Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Educación Matemática

México • vol. 32 • núm. 2 • agosto de 2020

Educación Matemática *vol. 32 • núm. 2 • agosto de 2020*

Producción
Formas e Imágenes, S.A. de C.V. Diseño y corrección, formaseimagenes@gmail.com

La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (IRMICYT), del CONACYT, SCOPUS (Elsevier, Bibliographic Databases), ZdM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (MathEducDatabase), Latindex, Redalyc (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SciElo) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en la plataforma www.autores-educacion-matematica.com Mantenemos el contacto: revedumat@yahoo.com.mx

Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

Educación Matemática *vol. 32 • núm. 2 • agosto de 2020*

© Educación Matemática, agosto de 2020, vol. 32, núm. 2, es una publicación cuatrimestral editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Guty Cárdenas 121-B, Col. Guadalupe Inn, 01020, Álvaro Obregón, Ciudad de México, correo electrónico revedumat@yahoo.com.mx.

Editora responsable: Avenilde Romo Vázquez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 30 de julio de 2020.

www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

 DOI: 10.24844/EM3202.00

Ayudar y documentar durante esta pandemia de COVID-19

Estamos viviendo tiempos extraordinarios, no solo para la salud, sino también para la investigación y la práctica de la educación matemática.

Nunca antes se había registrado un éxodo global de profesores y estudiantes de matemáticas, de todos los niveles educativos, hacia escenarios de instrucción basados en el uso intensivo de Internet. Quizá ahora como nunca se requiere de un involucramiento profundo de los padres en la instrucción matemática de sus hijos, debido a la prevalencia de la educación en casa. El escenario pandémico que estamos viviendo ha hecho evidente la importancia de contar con una ciudadanía matemáticamente alfabetizada, capaz de interpretar la información oficial acerca de la emergencia sanitaria.

Nunca en la historia de la investigación en educación matemática se había dado un aplazamiento en cadena de la mayoría de los congresos internacionales y regionales de nuestra disciplina. Los tiempos de revisión y de procesamiento de artículos de la mayoría de las revistas de investigación se han visto afectados, en gran medida, porque las circunstancias y la capacidad de trabajo de los académicos que revisan y editan los manuscritos ha sido afectada por la pandemia. Muchos proyectos de investigación han sido interrumpidos o rediseñados, dada la repentina interrupción en el acceso a los datos y a los escenarios de experimentación empírica originalmente planificados.

Considero que es parte de nuestra responsabilidad documentar las perturbaciones que esta pandemia de COVID-19 está causando en las diferentes esferas de la educación matemática, además de apoyar a las personas afectadas por tales perturbaciones.

Parte de esta responsabilidad es con la historia. Imaginemos por un momento a las comunidades futuras de educadoras y educadores matemáticos dentro de, digamos, quince o veinte años. Pensemos que recurren a los anales de la educación matemática tratando de entender cómo en el pasado la pandemia de COVID-19 afectó a la instrucción matemática en Iberoamérica. Supongamos ahora que después de su búsqueda no encuentran nada. Ni un estudio, ni un reporte, ni un testimonio. Como si nada hubiera sucedido. Pienso que sería una gran omisión por parte nuestra como educadores matemáticos.

Sin embargo, la responsabilidad mayor es con la sociedad en general. Hoy profesores, estudiantes, padres de familia y administrativos requieren de consejo y respuestas por parte de los especialistas en la educación matemática: ¿cómo enseñar matemáticas y mantener motivados a los estudiantes a través de videoconferencia?, ¿qué prácticas y condiciones podrían favorecer el aprendizaje de las matemáticas en un escenario de instrucción a distancia como el que vivimos?, ¿cómo atender en este momento la educación matemática de poblaciones alejadas o marginadas con acceso limitado o nulo a las tecnologías digitales?, ¿cómo fortalecer y promover el conocimiento matemático para el involucramiento de los padres en la educación matemática de los niños desde casa?, ¿qué competencias matemáticas se pueden promover entre la ciudadanía para prepararla a interpretar información en escenarios de emergencia sanitaria?

Debemos contribuir a responder este tipo de preguntas sintetizando investigación y resultados ya existentes, y que abordan problemáticas relacionadas con temas como: la educación matemática en línea, el involucramiento de los padres en el desarrollo matemático de los hijos, la alfabetización matemática, los procesos de integración de tecnología en la práctica docente, entre otros. Se podría también contribuir estudiando las nuevas prácticas y problemáticas de la instrucción matemática, y dando voz a los distintos actores involucrados en ellas. Incluso sería posible apoyar organizando y promoviendo oportunidades de desarrollo especializado para estudiantes, padres de familia y docentes. Hay mucho por hacer, estudiar y documentar.

Los invito a no perder la oportunidad que esta crisis nos da para contribuir y ayudar a otros desde nuestra posición como educadoras y educadores matemáticos. Pero también, les invito a documentar sus esfuerzos y sus estudios, para posteriormente publicarlos y divulgarlos. Como lector estaría entusiasmado de presenciar un creciente flujo de publicaciones y estudios de buena calidad provenientes de Iberoamérica, que aborden aspectos de la relación entre la educación matemática y la pandemia de COVID-19. Como editor asociado me complacería que varios de esos estudios estuvieran publicados en la revista *Educación Matemática*.

Mario Sánchez Aguilar
Editor Asociado

 DOI: 10.24844/EM3202.01

El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Pedagogical Content Knowledge: Theoretical and methodological bases for its characterization as an element of a mathematics teacher's specialised knowledge

Dinazar Isabel Escudero-Ávila[1]
José Carrillo Yáñez[2]

Resumen: El creciente interés por abordar investigaciones respecto del conocimiento específico, que tiene y utiliza el profesor de matemáticas, y de los elementos que lo conforman, se ha traducido en un incremento en la oferta de modelos analíticos que pretenden organizar, definir y analizar estos conocimientos para interpretarlos, caracterizarlos y hasta reproducirlos. Uno de los elementos que aparecen de manera reiterada y que se considera esencial en este tipo de modelos es el Conocimiento Didáctico del Contenido. Sin embargo, la caracterización de este tipo de conocimiento depende, en gran medida, de los fundamentos sobre los que se construye el modelo, los cuales suelen quedar a la sombra del modelo mismo y de las definiciones de sus componentes. En este sentido, nos proponemos explicitar las bases teóricas y metodológicas bajo las cuales se construye una caracterización del Conocimiento Didáctico del Contenido, a la luz del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Fecha de recepción: 13 de junio de 2019. **Fecha de aceptación:** 31 de marzo de 2020.

[1] Sin adscripción actual, Puebla, México, eadinazar@hotmail.com, orcid.org/0000-0001-6380-9016

[2] Facultad de Educación, Psicología y Ciencias del Deporte, Universidad de Huelva. Huelva, España, carrillo@uhu.es, orcid.org/0000-0001-7906-416X

Palabras clave: *Conocimiento Didáctico del Contenido, conocimiento especializado, profesor de matemáticas*.

Abstract: The growing interest in addressing research regarding the specific knowledge that the mathematics teacher has and uses and the elements that make it up have resulted in an increase of the creation of analytical models which aim to organize, define, and analyze this knowledge to interpret, characterize and even reproduce them. One of the elements that appear repeatedly and that is considered essential by these models is the teacher's Pedagogical Content Knowledge. However, the characterization of this knowledge depends largely on the foundations on which the knowledge model is built, which usually lie in the shadow of the model itself and of the definitions of its components. In this sense, our objective is to make explicit the theoretical and methodological bases under which a characterization of the Pedagogical Content Knowledge is built in light of the mathematics teacher's specialized knowledge model.

Keywords: *Pedagogical Content Knowledge, Specialised Knowledge, Mathematics teacher.*

1. INTRODUCCIÓN

El interés por encontrar formas efectivas de estudiar el conocimiento profesional del profesor y comprender los procesos de adquisición, uso y desarrollo de este, lleva a los investigadores a realizar distintas propuestas que permitan indagar sobre la labor del profesor, vista esta como la práctica de un profesional que requiere de conocimientos específicos.

Existen distintos parámetros utilizados para diferenciar las componentes del conocimiento profesional, definidas en función de *cómo se genera*, *sobre qué versa* o *para qué sirve* dicho conocimiento. Shulman (1986), por ejemplo, propone una separación del conocimiento del profesor en tres componentes: el *Subject Matter Knowledge*, que incluye el conocimiento que requiere el profesor del qué y el porqué de los contenidos referentes a la disciplina que enseña, el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), que alude a los aspectos de conocimiento referentes a la enseñanza y aprendizaje del contenido que se imparte, y el *Curricular Knowledge*, que se refleja en los programas, materiales, planeaciones que tienen los profesores. Shulman (1987) destaca el PCK como un elemento de especial interés "*because it [.] is the category most likely to distinguish the understanding of the content specialist from that of the pedagogue*" (p. 8).

Con esta propuesta, Shulman provoca un especial interés por profundizar en la comprensión de elementos que conformen el conocimiento profesional de un profesor, de manera que se tenga una mejor conceptualización del constructo y de sus características como un conocimiento propio de la labor de enseñanza (e.g. Carpenter, Fennema, Peterson y Carey, 1988; McDiarmind, Ball y Anderson, 1989). Además, surge la necesidad de buscar características específicas de este conocimiento asociadas al contenido a enseñar, lo que ha llevado a la construcción de modelos de conocimiento que pretenden organizar, definir y analizar los elementos que lo conforman.

Con respecto al conocimiento profesional del profesor de matemáticas, existen distintas propuestas de modelación de dicho conocimiento (e.g. *Knowledge Quartet*, Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep 2009; *Mathematical Knowledge for Teaching*, Ball, Thames y Phelps, 2008; *Proficiency in Teahing Mathematics*, Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; *Profound understanding of fundamental mathematics*, Ma, 1999). Esta variedad de modelos pone de manifiesto la complejidad de interpretación y comprensión de la naturaleza de dicho conocimiento, así como la necesidad de establecer mecanismos para operativizar e identificar elementos clave que permitan su análisis.

Dentro de todas estas propuestas y caracterizaciones, a más de 30 años de distancia, el PCK sigue teniendo un papel relevante como uno de los elementos esenciales para la descripción y análisis del conocimiento profesional. A pesar de que las categorías propuestas inicialmente por Shulman han sido reinterpretadas, estas continúan siendo vigentes y siguen siendo consideradas un avance importante en las concepciones sobre el conocimiento del profesor (Vázquez-Bernal, Jiménez-Pérez y Mellado, 2019; Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans, 2013).

Sin embargo, la caracterización de este conocimiento depende, en gran medida, de los fundamentos sobre los que se construye el modelo, que suelen quedar ocultos bajo la sombra del modelo mismo y las definiciones de sus componentes.

En este sentido, consideramos importante reflexionar sobre los cambios y/o adaptaciones que sufre el PCK al considerarse parte de un modelo de conocimiento que tiene una filosofía, identidad e intencionalidad propia. Esto proporcionará al lector la posibilidad de adentrarse en este proceso de construcción de un modelo y de la caracterización y adaptación del PCK.

La relevancia de esta propuesta radica en someter a discusión de la comunidad las bases teóricas y metodológicas bajo las cuales se construye esta caracterización, a la luz del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas *(Mathematics Teacher's Specialised Knowledge –MTSK–*, Carrillo-Yañez, *et al., 2018*). Consideramos que esta podrá enriquecer la reflexión sobre la utilidad y vigencia del PCK como piedra angular del conocimiento profesional del profesor, así como la discusión sobre la utilidad del MTSK y otros modelos como herramienta de análisis del conocimiento del profesor de matemáticas.

Es importante señalar que, aunque se han presentado otros análisis parciales de algunos de los datos recopilados en esta investigación, estos han estado enfocados a reflexionar sobre el tipo de conocimientos especializados que manifiesta el informante a lo largo del curso (e.g. Escudero-Ávila, *et al.*, 2015) y a resaltar las relaciones existentes entre distintos subdominios de conocimiento (e.g. Carrillo-Yañez, *et al.*, 2018). Sin embargo, en este trabajo nos enfocamos en la descripción del proceso de construcción, justificación y refinamiento de categorías realizado a partir del análisis de este caso. El interés en el contenido matemático concreto queda en un segundo plano, tratándose de un instrumento de trabajo que nos permita ilustrar los subdominios, validar la construcción del modelo y refinar categorías.

2. BASES METODOLÓGICAS

Para definir y caracterizar los elementos del conocimiento didáctico se realizó un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 1995), puesto que la información que nos proporciona el informante sirve para realizar un proceso de abstracción que permita aportar información adicional sobre el funcionamiento y la caracterización del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. En este sentido, hemos decidido adoptar un enfoque cualitativo de análisis y posicionarnos en un paradigma interpretativo (Bassey, 2003).

El caso a estudiar se define como el conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria que participa en un programa de formación continua a distancia (*online*). Omar, nuestro informante, es un profesor colombiano de matemáticas de secundaria y bachillerato con más de 25 años de experiencia, que participaba activamente en el curso virtual *Teoría de Situaciones Didácticas* desarrollado en el seno de un programa de Posgrado en Matemática Educativa (maestría profesionalizante con sede en México).

A lo largo de cinco semanas, Omar realizó aportaciones y reflexiones sobre su trabajo y el de sus compañeros en foros, ensayos y actividades compartidas a través de la plataforma Moodle y por correo electrónico. Uno de los tutores del curso y autor de esta investigación, dio seguimiento y retroalimentación constante al profesor sobre las tareas que se le pedían en concordancia con los objetivos del curso. Una vez terminado el curso, se reconoce la relevancia de la información generada y el potencial para analizar, de estos datos, el conocimiento especializado del profesor en distintos contextos, por la riqueza en cuanto a la justificación matemática y didáctica que Omar vertía en sus participaciones. Se descargaron en formato pdf, y se organizaron y analizaron cinco actividades realizadas, una por semana, en las que se produjeron un total de siete documentos de texto con siete tareas individuales de Omar (A#_ D#) y tres foros de discusión (A#_ F#_P#) en los cuales el profesor interactuaba con otros compañeros de curso y que se separaron en siete conversaciones diferentes. Estos se organizaron y codificaron por actividad y documento como se muestra en la Figura 1.

Actividad	Documentos		Codificaciones
1	Resolución del problema de las cuerdas		A1_D1
	Guía pedagógica del problema de las cuerdas		A1_D2
	Foro 1: Analizando el problema de las cuerdas	Pregunta 1: ¿Cuál es la naturaleza del problema de las cuerdas?, ¿un ejercicio rutinario, tradicional, abierto?	A1_F1_P1
		Pregunta 2: ¿Qué técnicas visualizaste para resolver el problema de las cuerdas?	A1_F1_P2
		Pregunta 3: ¿Consideras que el problema de las cuerdas constituye un buen recurso didáctico? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?	A1_F1_P3
2	Recurso didáctico individual		A2_D1
	Respuesta a la retroalimentación		A2_D2
3	Reporte de lectura sobre herramientas teóricas		A3_D1
	Foro 2: Herramientas teóricas	Utilidad	A3_F2_P1
		Utilizabilidad	A3_F2_P2
		¿Y los potenciales?	A3_F2_P3
4	Análisis individual del recurso usando las herramientas teóricas		A4_D1
5	Reporte de evaluación externa del recurso		A5_D1
	Foro 3: Discusión de evaluación externa		A5_F3

Figura 1. Organización y codificación de actividades realizadas por Omar (Escudero, 2015, p. 88).[3]

[3] Una explicación detallada de cada una de las actividades puede consultarse en Escudero (2015).

Dado que las actividades se proponían de acuerdo a la temática del curso, el contenido matemático sobre el que se discute cambia a lo largo de las semanas, aunque se dedica especial atención al desarrollo de una secuencia didáctica que Omar propone centrar en el desarrollo de conocimientos sobre las funciones lineales y cuadráticas. Son estas participaciones y actividades las que utilizaremos en este estudio para ilustrar la caracterización del PCK (Actividades 2, 4 y 5).

Los textos utilizados, para ejemplificar y justificar la caracterización de los subdominios y categorías del PCK en este artículo, han sido modificados con respecto a las participaciones literales de Omar dentro de este curso virtual. Esto con la intención de proporcionar al lector la mayor cantidad de evidencias sobre el conocimiento de Omar y resumir la información que se recolecta a lo largo de cinco semanas de trabajo. Se ha puesto especial atención en crear textos con sentido narrativo que mantengan la literalidad y esencia del discurso en relación con el objeto de estudio. Pueden consultarse los datos completos y codificados en Escudero (2015).

Al respecto del diseño metodológico, inicialmente se utilizó el método *top-down*: de la teoría a los datos (Niss, 2006), generando una caracterización teórica y muy general del PCK, para lo cual se revisaron y sistematizaron distintas aproximaciones y definiciones de este tipo de conocimiento en la literatura especializada, partiendo de las aportaciones y críticas sobre el modelo de Shulman (e.g. Vázquez-Bernal, *et al.*, 2019; Depaepe, *et al.*, 2013; Flores-Medrano, *et al.*, 2016; entre otros). Apoyados en esta reflexión y en los principios teóricos bajo los cuales se concibe la construcción del MTSK, decidimos imprimir especial énfasis en el reconocimiento de las diferencias entre la naturaleza de este dominio y la del dominio del conocimiento matemático, tomando en cuenta las distinciones en cuanto a los criterios de validez, los procesos de construcción de conocimiento asociados a estos, así como su expresión o manifestación, lo que implica diferentes vías para acceder a ellos. En la siguiente sección entraremos más en detalle en este proceso de construcción.

