3201.11

François Pluvinage en la memoria

Luis Moreno Armella[1]

En agosto de 1978 en Santiago de Compostela se conocieron el profesor François Pluvinage y el profesor Eugenio Filloy. Ese encuentro marcó el inicio de una relación que François iba a sostener con nuestro Departamento de Matemática Educativa de manera permanente. Desde entonces, esa amistad no hizo nada distinto a crecer y profundizar las raíces de un árbol que ha dado muchos frutos. François fue siempre una suerte para nuestros estudiantes a lo largo de todo ese tiempo y, sin duda, para nosotros todos. No solamente por su profundidad académica sino por su bonhomía, su trato amable y su voz de trueno que llenaba los espacios en los que se encontraba. Desde un primer momento fue tangible que su presencia iba a garantizar un diálogo permanente con él y su cultura.

Por allá en 1986 estuvo en el departamento durante todo un año sabático; eran entonces los primeros años del doctorado en nuestro departamento y su trabajo ayudó no solo a señalar la ruta sino a hacerla transitable. Nos enseñó métodos de análisis de datos novedosos que contribuyeron a consolidar investigaciones doctorales, pero a mi juicio, lo más importante fue su ejemplo de tenacidad a fuego lento y la ausencia de prejuicios para escuchar a todos. Eso

[1] Departamento de Matemática Educativa, México, lmorenoa@cinvestav.mx

se llama *madurez* a secas. Una cuenta rápida de su paso entre nosotros indica que ha sido profesor titular del departamento, que nos representó académicamente en más de 25 eventos, tanto nacionales como internacionales, representándonos con una dedicación, con una convicción que nunca sorprendió a ninguno de quienes lo conocimos largamente. A nombre del departamento estuvo en Canadá, en Suiza, en Colombia, en Chile recientemente, hasta en Francia, eso sí, ejerciendo de embajador nuestro y no al contrario. Desde luego, describir la tierra fértil que ha dejado tras sus pasos sería casi interminable. A los colegas de aquí, su casa, y también a egresadas y egresados nuestros les facilitó, primeramente, su brújula y más adelante, ciudadano de su tiempo, su GPS para trazar un mapa en el complejo mundo de la investigación. Tejió relaciones académicas permanentes; hoy esos colegas se han acercado para dejar un testimonio de cuan decisivo ha sido en sus trayectorias haberle encontrado siempre con los brazos abiertos, dispuesto a escuchar, a argumentar, a conciliar y contradecir pero siempre desde el respeto hacia quien estaba frente a él.

¿Dónde no dejó una huella? ¿Dónde no estuvo? México ha sido su casa. Su presencia será permanente en muchos centros educativos pues concibió su permanencia en nuestra institución como su puerto, no como su encierro. François no fue un viajero, fue sobre todo un sembrador. Cuando aún hoy paso frente a la que fue durante mucho tiempo su oficina, siempre con la puerta entornada, lo recuerdo trabajando sobre su máquina y aquello me lleva a unas palabras del escultor Auguste Rodin: "Sólo se encuentra la belleza trabajando". Para él, tendremos siempre buenas palabras, para agradecerle su trabajo de tantos años, agradecerle la huella que día a día dejó profunda en nuestro surco, que desde hace tanto tiempo hizo suyo. Es difícil condensar en pocas líneas su tiempo entre nosotros, más difícil aún dispuestos como estamos, a afirmar entre nosotros con las razones de Pascal, su presencia de siempre. Adiós al maestro, al pensador, al amigo.

Luis Moreno Armella

Domicilio postal: Av. Instituto Politécnico Nacional 2508
Col. San Pedro Zacatenco,
Alcaldía Gustavo A. Madero, C.P. 07360
Teléfonos: (52)+(55)-57-47-38-15

IN MEMORIAN DOI: 10.24844/EM3201.12

Eugenio Filloy Yagüe: un breve recuento de vida y obra[1]

29 de noviembre de 1942 - 23 de marzo de 2020

Armando Solares[2]
Luis Puig[3]
Teresa Rojano[4]

En 1939, Soledad Yagüe Herranz de Filloy y Enrique Filloy Méndez, el matrimonio Filloy Yagüe, cruzan el Atlántico como consecuencia de la derrota de la República Española a manos de los sublevados encabezados por el general Francisco Franco. Instalados en San Pedro de Macorís, República Dominicana, nace en 1942 el tercero de sus hijos, Eugenio. En agosto de 1945, la familia de Eugenio llega a México en el buque *Emancipación*. Aquí encontrarán su tierra.