Posteriormente, recurrimos a una aproximación *bottom-up*: de los datos a la teoría (Niss, 2006), en la cual se complementa y reinterpreta la definición de los subdominios y sus componentes a la luz del análisis de las producciones de Omar. Además, en este proceso se complementa esa primera caracterización teórica para refinar el modelo con la aportación de categorías específicas de conocimiento (Figura 2), que nos permitan tener una visión más particular de las formas de conocer el contenido que un profesor de matemáticas puede tener y las cuales, en conjunto, le permitirán actuar como un especialista de la educación matemática.

Como explicamos, la metodología *top-down* y *bottom-up* utilizada en esta investigación demandaba la generación de categorías de análisis de los datos y su comparación constante. La cantidad de información generada durante el curso y el número de categorías que se utilizaron para el tipo de análisis propuesto requirió del uso del software MAXQDA, como un instrumento que permitía hacer asignaciones de categorías de forma simple y ordenada, haciendo referencia a cualquier tipo de unidad de información (episodios, fragmentos de episodio, frases o palabras una asignación), triangulando distintos momentos del curso y así obtener un análisis lo más completo posible.

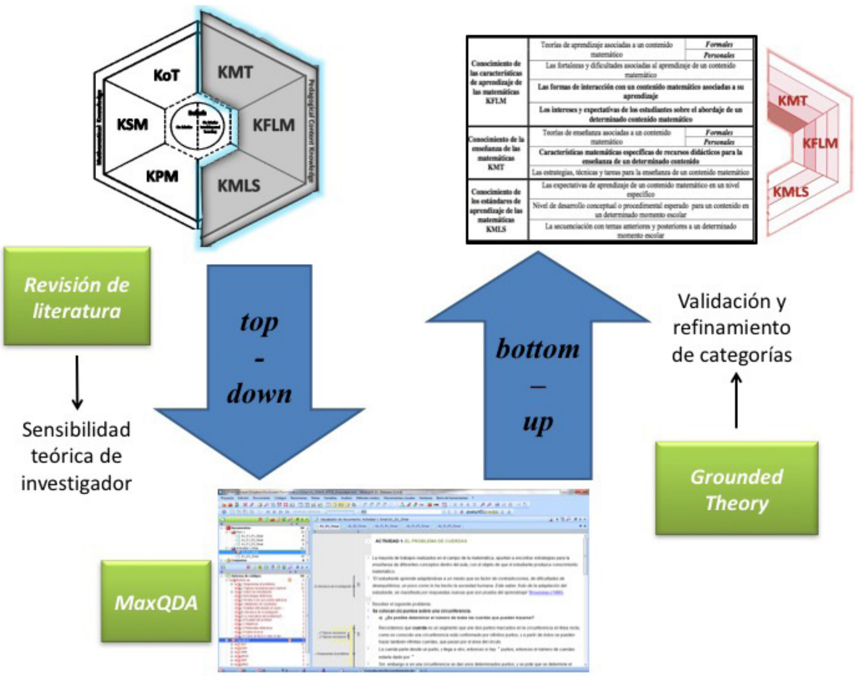


Figura 2. Diseño metodológico utilizado para la caracterización del CDC como parte del MTSK.

3. BASES TEÓRICAS

3.1. El modelo conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Describimos a continuación, de forma sucinta, elementos característicos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge –MTSK–, Carrillo-Yañez, *et al.*, 2018) con el propósito de contextualizar el proceso de construcción de la caracterización del PCK que se aborda en este estudio, así como explicitar concepciones al respecto del conocimiento profesional del profesor subyacentes en el modelo.

El MTSK es una herramienta teórico-analítica que clasifica aquellos elementos del conocimiento del profesor donde la matemática, como objeto de enseñanza y aprendizaje, es determinante, excluyendo el conocimiento pedagógico general, aunque, naturalmente, reconoce su relevancia (Carrillo-Yañez, *et al.*, 2018).

El conocimiento es entendido en este modelo como una amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos (Pajares, 1992), disponibles para "usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!" (Schoenfeld, 2010, p. 25). La diferencia entre conocimiento correcto o incorrecto es irrelevante si la intención del investigador es saber qué y cómo conoce el profesor, ya que esa es la información que el profesor posee, coincida esta con el referente de verdad del investigador o no. Este posicionamiento responde a la necesidad de crear un modelo de conocimiento que no sea prescriptivo sino descriptivo, con la intención de interpretar el conocimiento desde un punto de vista integral, tomando en cuenta la naturaleza del Conocimiento Matemático (CM) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) y las diferencias que existen en cuanto a los criterios de validez.

La idea de especialización inspirada en la propuesta que hacen Ball y colaboradores (2008) para el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), se entiende en el MTSK como la integración de los tres grandes dominios vinculados a la enseñanza de las matemáticas (Figura 3): los conocimientos matemáticos (CM), los conocimientos didácticos del contenido matemático (CDC)[4] y las

[4] Hemos llamado anteriormente PCK al Conocimiento Didáctico del Contenido que propone Shulman (1986). Ahora usaremos las siglas CDC para referirnos al Conocimiento Didáctico del Contenido matemático que se construirá como parte del MTSK.

creencias y concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su aprendizaje y enseñanza (Carrillo-Yañez, *et al.*, 2018). Mientras que en MKT la especialización se refiere a la exclusividad de uso de conocimiento matemático por parte del profesor frente a otros profesionales, en MTSK procede del uso conjunto de elementos de conocimiento en la enseñanza de las matemáticas, independientemente de que algunos de esos elementos se compartan o no con otros profesionales.

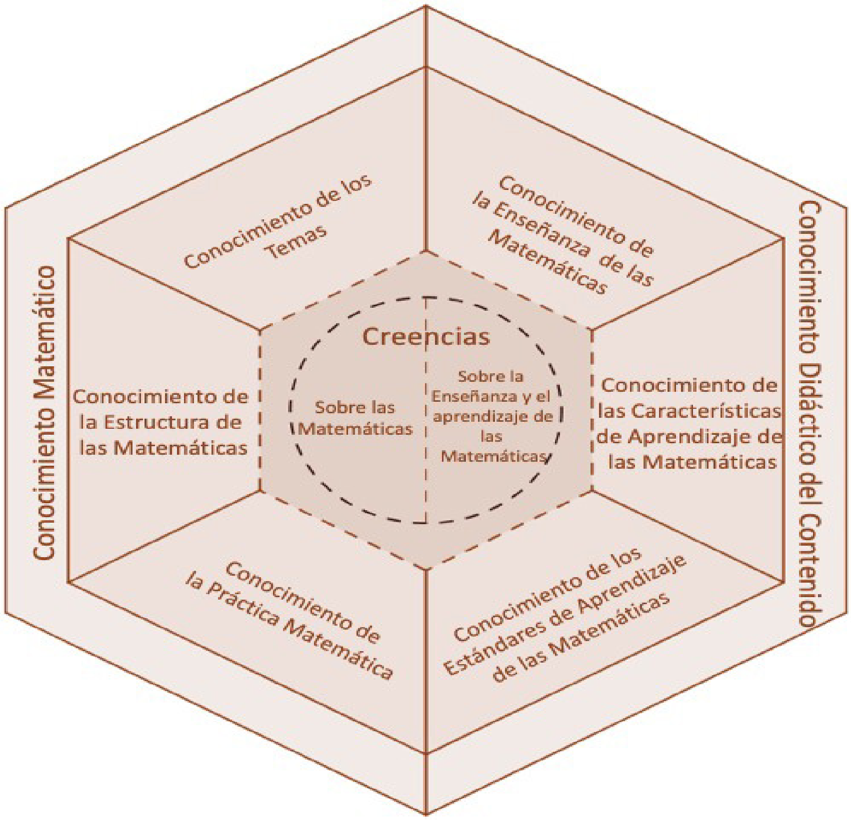


Figura 3. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas –MTSK.

Según Ma (1999) y Schoenfeld, *et al.* (2008), es evidente la necesidad de que el profesor conozca de manera amplia y profunda el contenido que enseñará. En este sentido el dominio de CM incluye el *Conocimiento de los Temas* que tiene el profesor sobre las propiedades, definiciones y significados del contenido matemático de manera fundamentada, los procedimientos (cómo se hace, cuándo puede hacerse, por qué se hace así), los distintos registros de representación asociados a dicho contenido, la fenomenología, y aspectos epistemológicos que permiten al profesor comprender diferentes significados atribuibles al contenido. El *Conocimiento de la Estructura de la Matemática* engloba conocimientos de conexiones inter-conceptuales y conocimientos avanzados y elementales (con respecto al contenido que se atiende). Por último, se incluye un subdominio de *Conocimiento de la Práctica Matemática*, referente al conocimiento sobre las formas de proceder propias de la matemática, así como, por ejemplo, sobre distintos tipos de razonamientos, incluyendo los contextos matemáticos en que unos son más adecuados que otros (Carrillo-Yañez, *et al.*, 2018).

Otra de las características distintivas de este modelo es la consideración de un dominio de creencias, dejando de manifiesto que estas permean el conocimiento matemático y didáctico del profesor. En este sentido, las creencias y las concepciones sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje en el MTSK serán entendidas como verdades personales, sostenidas individual y/o colectivamente, derivadas de la experiencia o el propio pensamiento, puesto que están basadas en componentes afectivas y evaluativas, sobre las que se pueden tener diferentes grados de convencimiento (Thompson, 1992). Estas pueden, además, estar justificadas con argumentos que no sigan criterios que puedan responder a cánones de evidencia, es decir, no son falsables.

3.2 Conocimiento didáctico del contenido como parte del mtsk

Mostraremos a continuación la fundamentación teórica con la cual se caracteriza el CDC dentro del MTSK, que sirvió para definir subdominios y construir categorías.

En la fase de trabajo *top-down* se reconoce la importancia que tiene el conocimiento didáctico matemático dentro del MTSK por contar con una entidad propia, con fuentes y referentes diferentes a las del conocimiento puramente matemático. Posee una estructura y naturaleza distintas, puesto que, como menciona Azcárate (1998), está dirigido a la enseñanza de las matemáticas, cuya fuente principal vive en la Didáctica de la Matemática como cuerpo de conocimiento integrador en sí mismo de diversas fuentes de conocimiento.

Parte del proceso de caracterización del CDC dentro del MTSK consistió en la sistematización y análisis de literatura especializada en el desarrollo, comprensión, caracterización y/o reflexión sobre le PCK definido por Shulman y reinterpretado por otros investigadores (e.g. Azcárate, 1998; Ball, *et al.,* 2008; Mitchell, Charalambous y Hill, 2014; Pinto y González, 2008). Consideramos de modo especial el trabajo de Depaepe y colaboradores (2013), cuyo objetivo fue proporcionar una revisión sistemática de la investigación educativa matemática empírica para responder a ¿cómo se conceptualiza y cómo se analiza el PCK en la investigación educativa matemática empírica?

En esta primera revisión se encontró que no existen diferencias claras entre las habilidades o capacidades del profesor y sus conocimientos (Muñoz-Catalán, 2010), por lo que, en el MTSK se caracteriza el PCK como un conjunto de conocimientos, destrezas y habilidades que los profesores necesitan y aplican en el acto de enseñar, ligados directamente con la práctica de aula como actividad principal y a un contenido específico (Depaepe, *et al.*, 2013). Esta definición está en concordancia con la definición de conocimiento, bajo la cual se desarrolla el MTSK y su naturaleza de conocimiento parcialmente tácito, situado, contextualizado, personal, social, dinámico, integrado, complejo y práctico (Climent, 2002; Muñoz-Catalán, 2010).

Como hemos señalado, aunque se han establecido pautas que ayudan a identificar algunas de las componentes de este conocimiento o posibles formas en las que puede desarrollarse, todavía existen discrepancias con respecto a su caracterización. Aun así, Depaepe y colaboradores (2013) identifican algunas componentes de estos conocimientos que surgen en diferentes modelos y aproximaciones teóricas:

> [...] *(1) knowledge of students' (mis)conceptions and difficulties, (2) knowledge of instructional strategies, (3) knowledge of mathematical tasks and cognitive demands, (4) knowledge of educational ends, (5) knowledge of curriculum and media, (6) context knowledge, (7) content knowledge, and (8) pedagogical knowledge* (p. 15).

Este primer acercamiento a la literatura, junto con la filosofía de base de MTSK que pone en el centro el contenido matemático y deja fuera elementos de conocimiento pedagógico general y de contexto, conduce a una caracterización del CDC organizada a través de tres tipos básicos de conocimiento: el conocimiento del contenido matemático como objeto de aprendizaje, el conocimiento del contenido matemático como objeto de enseñanza y el conocimiento de la organización o secuenciación del contenido matemático desde una visión general de los estándares y objetivos de aprendizaje. A continuación, definimos y ejemplificamos cada subdominio con sus respectivas categorías, poniendo especial énfasis en el proceso de creación y validación de estas.

3.2.1 Subdominio del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (Knowledge of Features of Learning Mathematics-KFLM)

Como hemos visto hasta ahora, distintos autores y modelos de conocimiento expresan la necesidad de identificar los conocimientos que permiten al profesor reconocer, analizar y comprender determinados procesos de aprendizaje de las matemáticas y entender su génesis, lo cual deriva en la capacidad de interpretar las producciones de los estudiantes y anticipar posibles razonamientos, conocer errores frecuentes, dificultades de aprendizaje recurrentes o las concepciones erróneas que podrían tener sus estudiantes.

El foco central del KFLM está en reconocer al contenido matemático como objeto de aprendizaje, por lo que decidimos centrar la atención en los conocimientos del profesor sobre las características de aprendizaje inherentes a un contenido matemático en particular o a la matemática en general. Sus elementos no están orientados hacia el conocimiento de los estudiantes como actores principales en el proceso de aprendizaje. Aunque reconocemos que este enfoque podría restar importancia al papel del estudiante en dicho proceso, resulta necesario focalizar nuestra atención en un aspecto específico del conocimiento profesional del profesor como lo son las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y las características del contenido matemático en sí mismo como objeto de aprendizaje. Esta relación estudiante-contenido pone el énfasis en el conocimiento que tiene el profesor del propio proceso de aprendizaje al observar y analizar las interacciones del estudiante con el contenido matemático (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes y Carrillo, 2015).

Con esta definición y basados en literatura de investigación (enfoque *top-down*), decidimos establecer una primera propuesta de categorías para este subdominio de conocimiento: Errores y dificultades asociados al aprendizaje de un contenido matemático, formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático, intereses y expectativas de los estudiantes y teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático.

Al respecto de la categoría de **errores y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático**, es innegable la necesidad de reflexión sobre las posibles dificultades, errores u obstáculos que pueden surgir en los procesos de aprendizaje de un determinado contenido.

En la fase de análisis correspondiente al proceso *bottom-up* Omar, pone de manifiesto el siguiente conocimiento:

> O: *La importancia del aprendizaje de la función radica en su papel como herramienta modeladora de fenómenos matemáticos, físicos, químicos, económicos, etcétera. Sin embargo, hay que considerar la complejidad que supone, en este proceso de aprendizaje, la variedad de representaciones que tiene el concepto en diferentes contextos y su forma algorítmica.*

Además, Mitchell y colaboradores (2014) presentan un estudio empírico del que concluyen que el conocimiento que requiere el profesor para usar distintas representaciones de un determinado contenido implicadas en diferentes tareas de enseñanza no pertenece únicamente al dominio didáctico, puesto que se requiere articular conocimientos que permitan reconocer las representaciones como recurso para la instrucción y las posibles formas en las que este será usado por los estudiantes, además de reconocer las características matemáticas específicas del recurso. En este sentido, conocer los diferentes tipos de representación de las funciones no implica directamente conocer las dificultades que existen en el aprendizaje de estas, ni conocer estrategias específicas de utilización de una determinada representación, con lo cual es importante hacer una distinción entre el conocimiento profesional del profesor que es puramente matemático (representación de las funciones) y el que es didáctico matemático (dificultades en el aprendizaje de las funciones).

Aunque Omar no lo mencione (incluso lo desconozca), existe literatura en la que se reporta este tipo de dificultades (e.g. Viseu y Menezes, 2014), lo que justifica su inclusión en esta categoría como una dificultad u obstáculo típico relacionado con el contenido mismo. Este conocimiento está ligado directamente al concepto de función, sin embargo, no es conocimiento matemático, sino conocimiento sobre características de este contenido como objeto de aprendizaje.

Por otra parte, el profesor reconoce la importancia que tiene el aprendizaje de este contenido ligándolo con su papel como herramienta de modelación matemática. Esto es importante porque no es el conocimiento de un error o una dificultad asociada a este contenido, sino que podría representar quizá hasta un área de oportunidad para desarrollar ciertos aprendizajes alrededor de este contenido, es decir, valerse de la idea de modelación para trabajar el contenido y potenciar su aprendizaje.

Omar, nos permite reconocer la importancia que tiene que el profesor tenga conocimientos tanto de dificultades como de fortalezas que pudieran estar asociadas a este contenido matemático, de manera que sus herramientas de trabajo profesional se vean enriquecidas, por lo que esta categoría se redefine como: **conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático**.

A pesar de que la fuente más común de este tipo de conocimiento es la propia experiencia profesional, existe ya una creciente cantidad de investigación cognitiva sobre el aprendizaje del estudiante, que ha producido resultados enfocados, tanto en procesos y algoritmos alternativos de trabajo matemático como en la identificación de concepciones, errores, obstáculos y dificultades de los estudiantes y de su pensamiento matemático.

En la categoría de ***formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático***, se engloban los conocimientos del profesor sobre los procesos y estrategias, tanto los típicos como los no habituales (Sosa, Aguayo y Huitrado, 2013), que podrían seguirse al enfrentar una determinada tarea matemática, así como conocimientos sobre el lenguaje y los procesos a través de los cuales los estudiantes interactúan con el contenido matemático (Flores-Medrano, *et al.* 2016).