Eugenio estudia en el Instituto Luis Vives y, posteriormente, se forma como matemático en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, donde se licencia en 1965 con el trabajo "Representaciones de grupos finitos". Inmediatamente, ingresa a trabajar como profesor adjunto de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional y, en paralelo, estudia la maestría en el Departamento de

[1] Esta semblanza está basada en anteriores homenajes al trabajo y vida de Eugenio Filloy, los cuales fueron presentados por Luis Puig y Teresa Rojano tanto en el Cinvestav como en la Universidad Pedagógica Nacional, en México.

[2] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, asolares@cinvestav.mx, México

[3] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, trojano@cinvestav.mx, México

[4] Departamento de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València Estudi, Generalluis.puig@uv.es, España

Matemáticas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV), graduándose en 1966. A raíz de la matanza del 2 de octubre de 1968, Eugenio cruza la frontera mexicana y se traslada a la Universidad de Chicago en el año 1969. Con rapidez y calidad ambas sobresalientes, en 1970 obtiene el doctorado en matemáticas con la tesis "Pointwise characterization of ideals of differentiable functions", bajo la dirección de Raghavan Narasimhan, que se publicaría como artículo en *Invention Maths* de Springer (Filloy , 1971).

En enero de 1971, Eugenio Filloy regresa a México con una vigorosa trayectoria como matemático y se integra como Investigador Adjunto al Departamento de Matemáticas del CINVESTAV. En su retorno, se introduce al trabajo en el campo educativo por medio de un proyecto que tendrá un enorme impacto en el sistema educativo mexicano y, también, en el desarrollo del mismo, Eugenio, como científico e impulsor de proyectos participa en la coautoría de los libros de texto de matemáticas de nivel primaria, junto con Carlos Imaz, Samuel Feder, Samuel Gitler, Luis Gorostiza y Juan José Rivaud, publicados en ediciones sucesivas, entre 1972 y 1978, por la Secretaría de Educación Pública. De hecho, este proyecto fue el germen de la creación, en 1975, de la entonces Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV, a la cual Eugenio se incorporó ya como Investigador Titular.

En el primer frente de la constitución del área de la Matemática Educativa en México, Eugenio orienta su desarrollo de manera que las "Matemáticas" son el substantivo en la investigación. En 1981, la Sección de Matemática Educativa abre el programa de doctorado y, por iniciativa de Eugenio, la sección se reestructura en áreas que permiten atender tanto a las problemáticas de los distintos niveles escolares (básico, medio superior y superior) como a los dominios específicos de investigación, como la cognición matemática y el desarrollo de materiales didácticos utilizando tecnologías.

En 1983, Eugenio pone en marcha uno de los programas más ambiciosos de formación de maestros que han existido: el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (PNFAPM), que hasta ya entrados los años 2000 incorpora a docentes de matemáticas a programas de especialidad y maestría impartidos en veinte universidades estatales y diez tecnológicos regionales. Para acompañar el desarrollo de este programa, Filloy diseña la realización de simposios internacionales y convenios de investigación con el King's College y el Instituto de Educación de la Universidad de Londres del Reino Unido, y con las Universidades de Valencia y de La Laguna en España, en el marco de los cuales se realizan tesis doctorales y de maestría, así como proyectos de investigación conjuntos. Puede decirse que una de las consecuencias del PNFAPM es la consolidación de la Sección del Departamento de Matemática Educativa, en 1992.