En el caso de Omar, podemos validar esta categoría con evidencias de que el profesor tiene conocimiento de que los estudiantes realizarán ciertos procesos de trabajo matemático asociados a las diferentes representaciones de la función:

> O: *Al pasar del registro algebraico al gráfico espero que los estudiantes puedan establecer relaciones de variable dependiente con independiente, y que se observe cómo modelar el fenómeno a partir de este recurso gráfico. A través de la tabulación y utilizando métodos como el de solución de ecuaciones simultáneas o el método de diferencias pueden determinar los parámetros de las funciones partiendo de datos dados, con esto pueden proceder a graficar en papel o en hoja milimétrica.*

Estas evidencias nos permiten resaltar que Omar tiene un conocimiento de ciertas formas de interacción con el contenido matemático, pero además nos indica que estas formas deben estar ligadas al aprendizaje de este contenido, en este caso el aprendizaje de función. Omar posee conocimiento de que, al pasar de un registro a otro, los estudiantes establecen ciertas relaciones y pueden observar diferentes características de la función, así como asignarle distintos significados.

Esto nos permite reinterpretar el nombre de la categoría como**: formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje.**

En el KFLM se incorpora también la categoría de conocimiento del profesor sobre **intereses y expectativas de los estudiantes sobre el abordaje de un determinado contenido matemático**. En el caso del conocimiento puesto en evidencia por Omar, se hace evidente que el profesor sabe que la modelación de fenómenos físicos resulta atractiva y motivadora para los estudiantes, puesto que permite generar en ellos un interés en explicar el comportamiento del fenómeno y contextualizar el trabajo matemático que realiza:

> O: *Las actividades más llamativas para los estudiantes son aquellas que tienen relación con las ciencias naturales, como las relacionadas con caída libre, movimientos y, aquellas donde la medición interviene de una manera primaria. Si se toma a la modelación como herramienta matemática para la solución de problemas reales, es posible realizar simulaciones, aplicando el modelo matemático hallado a situaciones diferentes, favoreciendo que el estudiante las utilice en otras áreas del conocimiento.*

Por lo tanto, en esta categoría se valida la necesidad de tomar en consideración los conocimientos del profesor sobre estas expectativas e intereses, así como el conocimiento sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad asociadas comúnmente a las distintas áreas de la matemática.

La última categoría a incorporar en este subdominio se refiere al ***conocimiento sobre teorías de aprendizaje***, el cual se refiere a lo que sabe el profesor sobre literatura referente a la Educación Matemática como disciplina científica, específicamente resultados al respecto del aprendizaje de los contenidos matemáticos. Aunque la literatura especializada se menciona como fuente de conocimiento, no se incorpora, en ningún otro modelo que hayamos revisado, su consideración como categoría o subdominio de conocimiento. Sin embargo, esta distinción parece práctica y necesaria puesto que nos permite saber cómo usa el profesor dichos conocimientos e identificar posibles vías de desarrollo de los mismos.

Por otra parte, derivado del análisis de las participaciones en el curso virtual, identificamos que Omar hace referencia a constructos teóricos asociados al aprendizaje de las matemáticas ligados a una teoría específica:

> O: *Uno de los objetivos principales de la actividad es lograr la resignificación del concepto de función utilizando la práctica de modelación. Dentro de la secuencia trato de apoyarme en las diferentes formas en que se entiende la modelación, entre ellas el enfoque socioepistemológico, recordando que la resignificación es una práctica social.*

El análisis de estas participaciones indica que Omar parece transformar el significado de los constructos teóricos que explícitamente relaciona con la Teoría Socioepistemológica (TSE) (Cantoral, 2013), como la *resignificación*, que define como el proceso por el que se alcanza un aprendizaje significativo de los conceptos y que es uno de los términos centrales de este enfoque teórico. Omar muestra, además, conocimiento sobre la idea de *prácticas sociales* que, en el marco de la TSE, se refiere a actividades que organizan los procesos de aprendizaje a través de actividades comunes en determinados contextos. Sin embargo, parece relacionar la *práctica de modelación* con la modelización matemática de fenómenos en contextos reales y no con un proceso de construcción de conocimiento matemático. Esto nos da la oportunidad de identificar que Omar conoce una teoría formal sobre el aprendizaje de las matemáticas como lo es la TSE, pero que la transforma para adaptarla a una teoría personal de aprendizaje basada en una interpretación de estos constructos formales.

Por otra parte, Omar comenta:

> O: *Siempre he considerado que para un mejor aprendizaje del conocimiento del concepto de función cuadrática es necesario ver primero función lineal. Los ejercicios propuestos en la tarea tienen la intención de resignificar el concepto de función lineal, y por ende está dirigido a recoger todo lo conocido sobre funciones.*

Aunque pudiera parecer obvio, Omar enfatiza aquí que, *siempre ha considerado* más adecuado e importante trabajar el concepto de función lineal previo al de función cuadrática. Este es un conocimiento que pone en juego para el diseño de las tareas, pues considera que una vez que los estudiantes han podido trabajar con las funciones lineales y han reflexionado sobre sus características será más sencillo repetir el proceso para las cuadráticas observando sus diferencias.

Esto lo consideramos, también, como una teoría personal que Omar ha construido sobre el aprendizaje del concepto de función cuadrática, puesto que parece sustentarse en su experiencia personal.

A partir de este análisis *bottom-up*, esta categoría se define entonces como el conocimiento de **teorías formales y/o personales de aprendizaje asociadas a un contenido matemático,** englobando aquí lo que sabe el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático y de estructuras cognitivas del estudiante tanto para la matemática en general como para contenidos particulares.

3.2.2 Subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (Knowledge of Mathematics Teaching–KMT)

Shulman (1986) se refirió a las componentes del PCK como el conocimiento de las formas más efectivas de representación y formulación de un contenido, de manera que este pueda ser comprensible para otros, señalando que estas formas de representación potentes no son únicas, por lo que el profesor debe conocer distintas alternativas para utilizar a conveniencia.

En la fase *top-down* se identifica que las componentes que suelen asociarse con un conocimiento referente a cuestiones de enseñanza son los conocimientos del profesor sobre estrategias específicas de enseñanza, las formas más efectivas de representación de ideas y el conocimiento de distintas tareas y actividades relacionadas con la enseñanza de un determinado contenido matemático. Además, se hace alusión a distintas representaciones del contenido a enseñar, sus limitaciones, potencialidades y su origen, así como los elementos necesarios para su desarrollo, selección e implementación en el aula (Escudero, 2015; Depaepe, *et al.*, 2013).

Estas componentes han sido utilizadas y reinterpretadas por autores que se han centrado en ampliar la definición de las representaciones como recursos para la instrucción o *representaciones instruccionales* (Llinares, Sánchez y García, 1994), englobando el conocimiento del profesor de estas representaciones y las formas en las que las interpreta y utiliza en el aula, así como los vínculos que existen entre estos conocimientos y otros de este mismo dominio pedagógico (Pinto *et al.*, 2008).

Como mencionan Bosch y Gascón (2001), la decisión de elegir una representación, recurso, material, formas de instrucción o secuencia para trabajar un determinado contenido, demanda del profesor especial atención en el potencial que tienen para ser usados en la enseñanza, considerando si sus características son las ideales para abordar el contenido matemático.

Esta reflexión teórica deriva en una primera caracterización de este subdominio, que refleja el interés del MTSK en subrayar la integración de matemáticas y enseñanza desde el propio nombre del subdominio, por lo que se incluyen aquí aquellos conocimientos sobre las distintas posibilidades de enseñanza condicionadas por la naturaleza misma del contenido.

Con la intención de clarificar la caracterización de este conocimiento se proponen las siguientes categorías: Estrategias didácticas para la enseñanza de un contenido matemático, teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático y recursos de enseñanza asociados a un contenido matemático.

Es evidente que el profesor necesita tener conocimiento de distintas herramientas con las cuales abordar el contenido y sobre las características matemáticas que pueden tener ciertas estrategias didácticas, así como reconocer la influencia de estas sobre la enseñanza de un contenido matemático en un momento y contexto particular, ya sea positiva o negativamente. En este sentido se define la categoría de **estrategias didácticas para la enseñanza**.

Sin embargo, en el análisis del caso de Omar se presenta y comenta una actividad diseñada por el profesor con la cual se aborda el concepto de función lineal para trabajarlo con estudiantes de secundaria o bachillerato:

> O: *Se pretende analizar el llenado de un recipiente a velocidad constante para poder establecer los diferentes vínculos entre distintas variables, a través de preguntas relacionadas con el comportamiento del llenado de un tanque de forma rectangular de 3cm de alto, 2cm de ancho y 5cm de largo, que recibe agua con un flujo constante de 1cm^3 por segundo.*
> *Usando esta actividad los estudiantes pueden llegar no solo a obtener un algoritmo, sino además analizar las diferentes relaciones que se pueden dar entre distintas variables, determinar cómo varía una función con respecto a uno de los parámetros, qué pueden obtener de una gráfica y cuál es el proceso para obtener un modelo matemático. Con todo lo anterior puedo decir que el estudiante logra nuevos significados de función.*

Podemos afirmar que Omar conoce una tarea específica con la cual abordar aspectos específicos de las funciones lineales, por ejemplo, las relaciones entre variables y los efectos que tiene la variación de parámetros.

Además, se ponen de manifiesto conocimientos sobre características de esta tarea como: estrategia didáctica propicia para el trabajo con la función lineal, como la conveniencia de considerar la variación y el cambio como foco central de trabajo y la búsqueda de un modelo matemático que represente variaciones propias de este tipo de funciones, así como la flexibilidad de esta tarea para adaptarse a distintos niveles educativos:

> O: *La tarea dirige al estudiante a inmiscuirse en el contexto variacional, invitándolo a desarrollar una serie de actividades, establecer un modelo matemático y representar los datos en un gráfico, para luego incitarlo a que comience a realizar variaciones fomentando la investigación, y la aprehensión de conocimiento.*
> *La actividad me acerca a la realidad, muestra un fenómeno poco estudiado en el aula, me lleva a establecer relaciones aplicadas a situaciones de la vida diaria; lleva al estudiante a que realice predicciones, y a que dé nuevos significados de la función lineal (resignificación). El objetivo no es el de aprender conceptos de memoria o algorítmicos, sino, a través de procesos de modelación, llegar a un aprendizaje significativo del concepto.*

En este diseño, se observa también una explícita intención de guiar los procedimientos de los estudiantes para identificar relaciones específicas por medio de la modelación matemática de fenómenos y el tratamiento y tránsito entre registros de representación de la función lineal.

> O: *En el caso de esta secuencia se utilizarán las siguientes acciones: elaboración de tablas, utilización de algoritmos, la elaboración de gráficas, comparación, relaciones entre variables, variaciones matemáticas, análisis de datos, consecución modelos, entre otras.*

La estructura misma del diseño didáctico pone de manifiesto, además, su conocimiento sobre la modelación de fenómenos como estrategia didáctica asociada al aprendizaje de funciones, y la conveniencia de su uso para generar una secuencia de tareas que permita a los estudiantes trabajar el contenido matemático en contextos específicos.

Al cuestionarlo sobre el uso de la modelación en su diseño de secuencia, Omar comenta:

> O: *El proceso para obtener un modelo matemático se llama modelación matemática; la modelación matemática se puede ver como el medio para enseñar un concepto matemático y/o como herramienta para generar significados. En el primero se establecen unas secuencias para enseñar cualquier concepto, y en el segundo se generan significados articulando diferentes contextos para reafirmar el aprendizaje.*
> *La modelación como práctica se basa en desarrollar procesos mentales, que lleven al estudiante más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado.*
> *El objetivo de la actividad no es el de aprender conceptos de memoria o algorítmicos, sino llegar a un aprendizaje significativo del concepto a través de procesos de modelación.*

Su discurso refleja el peso dado al uso de un contexto real para involucrar a los estudiantes y establecer relaciones a través de la modelación. Sin embargo, este uso de contextos no parece estar ligado directamente al concepto de función lineal, puesto que Omar considera que esta actividad podría trabajarse también con contextos puramente matemáticos sin cambios significativos. Aun así, consideramos que Omar tiene conocimiento sobre las ventajas que tiene el trabajo con la modelación de fenómenos reales como estrategia didáctica para la construcción del concepto de función lineal puesto que identifica características propias de este tipo de estrategia: implica desarrollar procesos mentales que van más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado y requiere que los estudiantes tengan ciertos conocimientos previos que les permitan establecer relaciones entre variables y dar nuevos significados al concepto de función.

> O: *Al pasar de un registro al otro espero que el estudiante establezca las relaciones de variable dependiente-independiente, y pueda observar cómo se podría modelar el fenómeno a partir de los recursos gráficos.*
> *En el diseño se manejan contextos diferentes como el algebraico, el visual, y el gráfico que unidos fundamentan el aprendizaje de funciones. El juego entre estos contextos permite resignificar el concepto de función través de la modelación.*

Se reconocen aquí conocimientos sobre la potencialidad didáctica que tienen los distintos registros asociados a la función, al utilizar el tránsito de un registro de representación a otro como una técnica para abordar el concepto de función, y que identificamos como parte de esta categoría. Esto lo justifica a través de la búsqueda de relaciones entre ellos por parte de los estudiantes para el modelado del problema.

Las evidencias de conocimiento, que extrajimos de las participaciones de Omar, nos permiten reinterpretar esta categoría y refinarla al reconocer la necesidad de distinguir entre *estrategias, técnicas y tareas didácticas* que permitan al investigador observar los datos desde perspectivas diferentes y analizar cuestiones específicas que ofrecen información sobre las posibilidades de acción que tiene el profesor, así como reflexionar sobre la toma de decisiones que hace sobre su diseño:

- Tarea: Secuencia de llenado de recipiente que permite explorar las características específicas de las funciones.
- Estrategia: Modelación de fenómenos como estrategia didáctica asociada al aprendizaje de funciones.
- Técnica: El tránsito entre distintos registros de representación permite, a través de la modelación, resignificar el concepto de función.

Renombramos entonces el subdominio como el conocimiento de las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático**.**

Así como en el subdominio anterior, se incorpora al subdominio la categoría de **teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático**. El KMT puede ser un conocimiento fundamentado en resultados de investigación en Matemática Educativa, en la observación y la reflexión sobre la actividad matemática en el aula, en propuestas didácticas que tiene el currículo, así como la experiencia previa del profesor, fuentes con las cuales pueden construirse teorías sobre la enseñanza de las matemáticas que pueden orientar, e incluso condicionar el actuar del profesor y el uso que hace del conocimiento (Schoenfeld *et al.*, 2008).

Del análisis *bottom-up* se observan algunas evidencias del conocimiento de Omar sobre constructos teóricos provenientes de la teoría SE que le sirven para sustentar y diseñar una determinada estrategia didáctica para la enseñanza de la función.

> O: *Hago referencia a términos de la Socioepistemología puesto que esta teoría me permite mirar la educación matemática como una actividad en la que se estudia el trasfondo de los conceptos matemáticos y llevarlos a otros contextos, me acerca al mundo real. La investigación en el aula puede trabajarse a partir de la resolución de problemas y de la utilización de fenómenos físicos, químicos o matemáticos donde se tiene que utilizar la práctica de modelación.*

La práctica de modelación (que es la que se aplica en este recurso, y sobre la cual se creó la actividad), exige tener conocimiento sobre conceptos como variable dependiente e independiente y, quizá, conocimientos básicos sobre función lineal, de una manera tradicional. La actividad me acerca a la realidad a través de un fenómeno físico, me lleva a establecer relaciones aplicadas a situaciones de la vida diaria; lleva al estudiante a realizar predicciones y, a que dé nuevos significados de la función lineal (resignificación).

Es importante señalar que Omar no hace una asociación directa de la teoría con el tratamiento didáctico de las funciones, pero sí con el entorno de trabajo motivador que se genera con la práctica de modelación y su utilidad como herramienta para generar conocimiento matemático al establecer relaciones con los fenómenos de contextos reales en aula. Esta idea parece ser la que lo lleva a utilizar la práctica de modelación en el diseño y estructura de sus tareas para generar en el estudiante nuevos significados al respecto de la función lineal, estableciendo relaciones entre la modelización matemática y los contextos reales, lo cual parece responder a una influencia significativa de trabajos relativos a SE.

Al igual que en el caso del KFLM, se identifica en Omar la construcción de una teoría personal de enseñanza basada en su conocimiento sobre constructos teóricos de la SE, al utilizar la idea de práctica de modelación como generadora de conocimientos, de ahí la relación que hace con los contextos del mundo real por lo cual reinterpretamos el nombre de la categoría como: **teorías formales y/o personales de enseñanza asociadas a un contenido matemático**.

La categoría de **recursos de enseñanza**, se refiere al conocimiento de materiales utilizados para la enseñanza de un contenido particular, manteniendo el foco del análisis en el conocimiento sobre sus características didácticas ligadas específicamente a las matemáticas.

Esta categoría fue especialmente difícil de observar en el análisis. A pesar de que Omar habló varias veces de la posibilidad de usar herramientas tecnológicas como GeoGebra o Cabri, para validar los resultados obtenidos a través del trabajo manual o algebraico de los contenidos, no mencionó la potencialidad que tienen estos materiales para el trabajo matemático, las diferencias entre ellos, ni las ventajas y desventajas de su utilización para trabajar el concepto de función. Lo que sí podemos afirmar es que el profesor conoce dos softwares diseñados específicamente para la enseñanza de las matemáticas, que permiten realizar representaciones gráficas y esquemáticas de contenidos matemáticos.

> O: *Se usarán recursos de lápiz y papel inicialmente, y para la verificación o validación de la actividad se utilizará un software que puede ser GEOGEBRA o CABRI, para mostrar al estudiante que lo que realizó no solamente lo validan sus pares, sino también una herramienta que además de ser un apoyo visual para mostrar resultados, es como un agente externo al aula que puede decir si lo realizado está bien o no.*

Por otro lado, nos muestra conocimiento de una característica específica de los libros de texto como materiales didácticos:

> O: *Muchos libros de texto se centran en el trabajo algebraico a través de algoritmos, olvidándose de establecer relaciones entre el contexto y otras representaciones a veces necesarias como la graficación.*

Esto puede considerarse un conocimiento de características específicas de los libros ligadas directamente a la enseñanza de las funciones, dado que estos conocimientos se suman a los resultados obtenidos anteriormente, acerca de lo que sabe Omar sobre la dificultad que supone la variedad de representaciones de las funciones, y estos conocimientos sirven para motivar el planteamiento de secuencias de tareas en las que se utilizan distintos registros de representación de las funciones.

El análisis y reflexión del caso, nos lleva a repensar la categoría y renombrarla como conocimiento de **recursos materiales y/o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático**.

3.2.3 Subdominio de conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards-KMLS)

En la literatura existen discrepancias con respecto a la inclusión del conocimiento del currículum dentro del PCK. Sin embargo, según Depaepe y colaboradores (2013), distintos modelos de conocimiento del profesor reconocen la importancia de tener conocimiento curricular, como parte del dominio didáctico, lo cual identifican como *knowledge of educational ends* o *knowledge of curriculum and media*.

Por otro lado, el conocimiento curricular se estudia desde distintas perspectivas: como organizador de contenidos, como modelo de planeación del curso, como el que contiene estrategias de enseñanza, como estándar que ayude a la evaluación de saberes adquiridos o como el que norma lo que se debe aprender y cómo debe aprenderse en el curso (Pinto, 2010).

Dentro del MTSK se define un subdominio que engloba conocimientos sobre contenidos propuestos en las normativas curriculares institucionales, para saber lo que se prescribe en cada etapa, es decir, dar una ubicación temporal y contextual al contenido abordado. Además, respondiendo a críticas sobre el carácter normativo que implica reconocer solo los conocimientos *oficiales* (Depaepe *et al.*, 2013), se contempla aquí el conocimiento de objetivos y estándares de aprendizaje no oficiales que pueda tener el profesor, así como los procedentes de asociaciones profesionales o de los investigadores, al igual que los que derivan de la experiencia del profesor respecto a los logros de aprendizaje, añadiendo un elemento de juicio y crítica en relación con lo prescrito por la administración educativa.

Esta *aproximación top-down*, permite proponer las siguientes categorías para el análisis de este tipo de conocimiento: Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar y secuenciació**n con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar.**

La categoría de **expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico**, se refiere al conocimiento del profesor sobre lo que se espera que el estudiante aprenda en un determinado nivel escolar. Este puede ser adquirido a través de consultas de un documento rector que indique cuáles son esos contenidos, o como abstracción de las capacidades matemáticas específicas que requieren los estudiantes en ese momento escolar. Por ejemplo, Omar hace algunos comentarios acerca de que en Colombia se aborda el concepto de función como parte de los contenidos del currículum de bachillerato (sexto a undécimo grado) y que se retoman en grados superiores:

> O: *El concepto de función se aborda regularmente en el bachillerato, además de retomarlo en niveles tecnológicos y universitarios donde generalmente se le da más relevancia.*
> *En el informe no explicito los conocimientos que debe tener el estudiante, debido a que la actividad se diseña para octavo grado (13-14 años) y de acuerdo al currículo el estudiante ya tiene conocimientos suficientes para resolver la actividad. Cuando una actividad se adapta a otros grados diferentes al propuesto, se debe hacer*

> *teniendo como referencia que los conocimientos para resolverlo sean conocidos, como es este caso.*

Omar señala que los estudiantes de octavo y noveno grado, tienen conocimiento suficiente sobre el concepto de función lineal como para afrontar la actividad exitosamente y, establecer nuevos significados del concepto, aunque no profundiza en cuáles son estos conocimientos. Por otra parte, considera que la tarea es modificable para otros grados y, reconoce que en dicha adaptación se deben tener en cuenta los estándares de conocimiento sobre función lineal y ser consecuente con ello en las adaptaciones que se realicen de la tarea.

Aunque no explicita los conocimientos a los que se refiere para las distintas adaptaciones de la actividad, estos fragmentos nos permiten validar esta categoría, resaltando así la necesidad de contar con conocimiento sobre lo que los estudiantes deberían saber de un determinado contenido en un nivel escolar para realizar un diseño adecuado de tareas.

Cuando Omar menciona que su actividad puede adaptarse a diferentes niveles escolares, es natural preguntarnos qué es lo que hay que modificar y qué conocimientos se requieren para adaptar el recurso al nivel de desarrollo conceptual y procedimental que tengan los estudiantes en octavo, noveno, o undécimo grado, puesto que esto implica reconocer características específicas del desarrollo cognitivo de los estudiantes.

> O: *Modificaría la actividad agregando algunas preguntas o quitando otras, así se puede ajustar a diferentes cursos sin cambiar el objetivo y la estructura de la actividad.*
> *En general la actividad se puede aplicar a nuestros estudiantes del grado octavo (13-14 años), noveno (14-15 años), y con algunos cambios para grado undécimo (16-17 años) y universidad cuando se hable de integrales.*

Omar habla de modificaciones de forma (estructurales sin modificar objetivos), sin profundizar en las modificaciones ligadas específicamente al contenido matemático, a excepción de una mención poco clara a la adaptación para universidad en la que hace alusión a las integrales, lo cual limita el reconocimiento que podemos hacer sobre su conocimiento.

En este sentido reconocemos la necesidad de crear una categoría de **nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar,** que se refiere al conocimiento del profesor sobre la profundidad con la que debe ser abordado un contenido matemático específico, en relación con un nivel escolar determinado. De manera, que podamos reconocerlo, estudiarlo y caracterizarlo para así poder desarrollarlo posteriormente.

Por último, a pesar de que, entre las narrativas de Omar, no aparece evidencia sobre el conocimiento que tiene de **secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar**, consideramos importante incluir esta última como una categoría del KMLS. Se refiere al conocimiento sobre la secuenciación de diversos contenidos matemáticos, ya sea dentro de un mismo curso o pensando en cursos anteriores y posteriores. Es imposible no cuestionar la similitud (y preguntarse por las diferencias) de este subdominio con los conocimientos propuestos en el dominio de conocimiento de la Estructura Matemática (del dominio matemático). Su similitud con las conexiones matemáticas es patente. Sin embargo, mientras en el conocimiento de la estructura lo que el profesor conoce son las formas en las que se conectan contenidos (interconceptual o temporalmente), en la categoría que estamos describiendo aquí, la secuenciación de temas matemáticos puede responder a otras especificidades además de su estructura. Por ejemplo, si un profesor conoce que en un grado escolar se ve un tema mediante una actividad y el contexto de esa actividad es continuación para otro tema distinto, entonces el profesor estará evidenciando la secuenciación de temas, cuyo propósito es didáctico y no obedece necesariamente a las conexiones matemáticas (inter o intraconeptuales) existentes entre dichos contenidos.

4. REFLEXIONES FINALES

De acuerdo con la descripción que hemos hecho, podemos mostrar al lector la caracterización que se hace del CDC como parte del MTSK (Figura 4), partiendo de subdominios y refinando con categorías de conocimiento:

KFLM	Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático	*Formales*
		Personales
	Las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático	
	Las formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje	
	Los intereses y expectativas de los estudiantes sobre el abordaje de un determinado contenido matemático	
KMT	Teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático	*Formales*
		Personales
	Recursos materiales y/o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático	
	Las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático	
KMLS	Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico	
	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar	
	Secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar	

Figura 4. Subdominios y categorías del CDC como parte del MTSK

Consideramos que la definición de estos subdominios y sus categorías supone un refinamiento de los considerados en otros modelos, como el de Shulman o el MKT, en términos del contenido de los subdominios y su conceptualización, focalizando la atención en el conocimiento que tiene el profesor de cómo las matemáticas son aprendidas, enseñadas, o de cuáles son las expectativas de aprendizaje en los diferentes niveles educativos (Escudero, 2015)

Por otro lado, esta caracterización se diferencia de Shulman en tanto que se construye como un modelo integrador (Gess-Newsome, 1999), en el que el CDC no existe como un fenómeno aislado y la enseñanza se considera como el acto de integrar el conocimiento a través de diferentes dominios del conocimiento, lo cual es la esencia del MTSK.

Otra de las críticas al PCK se refiere a si este puede distinguirse teórica y empíricamente del conocimiento del contenido (Depaepe, *et al.*, 2013), sin embargo, consideramos que las evidencias de este estudio permiten observar el potencial que tiene distinguir distintas formas de conocer un contenido para su análisis y sistematización. Por ejemplo, Omar conoce distintos registros de representación para las funciones lineales, además de características específicas de estos registros (KoT) y sabe que esta variedad de representaciones puede suponer una dificultad en el proceso de aprendizaje de este tipo de funciones (KFLM). Además, Omar reconoce el tránsito entre registros como una posible vía de enseñanza que permite analizar las relaciones entre las variables de la función y observar el comportamiento de la misma desde distintos enfoques (KMT). Estos conocimientos tienen una naturaleza distinta, pero en conjunto, permiten tomar una decisión en cuanto a la forma en la que elaborará el diseño de una actividad para trabajar el concepto.

Consideramos importante señalar que hemos mantenido en la traducción al inglés del modelo el término PCK, queriendo aludir a los referentes y bases teóricas de las cuales surge la distinción entre un conocimiento disciplinar y un conocimiento didáctico de la disciplina; no obstante, en la traducción al español hemos decidido hablar de Conocimiento Didáctico del Contenido, que nos parece que conlleva un significado más acorde con nuestra intención de aludir a lo que Azcárate (1998) define como "un conocimiento profesionalizado de las matemáticas que capacite para una intervención didáctica fundamentada" (p. 27).

Esperamos que esta descripción de bases teóricas y metodológicas que subyacen a la construcción del modelo MTSK sirva al lector para reflexionar acerca del potencial que tiene identificar y caracterizar el PCK, así como para discutir y criticar este y otros modelos de conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Estamos convencidos de que esto será un paso importante hacia la construcción de programas de desarrollo profesional cada vez más especializados.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1998). Sobre el conocimiento didáctico del contenido. Dilemas y alternativas. En L. Rico, y M. Sierra (Eds.). *Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 25-33). SEIEM. http://cutt.ly/vth47xp

Ball, D. L., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Open University Press.

Bosch, M., y Gascón, J. (2001). *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*, 15 de agosto de 2018, http://goo.gl/rsB1db.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., y Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(5), 385-401. http://www.jstor.org/stable/749173

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education*, https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* Tesis de doctorado publicada en http://goo.gl/KJA4Yb. Universidad de Huelva.

Depaepe, F., Verschaffel, L., y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, *34*, 12-25. https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.03.001

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.* Tesis de doctorado publicada en http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456. Universidad de Huelva.

Escudero-Ávila, D.I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, *10*(1), 53-77. http://cutt.ly/Sth7jm0

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., y Carrillo, J. (2015). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemático? *Actas del Cuarto Simposio Internacional ETM Espacio de Trabajo Matemático*, 473-484.

Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C., Liñán, M., (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Bolema.* Rio Claro (SP), *30*(54), 204- 221. http://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Gess-Newsome, J. (1999). Pedagogical content knowledge: an introduction and orientation. En J. Gess-Newsome, y N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 3-17). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47217-1_1

Llinares, S., Sánchez, V., y García, M. (1994). Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. *Revista de Educación, 304*, 199-225.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Erlbaum.

McDiarmind, G., Ball, D. L., y Anderson, C. W. (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject Specific Pedagogy. En M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (pp. 193-205). Pergamon Press.

Mitchell, R., Charalambous, C., y Hill, H. (2014). Examining the task and knowledge demands needed to teach with representations. *Journal of Mathematics Teachers Education, 17*(1), 37-60. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9253-4

Muñoz-Catalán, M. C. (2010). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel.* Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/OA4ydJ. Universidad de Huelva.

Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. En C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval, y F. Rønning (Eds.), *Relating Practice and Research in Mathematics Education. Proceedings of Norma 05*, 97-110. http://cutt.ly/cth7BHd

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(39), 307-332. https://doi.org/10.3102/00346543062003307

Pinto, J. E. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Salamanca.

Pinto, J., y González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada?, *Educación Matemática, 20*(3), 83-100. http://cutt.ly/JtjwWnC

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. Lomdon, SAGE Publications.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. Routlege.

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En T. Wood, y D. Tirosh (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Sense Publishers. http://doi.org/10.1163/9789087905460_016

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14. http://www.jstor.org/stable/1175860

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-21. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sosa, L., Aguayo, L., y Huitrado, J. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). Díaz de Santos.

Stake, R. (1995). *The Art of case study*. SAGE.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). McMillan.

Vázquez-Bernal, B., Jiménez Pérez, R., y Mellado Jiménez, V. (2019). El conocimiento didáctico del contenido (CDC) de una profesora de ciencias: reflexión y acción como facilitadores del aprendizaje. *Enseñanza de las ciencias, 37*(1), 25-53. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2550

Viseu, F., y Menezes, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3º ciclo: O confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *Relime*, *17*(3), 347-375. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1734

Dinazar Isabel Escudero-Ávila

Dirección: Avenida 609 Nº 53 San Juan de Aragón Sección 3,
Alcaldía Gustavo A. Madero, Ciudad de México,
México, C.P. 07970

Teléfono: +525545692934

 DOI: 10.24844/EM3202.02

Algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la gestión de las relaciones área-perímetro

Some key elements of the mathematics teacher's specialised knowledge for the management of area-perimeter relationships

Hugo Cesar Cayo Maturana[1]
Luis Carlos Contreras González[2]

Resumen: En este trabajo se presentan algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que consideramos podrían favorecer la gestión del maestro durante el proceso de enseñanza de las relaciones área-perímetro en cursos de Educación Primaria. La información se ha obtenido de dos maestras noveles de Primaria, a través de la observación de las filmaciones de sus clases, las que se desarrollaron en cursos de quinto año de Educación Primaria, de su transcripción y de las entrevistas posteriores. Dicha información ha sido analizada con el modelo analítico Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK),[3] centrándonos solo en aquellos conocimientos que hemos considerado relevantes. Obteniendo finalmente como resultado, en su mayoría, elementos del MTSK correspondientes al Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK),[4] proponiendo, como elementos claves

Fecha de recepción: 14 de septiembre de 2019. **Fecha de aceptación:** 6 de mayo de 2020.

[1] Departamento de Educación, Universidad de Antofagasta, Chile, hugo.cayo@uantof.cl, orcid.org/0000-0002-9549-8088.

[2] Departamento de Didácticas Integradas, Facultad de Educación, Psicología y CC del Deporte, Universidad de Huelva, España, lcarlos@uhu.es, http://orcid.org/0000-0002-0044-2365.

[3] MTSK es el acrónimo de Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas).

[4] Es el acrónimo acuñado por Shulman que, en castellano, se suele traducir como Conocimiento Didáctico del Contenido y corresponde a uno de los dominios del modelo MTSK.

del conocimiento especializado, algunas estrategias de enseñanza, ejemplos y recursos didácticos, que consideramos podrían favorecer la gestión de la enseñanza de las relaciones área-perímetro en estudiantes de Primaria.

Palabras claves: *Conocimiento especializado, relación área-perímetro, primaria, obstáculos, estrategias.*

Abstract: This study considers several key aspects of the mathematics teacher's specialised knowledge which we believe can benefit the teacher's management of learning in a primary class studying the relationship between area and perimeter. The study focuses on the practices of two new entrants to primary education working in the fifth year, and is based on data drawn from video recordings of their lessons with the corresponding transcriptions, along with follow-up interviews. Analysis was restricted specifically to those areas of knowledge considered relevant, and was carried out within the framework of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. The results identify key elements of MTSK corresponding to the domain of Pedagogical Content Knowledge (PCK). These elements form part of the teachers' specialised knowledge, and are given shape in different teaching strategies, examples and educational resources which enhance the primary students' learning of the relationships between area and perimeter.

Keywords: *Specialised knowledge, relationship between area and perimeter, primary, obstacles, strategies.*

INTRODUCCIÓN

Como algunos autores han señalado, la investigación en educación matemática debe tener entre sus prioridades los problemas que derivan de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el nivel escolar, abordando las dificultades y los obstáculos que enfrentan los estudiantes (Rico, 2012). De acuerdo con esto, algunos de los temas que deberían ser abordados son la operatoria en el conjunto de los números racionales, la clasificación de figuras geométricas, las fracciones, y las potencias y sus propiedades, identificados como complejos por Pochulu (2009) en estudiantes de último año de Educación Secundaria, o la relación entre área y perímetro y el cálculo de área, identificado como problemático en estudiantes para maestros por Montserrat, Boqué y Pañellas (2016).