Con todo este trabajo, Eugenio Filloy está en la posición de generar una perspectiva teórica original para la Matemática Educativa, con componentes propios de su visión de hacer ciencia: el uso del análisis histórico de las ideas matemáticas, las entrevistas clínicas con enseñanza, la observación en un sistema de enseñanza controlada, el carácter local y de modelo de lo que usamos para el análisis de lo observado, la consideración de las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como situaciones de comunicación y producción de sentido, y, por tanto, susceptibles de ser abordadas desde una perspectiva semiótica.

Respecto al uso de la historia, Eugenio propone realizar una lectura de textos históricos de las matemáticas tomándolos como cogniciones petrificadas, de forma que puedan servir para proponer hipótesis sobre las cogniciones de los alumnos cuando están siendo enseñados, y, a su vez, leer las producciones de los alumnos de forma que proporcionen hipótesis con las que leer los textos históricos. Las dificultades y fenómenos que encuentran en torno a la operación con la incógnita (Rojano, 1985), en el momento en que los estudiantes son introducidos al pensamiento algebraico, son el ejemplo paradigmático de esta ida y vuelta entre los textos históricos y los textos producidos en un modelo de enseñanza.

Por otra parte, Filloy plantea realizar entrevistas con intervención de enseñanza como un instrumento metodológico adecuado para estudiar los fenómenos que se producen cuando se enseñan matemáticas en los sistemas escolares. Para ello, es necesaria la creación de sistemas de enseñanza controlada que hagan posible tener una descripción de los alumnos que van a ser entrevistados, desde el punto de vista de lo que se quiere investigar. Es así que Eugenio construye el Centro Escolar Hermanos Revueltas, una propuesta escolar alternativa y estrechamente vinculada a la investigación educativa que estuvo en funcionamiento hasta hace unos pocos años.

Eugenio Filloy introduce la idea de *Modelos Teóricos Locales* para hacer explícitos el conjunto de supuestos que permiten organizar y analizar las observaciones sobre los fenómenos investigados. Desde la perspectiva de Filloy, estos supuestos se hacen explícitos sin pretender que sean la única manera de organizar y analizar los fenómenos –es decir, sin afirmar que constituyan una teoría y, por tanto, tener que rechazar otros supuestos. Estos modelos son, además, “locales” en el sentido de que permiten dar cuenta precisamente de lo observado en cada ocasión específica y concreta. Eugenio sintetiza esta perspectiva teórica en el libro *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach* (Filloy, Rojano y Puig, 2008).

Desde esta perspectiva teórica, Filloy propone y deja planteados numerosos temas y problemáticas de investigación que aún están en desarrollo, como los fenómenos de producción de *sentido* y *significado* de los textos matemáticos, los algebraicos, en concreto, (Filloy, Rojano y Solares, 2010) y la noción de *intertextualidad* (Rojano, Filloy y Puig, 2014).

A lo largo de su trayectoria de trabajo, Eugenio Filloy, apoya e impulsa la creación y consolidación de muchas de las más importantes organizaciones y espacios de difusión internacionales dedicadas a la investigación en nuestra área, como la CIEAEM, el PME, y el ICME.

Su trayectoria académica queda registrada en 456 publicaciones nacionales e internacionales que a la fecha suman cerca de mil citas. Formó a cerca de 100 investigadores, a través de programas de maestría y doctorado. Investigador Emérito del CINVESTAV, miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel III.

Científico, erudito, visionario, amigo. Su obra nos acompaña y queda en nuestras memorias.

REFERENCIAS

Filloy, E. (1971). Pointwise characterization of ideals of differentiable functions. *Inventiones mathematicae, 13*, 143–168. https://doi.org/10.1007/BF01390098

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Springer.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2010). Problems Dealing With Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 55–80. www.jstor.org/stable/40539364

Rojano, T. (1985). *De la artitmética al álgebra: un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad*. (Tesis doctoral), Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México.

Rojano, T., Filloy, E. y Puig, L. (2014). Intertextuality and sense production in the learning of algebraic methods. *Educational Studies in Mathematics*, *87*, 389–407. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9561-3

Armando Solares Rojas

Dirección: Departamento de Matemática Educativa-Cinvestav IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco 07360
México, Ciudad de México.

Teléfonos: (52)+(55)-57-47-38-15

www.revista-educacion-matematica.com