Si bien son varios los temas que generan dificultades al momento de abordar su enseñanza y aprendizaje, el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (en adelante SIDM), en cuyo seno se realiza este trabajo, ha declarado explícitamente su interés por profundizar en el estudio de los conocimientos especializados que requiere el profesor al abordar problemas clásicos de enseñanza y aprendizaje de nociones matemáticas, como la relación área-perímetro, la idea de infinito, la clasificación de figuras planas, entre otros (Sosa, Contreras, Gómez, Flores y Montes, 2017). De todos estos, según D'Amore y Fandiño (2007), los problemas de aprendizaje de los conceptos de área y perímetro pueden considerarse como los primeros en haber sido estudiados, como testimonio de esto presentan el famoso problema de las plazas de Galileo: Un pueblo tiene dos plazas A y B; el perímetro de la plaza A es mayor que el perímetro de la plaza B; ¿cuál de las dos plazas tiene el área mayor?

El hecho de que las investigaciones sobre los problemas de aprendizaje de los conceptos de área y perímetro sean antiguas, no implica que sea un tema resuelto. Estos mismos autores, plantearon a un grupo de 43 maestros el problema propuesto por Galileo, y 40 contestaron que la plaza de mayor área era la A (D'Amore y Fandiño, 2007), visualizando en la mayoría de los maestros la misma relación que Stavy y Tirosh (2001) (citados por D'Amore y Fandiño, 2007) observaron en un grupo de estudiantes de distintas edades, que mayor perímetro implica mayor área.

Lo anteriormente expuesto justifica la necesidad de abordar el estudio del conocimiento especializado del profesor concerniente a los procesos de enseñanza de la relación área-perímetro.

ANTECEDENTES

En los últimos años distintos autores han realizado investigaciones en esta línea; así, Gómez y Vásquez (2015) o Martínez y Pardo (2017) han demostrado que existe confusión entre los conceptos de área y perímetro en estudiantes de Primaria. Gómez y Vásquez (2015) plantean que esta confusión posiblemente se genera en la transición de las intuiciones que traen los estudiantes y los conceptos dados en las salas de clase, mientras que Martínez y Pardo

(2017), han evidenciado que, al abordar estos conceptos, el trabajo que se realiza en general es de memorización y aplicación de las fórmulas. Esta apreciación es corroborada por García y Carrillo (2006) que señalan que los estudiantes se limitan a la aplicación de fórmulas, en muchos casos de forma indebida y carente de significado.

La creencia de que igualdad de área implica igualdad de perímetro, y viceversa, ha sido estudiada por varios investigadores. Popoca y Acuña (2011) consideran que esta creencia se debe a que los estudiantes tienen más arraigado el pensamiento numérico que el geométrico, lo que les lleva a pensar que si tienen la misma área, tendrán igual perímetro (D'Amore y Fandiño, 2007). Otros estudios señalan que, en algunos casos, predomina el especto bidimensional sobre el unidimensional, lo que lleva a los estudiantes a creer que la figura con el área más grande será la que tenga el perímetro mayor; mientras que, en otros casos, prevalece el aspecto unidimensional, el rectángulo que tenga la mayor altura o base, será el de mayor área (Marchett, Medici, Vighi, y Zaccomer, 2005).

Baltar y Comiti (1993) plantean que es necesario superar la creencia de que igualdad de área implica igualdad de perímetro (y viceversa), antes de abordar las propiedades vinculadas a las variaciones de área y/o perímetro en una misma figura. Popoca y Acuña (2011) observaron que, para algunos estudiantes, el área de una figura (por ejemplo, un rectángulo) mantiene una estrecha relación de dependencia con su forma, por lo tanto piensan que, a distintas dimensiones les corresponde, necesariamente, diferente área. Este problema es especialmente delicado cuando aparece en futuros profesores, como en el estudio de Blanco (1996). Este autor planteó a estudiantes para profesor de Primaria la conjetura de un (hipotético) alumno de Primaria, que tras comparar dos rectángulos (4x4 y 6x4), afirmaba que su ejemplo probaba que a mayor perímetro había también mayor área y observó que 29 de sus 52 estudiantes para profesor, consideraron correcto el razonamiento entregado por un alumno.

Marmolejo, Sánchez y Londoño (2017) concluyeron que las tareas que no propician cambios dimensionales en la figura, no permiten el estudio de las propiedades de variación con respecto a la relación área-perímetro. Según Baltar y Comiti (1993), algunas de las actividades que se desarrollan con mayor frecuencia, favorecen la construcción de la creencia de que área y perímetro varían en el mismo sentido. De alguna forma, esto concuerda con la idea de D'Amore y Fandiño (2007), el obstáculo que se opone a la construcción satisfactoria de las relaciones entre perímetro y área no es solamente de naturaleza epistemológica, sino que se origina en las distintas decisiones que toma el maestro, y su naturaleza es, por tanto, didáctica.

Nuestro estudio pretende adentrarse en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de estas relaciones, con la intención de desgranar algunos aspectos de este que podrían favorecer una construcción adecuada por parte de los estudiantes.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nuestro trabajo se fundamenta en dos pilares que están relacionados, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y la ejemplificación. Comenzaremos por el primero y explicaremos después cómo el segundo se integra en este.

Shulman (1986) planteó la existencia de un conocimiento exclusivo de los profesores, un conocimiento que les permite tomar decisiones como, qué deben enseñar, cómo representarlo y cómo resolver problemas generados al abordar un determinado contenido.

Los trabajos de Shulman, relativos a este conocimiento específico de los profesores, llegaron a convertirse en referentes básicos en estudios sobre el conocimiento del profesor. Ball, Thames y Phelps (2008) señalaron hace poco más de una década que sus trabajos presentados en los años 1986 y 1987 habían sido citados en más de 1,200 artículos publicados en revistas especializadas, y han sentado las bases para la creación de distintos modelos que permiten analizar el conocimiento de los maestros. Si hoy hiciéramos una incursión en Google Scholar, encontraríamos que esas dos publicaciones han tenido más de 47,000 citas. De sus aportaciones, cabe destacar la existencia de dos dominios en el conocimiento del profesor: el dominio del conocimiento del contenido y el dominio del conocimiento didáctico del contenido (el denominado paradigma perdido).

Ball *et al.*, (2008), tomando como referencia los dominios propuestos por Shulman, presentaron un modelo para analizar y comprender el conocimiento de los profesores en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT).[5] Desde nuestra perspectiva hay dos aportaciones esenciales en este modelo específico para el conocimiento del profesor de matemáticas. En primer lugar, la distinción, dentro del dominio del conocimiento matemático, de los subdominios del

[5] MKT es el acrónimo inglés de Mathematical Knowledge for Teaching.

conocimiento matemático especializado (a diferencia del conocimiento matemático común) y del conocimiento en el horizonte matemático; por otro lado, en el dominio del conocimiento didáctico del contenido, de dos subdominios que amalgaman el contenido y su enseñanza y aprendizaje, respectivamente. Sin embargo, algunas investigaciones han detectado dificultades analíticas de este modelo (Montes, Contreras y Carrillo, 2013; Carrillo, Contreras y Flores, 2013) a la hora de ubicar un determinado conocimiento en un solo subdominio, dificultades que los propios autores reconocen en algunos de sus trabajos (Ball y Bass, 2002). Para salvar esta situación, el equipo del SIDM presentó un nuevo modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), en su diseño se tomaron como base algunas de las potencialidades del MKT y de otros modelos que buscan caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas (Carrillo *et al.*, 2013).

En MTSK se ha adoptado la definición de conocimiento propuesta por Schoenfeld (2010), quien lo define como aquél que se tiene disponible para su uso; desde la perspectiva del conocimiento del profesor es, por tanto, un conocimiento que se aplica y se pone en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje; es personal, contextualizado, integrado y complejo, práctico, dinámico, y parcialmente tácito. Algunas de estas características sustentan la comprensión del profesor que se encierra en el MTSK (Carrillo *et al.*, 2014; Climent, 2005).

En el MTSK se consideran dos dominios de conocimiento heredados de los trabajos presentados por Shulman (1986, 1987) y Ball *et al.* (2008), el conocimiento del contenido de la materia a enseñar (MK),[6] y el conocimiento didáctico del contenido a enseñar (PCK) (Carrillo *et al.*, 2014). El MK corresponde al conocimiento que tiene el profesor de la matemática como disciplina científica en el contexto escolar, y PCK considera los conocimientos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje (Carrillo *et al.*, 2014). Ambos dominios están compuestos por tres subdominios y para cada uno se dispone de categorías y subcategorías que permiten analizar y comprender el conocimiento que pone en juego el profesor en el aula (Escudero-Domínguez, Joglar, Correa y Reyes, 2016). Estas categorías han ido emergiendo de diversos estudios empíricos relativos a diferentes contenidos matemáticos y niveles educativos. En lo que sigue, nos referiremos a esos estudios, realizados por miembros

[6] En el modelo de conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), el dominio MK (de sus siglas en inglés) denota el conocimiento de la matemática.

de nuestro grupo, para explicar la estructura del modelo, cuya forma esquemática queda representada en la figura 1.

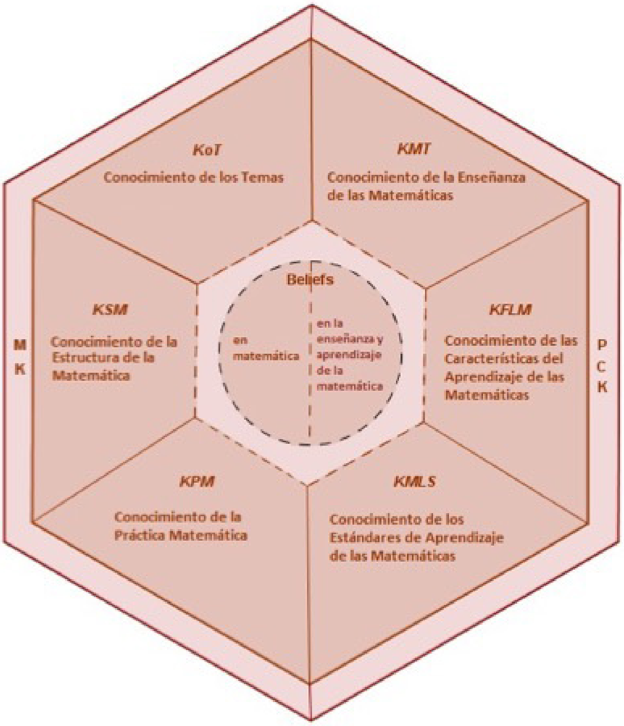


Figura 1. Modelo MTSK (adaptado al castellano de Carrillo *et al.*, 2014).

Los subdominios del MK son el Conocimiento de los Temas (en adelante KoT),[7] el Conocimiento de la Estructura Matemática (en adelante, KSM),[8] y el Conocimiento de la Práctica Matemática (en adelante, KPM).[9]

[7] KoT es el acrónimo inglés de Conocimiento de los Temas (Knowledge of Topics).

[8] KSM es el acrónimo inglés de Conocimiento de la Estructura de la Matemática (Knowledge of the Structure of Mathematics).

[9] KPM es el acrónimo inglés de Conocimiento de la Práctica Matemática (Knowledge of Practices in Mathematics).

Según Liñán, Contreras y Barrera (2016), el KoT considera el conocimiento de las matemáticas en sí mismas, incluye el conocimiento de los conceptos, proposiciones, propiedades, procedimientos o algoritmos, con sus respectivos significados y justificaciones, y se organiza en cuatro categorías: procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación; y fenomenología y aplicaciones (Carrillo *et al.*, 2018).

Montes y Climent (2016) establecen que el KSM se define desde una "doble perspectiva", como un conocimiento de conexiones, de cómo se relacionan aquellos elementos que se están considerando en un momento concreto de la enseñanza, con otros; y cómo un conocimiento trasciende la conectividad entre temas. Establecen cuatro categorías: conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones auxiliares y conexiones transversales.

El KPM (Flores-Medrano, 2016) es el conocimiento sintáctico; contiene los modos de producción y validación del conocimiento matemático. Se trata de saber cómo se explora y se genera conocimiento en matemática, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, y cómo se argumenta.

Los subdominios del PCK son el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (en adelante, KMT),[10] el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (en adelante, KFLM)[11] y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (en adelante, KMLS).[12]

Escudero, Contreras y Vasco (2016) definen el KMT como el conocimiento sobre las características del contenido matemático como objeto de enseñanza; corresponde a lo que el profesor sabe sobre las distintas posibilidades de enseñanza condicionadas por la naturaleza de un determinado contenido. Establecen tres categorías: teorías de enseñanza (personales o institucionales), recursos materiales y virtuales, y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

En el KFLM se incluye el conocimiento sobre las características inherentes a un contenido matemático, o a la matemática en general, como objeto de aprendizaje, y el conocimiento sobre las características de aprendizajes derivadas de las interacciones de los estudiantes con el contenido (Escudero-Ávila, Climent y Vasco, 2016; Escudero-Ávila, 2015). Se han establecido cuatro categorías: teorías

[10] KMT es el acrónimo inglés de Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Teaching).

[11] KFLM es el acrónimo inglés de Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Features of Learning Mathematics).

[12] KMLS es el acrónico inglés de Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards).

sobre aprendizaje (personales o institucionales); fortalezas y debilidades; formas de interacción con el contenido matemático; e intereses y expectativas (Carrillo *et al.*, 2018).

Dentro del KMLS se incluyen los conocimientos sobre qué debería aprender un estudiante en un determinado momento de su escolarización, tomando como referencia el currículo y cualquier otro referente nacional o internacional que desarrolle investigaciones en esta línea. Establecen tres categorías: expectativas de aprendizaje; nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado; y secuenciación con temas anteriores o posteriores (Escudero-Domínguez y Carrillo, 2016).

Los trabajos antes citados nos han mostrado cómo MTSK permite disgregar el conocimiento con propósitos analíticos, para la comprensión de su organización en la mente de un profesor. Se utilizará en este trabajo para analizar y comprender el conocimiento especializado puesto en juego por las profesoras del estudio. Pero, además, como se ha señalado, dentro del subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas se incluye la selección y uso de ejemplos, por ello nos parece adecuado mostrar brevemente nuestro posicionamiento teórico al respecto.

Suffian y Abdul Rahman (2010) consideran que los ejemplos siempre han desempeñado un papel central en la enseñanza de las matemáticas y su uso, por parte de los profesores, ayudan a comprender cómo explican y facilitan la comprensión matemática durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. En el mismo sentido se expresan Watson y Mason (2002), quienes afirman que desde hace mucho tiempo se reconoce que las personas aprenden matemáticas principalmente a través de los ejemplos, ya que a través de ellos las definiciones adquieren sentido, y llaman nuestra atención sobre la idea de variación, mostrando su utilidad ya que, al acceder a una amplia variedad de ejemplos, los estudiantes podrán obtener una idea general de lo que están aprendiendo; de acuerdo con estos autores mientras más amplia sea la gama de ejemplos, mayores serán las posibilidades de generalización y conexión. En este sentido, Dienes (2001) (citado por Goldenberg y Mason, 2008) afirmó que los estudiantes necesitan al menos tres ejemplos para tener una idea de un concepto.

Suffian y Abdul Rahman (2010) han observado que seleccionar el ejemplo apropiado es una tarea desafiante que estará determinada en gran medida por el conocimiento especializado que posea el profesor, dicha elección afectará el proceso de aprendizaje de las matemáticas en el aula, por tal razón el profesor debe tener gran cuidado al seleccionar y utilizar un determinado ejemplo.

La selección y uso de ejemplos será una lente complementaria a través de la cual intentaremos acceder al conocimiento de las profesoras de nuestro estudio.

METODOLOGÍA

Como hemos señalado, el objetivo de esta investigación es encontrar elementos del conocimiento especializado que puedan considerarse claves para favorecer la construcción de las relaciones área-perímetro en estudiantes de Primaria. Esta investigación se enmarca en el paradigma interpretativo, busca generar conocimiento que favorezca la gestión, por parte del profesor, del proceso de enseñanza-aprendizaje de las relaciones área-perímetro, a partir de las acciones observadas en el aula (Carbajosa, 2011 y Vain, 2012). Corresponde a un tipo de estudio de caso; es una investigación empírica que estudia un suceso, el desarrollo de las clases, en su contexto, abordándolo de manera profunda, con el propósito de obtener un mayor aprendizaje (Durán, 2012), presentando una descripción, una explicación y una valoración de las evidencias, indicios y oportunidades encontradas en los casos seleccionados (Ceballos, 2009); se corresponde, por tanto, con un estudio de caso múltiple, de carácter instrumental (Durán, 2012) en el que se analizaron las observaciones de dos clases de las que se seleccionaron episodios relevantes (López, 2013) para el objetivo de nuestro estudio.

Las informantes son dos maestras noveles, Ely y Ana, se seleccionaron porque ambas debían abordar el mismo objetivo de aprendizaje "diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro o el área o ambos y sacar conclusiones" (MINEDUC, 2013, pp. 92) correspondiente al curriculum establecido para quinto de Primaria y, se mostraron dispuestas a participar en este trabajo. Las dos maestras se encuentran en su primer año de ejercicio docente, han obtenido el título de Profesora de Educación Básica con Mención en Matemática y han egresado de las únicas universidades de la ciudad de Antofagasta que pertenecen al Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas. Ely egresó de la Universidad de Antofagasta y se desempeña como maestra en un establecimiento privado; Ana egresó de la Universidad Católica del Norte y se desempeña en un establecimiento municipal.

Para llevar a cabo el análisis de las sesiones se realizó una transcripción literal de las filmaciones de las clases, con el propósito de identificar aquellos episodios que nos permitiesen visualizar evidencias e indicios de los conocimientos movilizados por las maestras, vinculados con la enseñanza de la relación área-perímetro. Tomando como base los indicios, se elaboró una entrevista semiestructurada con la cual se buscaba, en la medida de lo posible, transformar los estos en evidencias de los conocimientos movilizados por las maestras.

La revisión de las transcripciones y entrevistas se realizó de forma lineal, a cada episodio que nos entregaba información relevante, se le asignaba uno o unos subdominios del MTSK y un tópico, entendiendo como tópico, el concepto matemático central, que se está abordando en el episodio. Para facilitar el análisis realizamos una primera agrupación por subdominios de aquellos episodios que nos entregaban información, tanto de la transcripción como de la entrevista, por cada maestra. Luego se realizó una agrupación por tópicos.

Es probable que algunos de los elementos que hemos considerado claves del conocimiento especializado para la gestión de la enseñanza de las relaciones área-perímetro ya formen parte de la literatura, pero consideramos que el observar la práctica docente con MTSK activa en el investigador conocimientos que permiten comprender mejor algunos de los obstáculos o dificultades que se pueden presentar al abordar esta temática, estos nuevos conocimientos vienen evocados exclusivamente por la práctica docente (Liñan, 2017).

Con el propósito de centrar la atención en aquellos conocimientos que hemos considerado claves y no en las maestras, al momento de presentar la discusión y conclusiones, nos centraremos en estos conocimientos, apoyándonos en las evidencias obtenidas de los ejemplos utilizados por las dos maestras.

RESULTADOS

Dado que se identificó un número elevado de episodios[13] en los cuales se observó la movilización de conocimientos que podríamos llamar "triviales" (como, por ejemplo, "la profesora conoce la diferencia entre área y perímetro"), nos centraremos en aquellos que nos permiten analizar conocimientos que consideramos claves al momento de abordar la relación área-perímetro.

[13] El código del episodio n,X,Y indica el episodio n-ésimo de la profesora X (inicial de Ely o Ana) a través de Y (observación de clase (C) o entrevista (E)).

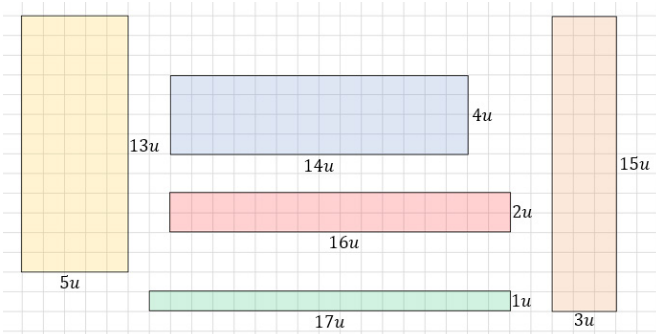


Figura 2. Rectángulos propuestos por la profesora para que los estudiantes los midan con un trozo de hilo.

Ely: *Ya, miren acá, ustedes toman la pita [se refiere a un trozo de hilo] y van a medir el contorno de esta figura, después con la misma medición que tienen de la pita, van a medir los siguientes rectángulos (ver figura 2).*

(Episodio 1.E.C.)

Ely: *Ya, dice: con los cuadrados de cartulina que tienes, armar diferentes rectángulos con áreas iguales, por ejemplo, área 36. Chicos yo solamente les voy a dar el área que sería 36, ustedes tienen que buscar el número [las medidas de los lados]....*

(Episodio 2.E.C.)

Ely: *Ya de la fila de allá, va a hacer el primero, va a pintar cuatro cuadraditos y nueve, aquí en la pizarra. Pedro ven para acá, a hacer el segundo, Felipe ve a hacer el otro. Pamela anda, tu dijiste que tenías uno distinto (ver figura 3) .*

(Episodio 3.E.C.)

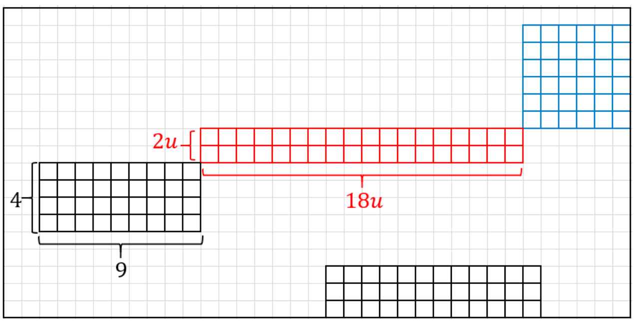


Figura 3. Presentación de los rectángulos construidos por los estudiantes.

En estos episodios podemos observar evidencias del subdominio de conocimiento para la enseñanza de las matemáticas (KMT) de la maestra; en el primero ha presentado a sus alumnos cinco rectángulos en el pizarrón, todos con diferentes medidas, pero con igual perímetro, los estudiantes dibujan estos rectángulos en su cuaderno, miden el perímetro de uno de ellos con un trozo de hilo, y con la medida obtenida miden el perímetro de los otros rectángulos. Esta actividad nos da evidencias de que la maestra conoce la potencialidad del recurso “hilo” para ofrecer el valor tangible de un perímetro dado, como un valor global más que como suma de longitudes, que permite a los estudiantes comprobar que diferentes rectángulos pueden tener igual perímetro. En el episodio 2.E.C la maestra le pide a los estudiantes que trabajen con cuadraditos, como unidad de medida, y que construyan con ellos rectángulos que tengan un área de 36 u^2. Podemos ver que la maestra conoce la potencialidad de otro recurso que permite a los estudiantes visualizar que podemos tener diferentes rectángulos con el mismo número de cuadraditos (la misma medida de su área). En el episodio 3.E.C la maestra da evidencias de que conoce la potencialidad de un recurso, la cuadricula, que permite a los estudiantes visualizar las unidades totales del área del rectángulo que se está representando en ella. Todas estas evidencias corresponden a la categoría recursos de subdominio KMT.

Los siguientes episodios corresponden a extractos de la entrevista realizada a la profesora Ely.

Invest.: *El área aumenta si el perímetro aumenta ¿Está bien la conclusión que obtuvieron los estudiantes?*

Ely: *No, no sé en qué estaba pensando, a ver, Luis dijo que el área aumenta si el perímetro aumenta, mmm sí, en realidad sí.*

(Episodio 4.E.E.)

Invest.: *¿A qué diferencia te refieres?*

Ely: *A que la figura cambiaba, si yo le ponía más cuadritos igual iba a cambiar la figura, iba a ser diferente el área, si le ponía más cuadritos para igualar el perímetro el área sería diferente, eso quería que entendieran.*

(Episodio 5.E.E.)

Invest.: *¿Por qué consideras importante trabajar área y perímetro de rectángulos y cuadrado por separado?*

Ely:	*Ah, porque son diferentes figuras, unas son iguales, las otras son diferentes. Entonces tienen como otra mecánica, por decirlo así, otra fórmula.*

(Episodio 6.E.E.)

En estos episodios se pueden observar evidencias del conocimiento de los temas (KoT) que posee la maestra. En el episodio 4.E.E se observa que la maestra considera la existencia de una relación de dependencia entre área y perímetro, da por correcta la conclusión obtenida por el estudiante, el área aumenta si el perímetro aumenta. En el episodio 5.E.E. la actividad sobre la cual está reflexionando la maestra, consistía en transformar un rectángulo de perímetro 26 en uno de perímetro 36. Se puede observar que la maestra moviliza dos conocimientos con respecto a la relación área-perímetro. Primero, considera que la única forma de aumentar el perímetro de un rectángulo es aumentando su área, en este caso agregando cuadrados a la figura. Segundo, cree que, si cambiamos una de las medidas, área o perímetro, se alterará la otra. Y en el episodio 6.E.E. se observa que domina una clasificación excluyente de los cuadriláteros, no considera al cuadrado como un caso particular de rectángulo.

Los siguientes episodios corresponden a evidencias del MTSK movilizado por la maestra Ana.

Ana:	*Y acá nos detenemos un rato, menciono lo que ustedes estaban diciendo, según ustedes el rectángulo era más grande que el cuadrado, ¿no?, me dijeron que la base era mayor... (interrumpen los estudiantes).*
Alumnos (todos):	*No, no, son lo mismo.*
Felipe:	*El nueve más el nueve y el uno más el uno da veinte, y el cinco más cinco más cinco más cinco da veinte.*

(Episodio 1.A.C.)

Ana:	*Ahora, si el perímetro en el rectángulo y en el cuadrado tienen exactamente la misma medida ¿Cómo creen que serían las áreas? ¿Serían iguales? Considerando que tienen el mismo perímetro.*
Alumnos (todos):	*No*

(Episodio 2.A.C.)

Ana:	*Hasta el momento ¿Cuál es la coincidencia entre los tres rectángulos?*

Pamela:	*Que tienen la misma área*
Ana:	*Ya, los tres rectángulos tienen la misma área ¿Qué va a pasar con el perímetro?*

(Episodio 3.A.C.)

Estos tres episodios dan evidencias de su conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT), en relación con algunas de las estrategias utilizadas por la maestra al abordar la enseñanza de la relación área-perímetro. En el episodio 1.A.C. los estudiantes están observando dos rectángulos con las medidas de sus lados, concluyen que el mayor es aquel que tiene la medida de su base más grande, pero después de realizar el cálculo de los perímetros se percatan de que los rectángulos son isoperimétricos. Esto nos da evidencias de que la maestra conoce una estrategia para hacer reflexionar a los estudiantes sobre la idea errónea de que mayor base implica mayor perímetro. Los episodios 2.A.C. y 3.A.C. nos dan evidencia de que la maestra sabe cómo obtener información del pensamiento de los estudiantes, se puede apreciar cómo propone actividades para comprobar si los estudiantes sostienen ideas incorrectas con respecto a la relación área-perímetro. En el episodio 2.A.C. busca comprobar si los estudiantes sostienen la idea de que igual perímetro implica igual área y en el 3.A.C. si sostienen la idea de que igual área implica igual perímetro. En ambos casos, son evidencias de conocimiento de la categoría estrategia, técnicas, tareas y ejemplos del KMT.

A continuación, se presentan dos episodios más que nos dan evidencias sobre los subdominios de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), del MTSK movilizado por Ana; el primero corresponde a su clase y el segundo a su entrevista.

Ana:	*Hasta el momento ¿Cuál es la coincidencia entre los tres rectángulos? (ver Figura 4)*

(Episodio 4.A.C.)

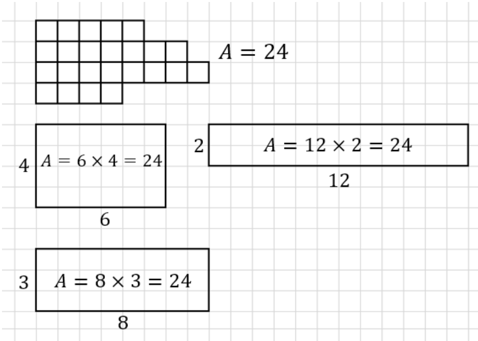


Figura 4. Actividad desarrollada sobre la proyección de una cuadricula.

Ana: *El uso de la cuadricula ayuda a visualizar cómo se puede generar un área demarcando una figura. Además de analizar el concepto de área y finalmente comprobando si la manera de calcular el área coincide con la de los cuadrados que están dentro de la figura dibujada.*

(Episodio 5.A.E.)

En estos episodios podemos observar más evidencias del KMT movilizado por Ana; vemos que conoce la potencialidad del recurso cuadricula, que permite a los estudiantes visualizar la magnitud del área de los rectángulos representados en ella.

El siguiente episodio corresponde a un extracto de la entrevista que se le realizó a la profesora Ana.

Ana: *Sí, quería que se fijaran en la base, seguro que pensarían que al tener una mayor base tendrían mayor área.*

(Episodio 6.A.E.)

Este episodio nos da evidencia que sabe que los estudiantes tienden a pensar que el rectángulo que tenga la mayor base será el que tenga la mayor área, que forma parte de la categoría fortalezas y debilidades del KFLM de Ana.

Los episodios que se presentan a continuación describen aquellas situaciones que se generaron en el aula y que evocaron en el investigador conocimientos vinculados con la enseñanza de la relación área-perímetro.

El primer episodio evocó en el investigador, conocimiento correspondiente a la categoría recursos del subdominio KMT:

Ely:	*Sí está bien, y cuando mediste con la pita, Katy, te diste cuenta de que todas median igual.*
Katy:	*Similar.*
Ely:	*Ya similar, cierto, porque no va a ser exacto.*

(Episodio 7.E.C.)

Es necesario conocer las potencialidades, limitaciones y/u obstáculos que pueden presentar los recursos didácticos seleccionados (KMT, recursos materiales y virtuales), de esta forma los maestros podrán prever los errores que pueden cometer los estudiantes.

En este episodio también se describe una situación que evocó en el investigador conocimiento correspondiente al subdominio KMT:

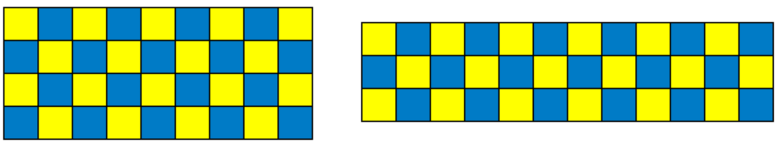


Figura 5. Rectángulos construidos por María y Carla respectivamente.

María:	*Hay 36 (4 x 9).*
Ely:	*Y tú, lo hiciste de.*
Carla:	*36 (3 x 12).*
Ely:	*¿Y cuál es la diferencia entre ustedes dos?*
Carla:	*Que ese es más ancho, el mío es más largo y el de ella más ancho.*
María:	*Que yo tengo 4 filas y ella tiene 3.*
Ely:	*¿Y cuál es más grande?*
Carla:	*Ninguno, porque ambos tienen el mismo número de cuadritos.*

(Episodio 8.E.C.)

Es necesario que los maestros conozcan las oportunidades que pueden ofrecer los distintos recursos didácticos (KMT, recursos materiales y virtuales). La actividad propuesta consistía en que cada estudiante debía construir un rectángulo, utilizando 36 cuadraditos. Durante la clase, cada estudiante trabajó con su rectángulo, pero, al encontrarse estas alumnas con dos rectángulos, ambos construidos con la misma cantidad de cuadrados, pudieron concluir que tenían la misma área, independiente de las medidas.

Los siguientes episodios también evocaron KMT, pero la categoría estrategia, técnicas, tareas y ejemplos:

Ely: *¿Y si te digo perímetro 36, te va a cambiar la figura?*

Carlos: *No, porque ya me da, si lo sumo todo eso me da 36.*

Ely: *¿Seguro? ¿Con los mismos números que me dijiste?*

Carlos: *Sí, porque nueve por cuatro. Ah no, no, no, porque sí tendría que cambiar la figura. Tendría que hacerla más ancha o más alta, porque ahora lo hice y me dio 26, tengo que agregarle diez más.*

Ely: *¿Y qué pasa con el área? Aumenta o disminuye.*

Carlos: *Aumenta.*

(Episodio 9.E.C.)

Pedro: *Eso, así ..., si la profe te da el perímetro de 36, tienes que hacer otra figura, por qué, porque ese perímetro está mal, porque si el perímetro es 36 y a ti te dio 26, tienes que cambiar la figura para que el perímetro te dé 36.*

Ely: *No, es que yo quiero que vean la diferencia ¿ven la diferencia?*

Luis: *Disminuye.*

Ely: *Ya Luis dice que disminuye, entonces el área es mucho más grande, si yo voy subiendo, subiendo de número ¿el área se hace más grande?*

Luis: *Sí.*

Ely: *Sí, ¿esa es tu conclusión?*

Luis: *Es como una regla, el área va a aumentar sí o sí.*

Ely: *El área aumenta si el perímetro aumenta.*

(Episodio 10.E.C.)

Estos episodios corresponden a la interacción que se generó entre la maestra y los estudiantes cuando realizaron la construcción del rectángulo, utilizando 36 cuadrados. En ellos podemos observar que es necesario que los maestros conozcan cómo gestionar el potencial y las limitaciones de las distintas actividades que desarrollan durante la clase (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). La actividad tenía como objetivo que los estudiantes comprendieran que rectángulos de igual área no tienen necesariamente igual perímetro, pero al realizar el análisis de un solo rectángulo, no podían observar esta propiedad. También se puede visualizar la necesidad de que los profesores conozcan la pertinencia de las distintas actividades que desarrollan al momento de abordar un determinado contenido (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos); una cosa es estudiar cómo se comportan el área y el perímetro al generar cambios en una misma figura, y otra es analizar qué sucede con el perímetro de figuras que tienen igual área o viceversa.

Este último episodio describe una situación que evocó en el investigador conocimiento de la práctica matemática (correspondiente al subdominio KPM).

Darío: *Profe, ¿sabe por qué no tienen que ser iguales? Mire, el ancho en una es ocho el largo también. Entonces, la pita no se puede acostumbrar a eso, pero la dirección que nos da es de los números, los números si los sumamos nos dan 36 todos, pero la forma es diferente.*

Fabiola: *El perímetro es igual pero la forma no.*

Darío: *Si unos son muy chicos, o nos puede medir muy alto, nos puede faltar o nos puede sobrar, pero los números nos van a dar lo mismo.*

(Episodio 11.E.C)

En este episodio se presentan algunas de las conclusiones obtenidas por los estudiantes después de demarcar el perímetro de los cinco rectángulos con un trozo de hilo. Es preciso utilizar las características necesarias para definir el concepto de perímetro (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones) para no generar obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes. Durante la clase se entregaron las siguientes definiciones de perímetro: el contorno; lo de afuera; y suma de los lados, sin hacer referencia al perímetro como una medida longitudinal. Al calcular los perímetros, en todos los rectángulos obtuvieron 36u, pero al medirlos con el hilo no lograron utilizar un único trozo para demarcar los perímetros de todos los rectángulos. Esto llevó a algunos estudiantes a realizar una disociación entre la medida del perímetro representada por el hilo y el resultado obtenido al sumar la medida de los lados.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A continuación, presentamos algunas de las ideas que consideramos podrían favorecer la gestión del profesor durante el proceso de enseñanza de la relación área-perímetro, las cuales se obtuvieron al analizar el MTSK movilizado y evocado por las maestras. Con ello pretendemos poner de relieve nuestra respuesta a la pregunta de investigación: ¿qué elementos claves podemos identificar en el tratamiento de las relaciones área-perímetro? Cada uno de estos conocimientos pertenece a un subdominio específico de MTSK, eso nos permite agrupar los conocimientos en función de sus características, contribuyendo, con ellos, a enriquecer el mapa de conocimientos útiles para gestionar la situación.

Según D'Amore y Fandiño (2007), se ha demostrado ampliamente que estudiantes de todas las edades están convencidos de que igualdad de perímetro implica igualdad de área. Esto ocurre porque los estudiantes tienen más arraigado el pensamiento numérico que el geométrico, estableciendo argumentos intuitivos, por ejemplo, si dos figuras tienen igual perímetro deben tener igual área (Popoca y Acuña, 2011). Es importante que los maestros tengan conocimiento de los errores que comúnmente cometen los estudiantes al abordar una determinada temática (KFLM, fortalezas y debilidades), y que conozcan estrategias que les permitan extraer información del pensamiento de los estudiantes (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), de esta forma podrán verificar si sostienen o no ideas erróneas.

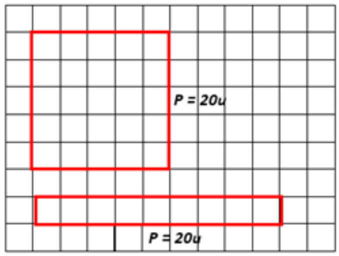


Figura 6. Rectángulos utilizados por la profesora Ana para conocer las concepciones de sus estudiantes.

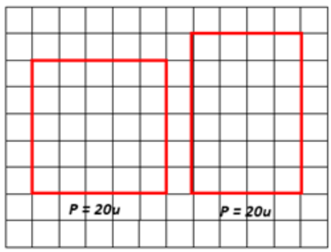


Figura 7. Rectángulos que proponemos para extraer información de las concepciones de los estudiantes.

Así, una estrategia para extraer información del pensamiento de los estudiantes podría ser preguntarles qué piensan que pasaría con el área de dos figuras que ya sabemos que tienen igual perímetro ¿serán iguales o diferentes? Pero debemos tener cuidado con el ejemplo que seleccionamos para realizar el análisis. La profesora Ana desarrolló la actividad con dos rectángulos, uno de 5x5 y otro de 1x9 (Figura 6), los de mayor y menor área que se pueden obtener con perímetro 20u y trabajando con números enteros. Al preguntar a los estudiantes qué pasaría con el área de estos rectángulos que tienen igual perímetro, respondieron que eran diferentes. Visualmente era evidente que las áreas no medían lo mismo, situación que podría haber impedido que los estudiantes expusieran sus verdaderas creencias. Creemos que sería pertinente utilizar rectángulos que tengan áreas con medidas similares (Figura 7). Esto podría motivar a los estudiantes a exteriorizar sus verdaderas creencias.

La clase de Ely nos permitió observar que, un trozo de hilo es un recurso que se debe considerar al momento de abordar el hecho de que diferentes rectángulos pueden tener igual perímetro, pues tiene la potencialidad de permitir a los estudiantes comprobar la existencia de esta propiedad sin necesidad de obtener el valor del perímetro mediante suma de lados (KMT, recursos materiales y virtuales). Si entregamos a los estudiantes un conjunto de rectángulos de igual perímetro y un trozo de hilo con longitud igual al perímetro de los rectángulos, podrían verificar de forma concreta que todos los perímetros tienen la misma longitud (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), a pesar de que algunos se vean más largos o más anchos. Si bien podrían ver que los perímetros son iguales con el simple hecho de sumar las medidas de los lados, Marmolejo y Vega (2012) plantean que el aprendizaje de la geometría ocurre mediante la coordinación de actividades de visualización, razonamiento y construcción, como sugiere esta situación.

Con respecto al uso del trozo de hilo, es necesario que los maestros conozcan un obstáculo que se podría presentar. Algunos estudiantes pueden tener dificultades al momento de manipular el trozo de hilo, esto les impediría visualizar que todos los rectángulos son isoperimétricos (KMT, recursos materiales y virtuales). Esta situación podría provocar un obstáculo didáctico, llevando a los estudiantes a realizar una disociación entre la medida del perímetro representada por el trozo de hilo y el resultado obtenido al sumar las medidas de los lados, situación que se evidenció en la clase de Ely. Creemos que los maestros deben ser conscientes de esta limitación (KFLM, fortalezas y dificultades). Consideremos que por un lado han comprobado o podrán comprobar mediante la suma de las medidas de los lados que todos lo rectángulos tienen igual perímetro, pero al momento de demarcarlos no todos tienen la misma longitud.

El que algunos estudiantes hayan realizado una disociación nos dio evidencias de la importancia que tiene que los profesores conozcan cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para establecer definiciones apropiadas (KPM). Durante la clase se presentaron distintas definiciones para perímetro, pero ninguna hacía referencia al perímetro como medida longitudinal o a su unidad de medida; el haber presentado una definición que incorpora estas características, podría haber provocado que los estudiantes cuestionaran la disociación que estaban realizando. Ripoll (2001, p. 53) propone algunas estrategias para facilitar el aprendizaje de las matemáticas, la primera consiste en "utilizar en el lenguaje habitual del aula un vocabulario matemático que frecuentemente no se utiliza o que se sustituye por términos no precisos desde el punto de vista de la Matemática".

Para sacar un mayor provecho de esta actividad, es necesario que los maestros conozcan las oportunidades de enseñanza que nos pueden ofrecer los distintos ejemplos, al momento de asignarle el valor al perímetro de los rectángulos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Consideramos pertinente asignarle al perímetro un valor que posibilite la construcción del cuadrado y que nos permita presentar un número amplio de rectángulos; de esta forma no solo podremos trabajar la propiedad de que distintos rectángulos pueden tener igual perímetro, también podríamos abordar la propiedad de que entre los rectángulos de igual perímetro el de mayor área es el cuadrado- ver Figura 8 (KoT, propiedades y sus fundamentos). Si bien Ely trabajó con rectángulos de perímetro 36u, no consideró el cuadrado de lados 9u (Figura 2). De acuerdo con lo declarado por la maestra en la entrevista, cuadrado y rectángulos son figuras diferentes (KoT, definiciones propiedades y sus fundamentos) probablemente la elección del ejemplo realizada por la maestra estuvo determinada por su nivel de conocimiento de la clasificación de los cuadriláteros (Suffian y Abdul Rahman, 2010). En nuestra opinión sostener esta clasificación excluyente de los cuadriláteros no le permitió abordar con esta u otra actividad la propiedad de que, entre los rectángulos de igual perímetro el de mayor área es el cuadrado (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

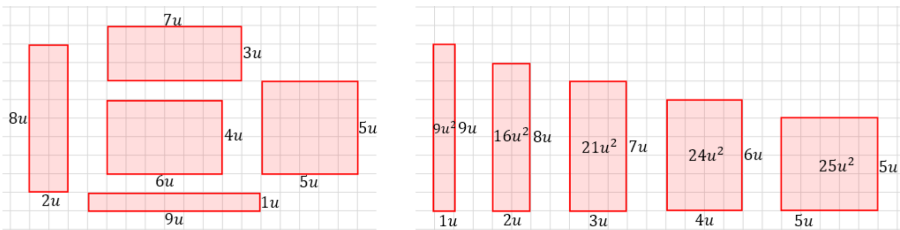


Figura 8. Ejemplo de rectángulos propuestos para potenciar la actividad.

Marchett *et al.*, (2005) concluyeron que, en algunas ocasiones, al momento de comparar las áreas prevalece el aspecto unidimensional de la figura. Es importante que los profesores sepan que algunos estudiantes tenderán a creer que el rectángulo que tenga la mayor base o la mayor altura tendrá mayor área (KFLM, fortalezas y debilidades). Esta creencia podría obstaculizar que los alumnos comprendan que diferentes rectángulos pueden tener igual área. Hemos observado en nuestro estudio que trabajar con cuadricula (KMT, recursos materiales y virtuales) puede favorecer la gestión del proceso de enseñanza al momento de abordar esta temática. Mántica, Gotte y Dal Maso (2006) han evidenciado que, si los estudiantes no cuentan con papel cuadriculado, presentan una dificultad mayor al momento de construir figuras de un área determinada, y según lo declarado por la profesora Ana, una de las ventajas que ofrece la cuadricula es que permite a los estudiantes comprobar si la cantidad de cuadrados que están dentro de la figura coinciden con el resultado obtenido al calcular el área. Esto permite a los estudiantes verificar el resultado obtenido al calcular el área de dos o más figuras, en caso de que no "creyeran" que diferentes rectángulos pueden tener igual área. Como ya hemos mencionado, en geometría el aprendizaje se produce mediante la coordinación de actividades de construcción, visualización y razonamiento (Marmolejo y Vega, 2012), idea que de alguna forma respalda el uso de la cuadricula.

Otro recurso que nos permitiría abordar esta creencia son los cuadrados de cartulinas para utilízalos como unidad de medida de área (KMT, recursos materiales y virtuales). Antes de trabajar con ellos es indispensable que los maestros conozcan las potencialidades y limitaciones que les puede ofrecer una actividad desarrollada con este recurso. Si se pide a cada estudiante que construya un rectángulo utilizando un determinado número de cuadrados, esta actividad no permitiría que visualicen que podemos tener diferentes rectángulos con igual área, situación que se observó en la clase de Ely, donde la mayoría de los estudiantes centró su atención en la construcción y análisis de su rectángulo. Pero, si los estudiantes trabajan en grupos y se le pide a cada integrante que construya un rectángulo, utilizando un determinado número de cuadrados, con la condición de que todos deben construir rectángulos diferentes, al momento de realizar el análisis podrán observar varios ejemplos, de esta forma aumentará la probabilidad de que puedan obtener una generalización de lo que están aprendiendo (Watson y Mason, 2002); podrán concluir que, independiente de las medidas del rectángulo, todos tienen la misma área ya que todos utilizaron el mismo número de cuadrados para su construcción. Esta situación se pudo observar en el aula de Ely, en cuyo caso, al acercarse la maestra a dos alumnas que compartían mesa y preguntarles ¿cuál de las dos había construido un rectángulo más grande? (haciendo referencia al área), ambas respondieron que eran iguales porque trabajaron con la misma cantidad de cuadrados.

Mántica, Gotte y Dal Maso (2006) plantean que el hecho de que dos figuras tengan la misma área induce a los estudiantes a creer que tendrán igual perímetro. Es importante que los profesores conozcan estas creencias que podrían tener algunos estudiantes (KFLM, fortalezas y dificultades). Si los estudiantes ya han interiorizado que todos los rectángulos construidos tienen la misma área, bastaría con desarrollar una actividad que permitiera analizar los perímetros de los rectángulos para que visualizase que igualdad de área no implica igualdad de perímetro (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Consideramos que trabajar con un área de 36 cuadrados sería apropiado, ya que nos permitiría construir 5 rectángulos diferentes 1x36; 2x18; 3x12; 4x8 y 6x6, incluyendo un cuadrado, siguiendo la idea de Dienes (2001) (citado por Goldenberg y Mason, 2008: 186) en relación con el número de ejemplos que necesitan los estudiantes para tener una idea de un concepto. Otros números que se podrían considerar para establecer la medida del área, el 60, permite un rectángulo más, pero no permite la construcción del cuadrado; los números 49 y 81 permiten la construcción del cuadrado, pero solo se pueden construir 2 y 3 rectángulos respectivamente; el 100 permite la construcción del cuadrado y también, se pueden hacer 5 rectángulos diferentes, pero debemos considerar que trabajar con muchos cuadrados como unidad de área, puede dificultar el aprendizaje, transformado el recurso en un distractor (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). El trabajar con los 5 rectángulos que se pueden construir con los 36 cuadrados, nos permite generar la instancia para que los estudiantes visualicen que de todos los rectángulos de igual área, el de menor perímetro será el cuadrado- ver Figura 9 (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

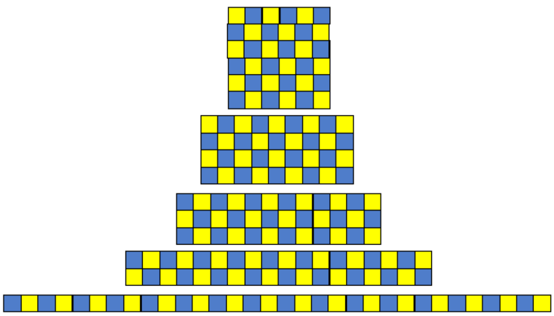


Figura 9. Rectángulos propuestos para potenciar la actividad.

D'Amore y Fandiño (2007) concluyeron que los obstáculos que se oponen a la correcta construcción del conocimiento sobre la relación área-perímetro no son solo de naturaleza epistemológica, sino que son básicamente de naturaleza didáctica. Es necesario que los maestros conozcan la pertinencia de las distintas actividades que realizan. Si bien ninguna de las actividades tenía como propósito central analizar cómo se comportan el área y el perímetro al momento de realizar variaciones en alguna de las medidas del rectángulo, durante la clase de Ely se generaron algunas instancias que permitieron a los estudiantes construir conocimiento en relación con esta temática. Esto ocurrió cuando la profesora le pidió a los estudiantes que trasformaran el rectángulo que habían construido con los 36 cuadrados, uno de 9x4, cuyo perímetro era de 26, en uno de perímetro 36. Baltar y Comiti (1993) plantean que, actividades similares a la desarrollada por la maestra, posiblemente dan origen a la idea errónea de que área y perímetro varían de la misma forma, ya que los estudiantes tienden a aumentar el área para lograr que crezca el perímetro. Lo que concuerda con lo observado en la clase de Ely, aumentaron el área para obtener un perímetro de 36u y concluyeron que el área aumenta si el perímetro aumenta, conclusión aceptada por la maestra (KoT, definiciones propiedades y sus fundamentos) y por un gran número de estudiantes para profesor (Blanco, 1996).

Hemos pretendido con nuestro trabajo poner de manifiesto, y al alcance de toda la comunidad educativa, especialmente de formadores de maestros y estudiantes para maestros, aquellos elementos claves que observamos en nuestro estudio de casos y que consideramos que podrían favorecer la gestión del proceso de enseñanza de las relaciones área y perímetro. MTSK se ha mostrado relevante como instrumento de análisis que, nos ha permitido organizar el conocimiento puesto en juego en el aula y discutir acerca de conocimientos que permitiría una gestión alternativa a la analizada. Estamos convencidos que existen otros conocimientos que también serán clave en este proceso, como la literatura ya lo ha demostrado. Una posible continuidad de este estudio, sería realizar esta investigación con profesores expertos, enriqueciendo así el elenco de conocimientos esenciales para una gestión eficaz de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las relaciones estudiadas.

AGRADECIMIENTOS

El Gobierno de España (EDU2013-44047-P y EDU2016-81994-REDT), y el centro de investigación COIDESO (Universidad de Huelva, España) apoyan esta investigación.

REFERENCIAS

Ball, D.L. y Bass, H. (2002). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. En *Proceedings of Annual Meeting of Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). CMESG.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Conocimiento del contenido para la enseñanza: ¿Qué lo hace especial? *Revista de formación docente, 59*(5), 389-407.

Baltar, P. y Comiti, C. (1993). Difficultes rencontrees par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/perimetre pour des rectangles. *Petit, 34*, 5-29.

Blanco, L. (1996). Aprender a enseñzar geometría. Una experiencia en la formación del profesorado. *Épsilon, 34*, 47-58.

Carbajosa, D. (2011). Debate desde paradigmas en la evaluación educativa. *Perfiles Educativos, 33*(132), 181-190.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores, E., Escudero, D., ... Muñoz, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Contreras, L.C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Comares.

Ceballos-Herrera, F. A. (2009). El informe de investigación con estudio de casos. Magis. *Revista Internacional de Investigación en Educación*, *1*(2), 413-423.

D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*, 39-68.

Durán, M. M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista nacional de administración, 3*(1), 121-134.

Escudero-Ávila, D., Contreras, L.C., y Vasco, D. (2016). Conocimiento de la enseñanza de la matemáticas (KMT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 35-41). SGSE.

Escudero-Ávila, D., Climent, N., y Vasco, D. (2016). Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KLFM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes

(Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp.42-48). SGSE.

Escudero-Domínguez, A., Joglar, N., Corrêa, D., y Reyes, A. (2016). Retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 69-86). SGSE.

Escudero-Domínguez D. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 49-54). SGSE.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). SGSE.

Garcia, G. y Carrillo, J. (2006). Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones. *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 185-194). Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Goldenberg, P. y Mason, J. (2008). Arrojando luz sobre y con espacios de ejemplo. *Estudios educativos en matemáticas, 69*(2), 183-194.

Gómez, T. y Vásquez, K. (2015). Área y perímetro de cuadriláteros en estudiantes colombianos de. En P. Scott, y Á. Ruiz (Ed.), *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* (pp. 1-9). CIAEM.

Liñan, M. M., Contreras, L.C. y Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12 -20). SGSE.

Liñan, M. M.. (2017). Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Huelva.

López, W. (2013). El estudio de casos: una vertiente para la investigación educativa. *Educere, 17*(56), 139-144

Mántica, A., Gotte, M., y Dal Maso, M. (2006). Una propuesta para el tratamiento del concepto de área en EGB. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 108-114.

Marchett, P., Medici, D., Vighi, P., y Zaccomer, E. (2005). Comparing perimeters and areas. Childrens preconceptions and spontaneous procedures. En Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 766–776). FUNDEMI IQS. Universitat Ramon Llull.

Marmolejo, G. y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática, 24*(3), 7-32.

Marmolejo, G., Sánchez, N., y Londoño, S. (2017). Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 12*(2), 18-28.

Martínez, M. y Pardo, S. (2017). Concepciones de estudiantes de educación básica sobre perímetro y área. *Eco matemático, 8*(1), 71-80.

MINEDUC. (2013). *Programa de estudio. Quinto año Básico.* Ministerio de Educación.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 403-410). SEIEM.

Montes, M.A. y Climent, N., (2016). Conocimiento de la estructura matemática (KSM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 21 -29). SGSE.

Montserrat, D. N., Boqué, M. y Pañellas, M. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro. *International Journal of Developmental and Educational Psychology. Revista INFAD de Psicología. 1*(1), 419-430.

Pochulu, M. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Colección Digital Eudoxus, 8*.

Popoca, M. y Acuña, C. (2011). Cambio en figuras de área igual, conservación y relaciones figurales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 24*, 541-550.

Ripoll, M. (2001). Algunas estrategias para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 45*, 53-60.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 39-63.

Schoenfeld, AH (2010). *Cómo pensamos: una teoría de la toma de decisiones orientada a objetivos y sus aplicaciones educativas*. Routledge.

Shulman, L. (1986). Aquellos que entienden. El crecimiento del conocimiento en la enseñanza. *Investigador Educativo, 15*(2), 4.14.

Sosa, L., Contreras, L.C., Gómez, I., Flores, E., y Montes, M. (2017). Síntesis, problemas abiertos, preguntas para reflexión. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK:* (pp. 71-79). CGSE.

Suffian, H., y Abdul Rahman, S. (2010). Teacher's choice and use of examples in the teaching and learning of mathematics in primary school and their relations to teacher's pedagogical content knowledge (PCK). *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 8*(5), 312-316.

Vain, P. D. (2012). El enfoque interpretativo en investigación educativa: algunas consideraciones teórico-metodológicas. *Revista de Educación, 4*(4), 37-45.

Watson, A. y Mason, J. (2002). Ampliación de espacios de ejemplo como estrategia de aprendizaje / enseñanza en matemáticas. En A. Cockburn, y E. Nardi (Eds.), *Actas de la 26ª Conferencia del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática*, Volumen 4 (pp. 377–385). Universidad de East Anglia.

Hugo César Cayo Maturana

Dirección: Departamento de Educación, Universidad de Antofagasta, Chile, 02800

Teléfono: +56975282898, +34644820370

 DOI: 10.24844/EM3202.03

Prácticas evaluativas y significados evaluados por profesores del bachillerato mexicano sobre la noción de ecuación lineal

Evaluative practices and meanings evaluated by the Mexican high school teachers on the notion of linear equation

Raúl Alonso Ramírez Escobar[1]
Silvia Elena Ibarra Olmos[2]
Luis Roberto Pino-Fan[3]

Resumen: La evaluación del aprendizaje es un proceso que teóricamente debe contribuir en la formación de los estudiantes y en la mejora de las prácticas docentes, posicionándose con el paso del tiempo como uno de los procesos más complejos en el ámbito educativo. Esta es quizá una de las razones por las que poco se ha avanzado en su desarrollo, particularmente en el caso de la Educación Matemática. Con la intención de conocer más sobre dicho proceso, el propósito de esta investigación fue caracterizar las prácticas didáctico-matemáticas que, sobre evaluación del aprendizaje, manifiestan profesores de bachillerato en México cuando enseñan la noción de ecuación lineal. Al mismo tiempo, se indagó respecto a los significados efectivamente evaluados sobre dicha noción matemática. Los resultados evidencian que factores tales como: el currículo nacional, normativas institucionales, así como la formación y el conocimiento de los profesores sobre el tema matemático en cuestión y la correspondiente evaluación

Fecha de recepción: 26 de diciembre de 2017. **Fecha de aceptación:** 28 de enero de 2019

[1] Departamento de Ciencias Básicas. Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Nogales, raul.re@nogales.tecnm.mx, orcid.org/0000-0002-6280-0957.

[2] Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora, México, sibarra@mat.uson.mx, orcid.org/0000-0002-1344-2516.

[3] Departamento de Ciencias Exactas. Universidad de Los Lagos, Chile, luis.pino@ulagos.cl, orcid.org/0000-0003-4060-7408.

de su aprendizaje, inciden directamente en las prácticas evaluativas de los profesores y en los significados que evalúan.

Palabras clave: *evaluación del aprendizaje, ecuación lineal, significados del objeto matemático, bachillerato.*

Abstract: The evaluation of learning is a process that theoretically should contribute to the formation of students and the improvement of teaching practices, positioning itself over time as one of the most complex processes in the field of education. This is perhaps one of the reasons why little progress has been made in its development, particularly in the case of Mathematics Education. With the intention of knowing more about this process, the purpose of this research was to characterize the didactic-mathematical practices that, on assessment of learning, manifest high school teachers in Mexico when they teach the notion of linear equation. At the same time, we inquired about the meanings evaluated on this mathematical notion. The results show that factors such as the national curriculum, institutional regulations, as well as the training and knowledge of teachers on the subject in question and the corresponding evaluation of their learning, directly affect the evaluative practices of teachers and meanings that evaluate.

Keywords: *evaluation of learning, linear equation, meanings of mathematical object, baccalaureate.*

1. ANTECEDENTES

La literatura sobre evaluación educativa pone de manifiesto que actualmente la evaluación del aprendizaje está considerada una parte importante del proceso de instrucción, pues proporciona información para mejorar la práctica docente, incidiendo directamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, las tareas, los materiales, la organización, la planificación, etc., así como sobre el progreso de los alumnos hacia los objetivos de aprendizaje (Moya, 2001; Wormeli, 2006; De Vincenzi y De Angelis, 2008; Harlen, 2012; Moreno, 2012).

No obstante, diversos autores (e.g., Webb, 1992; NCTM, 2000; Calderón y Deiros, 2003; Becerra y Moya, 2008; Hernández, 2013; Álvarez y Blanco, 2014;

Dolores y García, 2016) señalan que en la evaluación del aprendizaje en matemáticas sigue prevaleciendo una práctica evaluativa centrada, fundamentalmente, en la aplicación de exámenes escritos de formatos cerrados que sancionan o certifican lo que, supuestamente, el estudiante debió aprender. En dichos exámenes se valora el conocimiento matemático aprendido restringiéndolo a la reproducción de definiciones, conceptos y algoritmos; en estos términos la evaluación realizada no garantiza al estudiante un avance productivo, toda vez que debería involucrar aprendizajes, enseñanza, acción docente, currículo y aspectos institucionales, entre otros elementos. De acuerdo con Goñi (2008), difícilmente se avanzará hacia una enseñanza más eficaz de la matemática si no se modifican las prácticas de evaluación.

En el caso del bachillerato, nivel educativo que cuenta desde 2008 con un Marco Curricular Común a través del cual se promueve un modelo de Educación Basada en Competencias (EBC), en México se han implementado una serie de acciones orientadas a establecer una nueva visión sobre la evaluación del aprendizaje. En documentos oficiales, lineamientos y acuerdos secretariales, se establecen consideraciones sobre la manera en que los profesores deben llevar a cabo el proceso de evaluación del aprendizaje en sus aulas, así como sugerencias para el posible uso e implementación de diferentes instrumentos de evaluación. Sin embargo, la información presentada en tales documentos es muy genérica, pues no se hacen explícitos ni se distinguen planteamientos relacionados con el área de matemáticas.

Los profesores de matemáticas, como representantes de su institución, deben establecer una estrategia para llevar a cabo la evaluación del aprendizaje de sus estudiantes, apoyados en el programa oficial de la asignatura (currículo). Entonces, dicho sistema de prácticas evaluativas podría estar siendo influenciado por normas institucionales e incluso por sus propias creencias y concepciones sobre la evaluación (Dolores y García, 2017).

En este contexto, este documento tiene por objetivo presentar los resultados de un estudio llevado a cabo para explorar el tipo de prácticas evaluativas e instrumentos que utilizan los profesores de bachillerato en México, al evaluar la noción de ecuación lineal. Además, se indagan los significados de dicha noción que son efectivamente evaluados con tales prácticas.

En el siguiente apartado se presentan las nociones teóricas que sustentan el estudio y que permitieron efectuar los análisis correspondientes. Posteriormente se señala la metodología seguida en cada una de las etapas de esta investigación. En el tercer apartado se presentan los resultados obtenidos a partir del estudio sobre los diferentes significados, es decir, los significados pretendidos por el currículo de los dos diferentes subsistemas de bachillerato en los que laboran los profesores bajo estudio, así como los significados pretendidos, implementados y evaluados por dichos profesores. Finalmente se presenta una reflexión sobre la representatividad del significado holístico de la ecuación lineal en los significados señalados en el apartado anterior.

2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico empleado en esta investigación fue el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font 2007), el cual consiste en una teoría inclusiva que proporciona herramientas para el análisis didáctico de procesos de instrucción matemática. A continuación se describen las herramientas que fueron utilizadas.

Dentro del EOS, la noción de *sistema de prácticas* es fundamental desde un punto de vista epistemológico y didáctico, pues se refiere a “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 127). Estas prácticas pueden ser desarrolladas por una persona o compartidas por una institución. El sistema de prácticas operativas y discursivas que realiza una persona para resolver un determinado campo de problemas (del cual emerge el objeto matemático en cuestión), constituye el significado personal de dicho objeto matemático. Si el sistema de prácticas es realizado por una institución (conjunto de personas inmersas en una misma clase de situaciones-problemas), éste constituirá el significado institucional de dicho objeto (Godino y Batanero, 1994).

Con relación a los significados institucionales, el EOS propone los siguientes tipos: a) implementado, sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente; b) evaluado, subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes; c) pretendido, sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso enseñanza-aprendizaje; y d) referencial, sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido (por ejemplo, las descritas en el currículo). De acuerdo con Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013, p. 147), “en una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático”. Asimismo, el EOS también propone considerar los siguientes tipos de significados personales: a) global, la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar el sujeto relativas a un objeto matemático; b) declarado, prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional; c) logrado, prácticas manifestadas conforme a las pautas institucionales.

Este enfoque teórico considera a los objetos matemáticos como entidades intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas realizadas al resolver un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994). En ese sentido, cuando un individuo ejecuta una práctica matemática, activa un conglomerado formado por seis tipos de objetos matemáticos primarios (situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), los cuales conforman una *configuración ontosemiótica* (Godino, Batanero y Font, 2007; Pino-Fan, Godino y Font, 2015). Esta configuración ontosemiótica puede verse desde una perspectiva epistémica (si la configuración está asociada a las prácticas matemáticas desarrolladas por una institución o representante de la misma) o cognitiva (si la configuración está asociada a las prácticas matemáticas desarrollada por un estudiante a propósito de la solución de un problema).

Tal como señala Pino-Fan (2014, p. 347), "el modelo ontológico y epistemológico propuesto por el EOS revela la complejidad inherente a los significados (conocimientos) institucionales y personales que se ponen en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". En este sentido, en cierta forma, el objetivo de los profesores en un proceso de enseñanza-aprendizaje debería ser el cautelar: que las configuraciones cognitivas (que movilizan los estudiantes en sus prácticas matemáticas) se adapten progresivamente a las configuraciones epistémicas (que moviliza el profesor en su práctica de enseñanza). Consecuentemente, se puede decir que en el EOS se entiende la evaluación desde un punto de vista formativo y, que refiere al proceso de observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes. En este sentido, aunque actualmente en el EOS no se tiene una definición explícita sobre lo que significa la evaluación, para efectos de este estudio entenderemos que la *evaluación* refiere al proceso de negociación de significados (de un objeto matemático) que realiza el profesor con sus estudiantes y, cuyo objetivo fundamental es lograr un acoplamiento progresivo entre las configuraciones ontosemióticas cognitivas que ponen en juego los estudiantes en sus prácticas matemáticas y las configuraciones ontosemióticas epistémicas que pone en juego el profesor en su práctica de planificación e implementación (significados pretendidos e implementados).

En este estudio se asumió la posible presencia de prácticas evaluativas en dos direcciones: durante el proceso (evaluación formativa), y al cierre del proceso (sumativa). La evaluación sumativa se entenderá en términos de lo señalado por Casanova (2007), como el tipo de evaluación que orienta a verificar el cumplimiento de los objetivos y estándares previamente determinados en el programa, lo que permite, además, cumplir con la función de control y acreditación del aprendizaje. Casanova (2007) describe que la evaluación formativa cumple una función reguladora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, lo cual permite llevar a cabo ajustes y adaptaciones progresivas durante el curso porque se centra, más que en los resultados del aprendizaje, en los procesos que se ponen en juego para el logro de tales resultados. Así también, la evaluación formativa requiere que el profesor y el estudiante manifiesten una comprensión compartida de los objetivos del aprendizaje (Shepard, 2000; Stiggins, 2001).

Para el análisis de los procesos instruccionales se utilizaron las nociones de *configuración ontosemiótica epistémica* y *trayectoria epistémica* (Godino, Contreras y Font, 2006). En cada caso identificando la red de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas institucionales, esto es, cómo van apareciendo y relacionándose estos objetos matemáticos primarios. El conjunto de configuraciones epistémicas, secuenciadas en el tiempo didáctico, conforma la trayectoria epistémica. Otra herramienta teórico-metodológica del EOS que fue clave para sustentar la investigación, fue la noción de *trayectoria docente*, entendida como la secuencia de actividades que va efectuando el profesor durante un proceso de enseñanza-aprendizaje. El segmento de la trayectoria docente, referida al accionar del docente tanto antes como durante y después de conducir un proceso de enseñanza-aprendizaje, alrededor de una situación-problema, se denomina *configuración docente* (Godino, Contreras y Font, 2006). En dichas trayectorias es posible clasificar cada una de las acciones docentes según su función, es decir: planificación, motivación, asignación, regulación, evaluación e investigación.

3. METODOLOGÍA

El estudio se realizó bajo el paradigma de investigación cualitativa (Sandín, 2003). Esta metodología permitió realizar "descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables, incorporando la voz de los participantes, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones tal y como son expresados por ellos mismos" (*Ibíd.*, p. 20).

La investigación se llevó a cabo en dos grandes etapas, cada una de las cuales siguió una estrategia metodológica integrada por diferentes fases. En la primera, se empleó la revisión documental de programas de asignatura y documentos oficiales, complementarios a dichos programas, en los cuales se establecen lineamientos para el tratamiento y la evaluación del aprendizaje del tema matemático bajo estudio. En la segunda, mediante un estudio de caso (Sandín, 2003), se analizaron los sistemas de prácticas que dos profesores en un periodo de ocho a nueve sesiones (tiempo dedicado al tema de las ecuaciones lineales) pusieron de manifiesto antes y durante el desarrollo del tema en el salón de clases, así como en sus planeaciones didácticas, materiales de apoyo e instrumentos de evaluación utilizados.

Se realizó una selección de maestros a partir de un proceso de indagación basado en la aplicación de cuestionarios, dirigidos a un conjunto de profesores de álgebra en activo del estado de Sonora, México. Interesaba conocer su formación didáctico-disciplinar, su experiencia docente, sus prácticas e instrumentos habituales de evaluación, así como el impacto de la reforma curricular vigente en su práctica. De este conjunto, se eligieron dos profesores, cada uno de los cuales era perteneciente a uno de los dos subsistemas de bachillerato con mayor cobertura en México (bachillerato general y tecnológico), según la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS, 2016). Los profesores serán identificados como "profesor A" (asociado al bachillerato tecnológico), y "profesor B" (asociado al bachillerato general).

Las técnicas empleadas para la recolección de datos fueron la entrevista y la observación no participante de la actividad docente de los profesores. Además, se requirieron instrumentos para el registro de la información, tales como cuadros sinópticos, cuestionarios, guion para la entrevista semiestructurada y un formato para el registro de lo observado; éstos fueron diseñados de acuerdo a los constructos teóricos del EOS. La Tabla 1 presenta un resumen de las acciones metodológicas e instrumentos de investigación antes mencionados.

Tabla 1. Acciones e instrumentos de investigación y su relación con el marco teórico del EOS.

Instrumento	Propósitos del análisis ontosemiótico de la información generada por el instrumento	Con este análisis se construyó
Cuadro sinóptico	Identificar el sistema de prácticas promovido para las ecuaciones lineales desde los programas oficiales de álgebra de dos subsistemas del bachillerato mexicano.	Significado pretendido por el currículo del bachillerato mexicano (*Referencial*)
	Identificar las prácticas docentes e instrumentos promovidos en los programas de materia y documentos oficiales (complementarios al programa) de dos subsistemas de bachillerato, con respecto a la evaluación del aprendizaje de la noción de ecuación lineal.	
	Identificar los sistemas de prácticas pretendidos con respecto a las ecuaciones lineales en los materiales de apoyo (libros de texto diseñados) para desarrollar el curso y en las planeaciones didácticas elaboradas por los sujetos de estudio.	Significado pretendido por los profesores
Cuestionario y guion de entrevista	Identificar a través del discurso de los sujetos de estudio, las prácticas pretendidas para el abordaje de las ecuaciones lineales y la evaluación de su aprendizaje. Esto previo a su práctica áulica.	
Protocolo de observación	Construir y analizar las trayectorias epistémicas y docentes evidenciadas durante la práctica operativa de los profesores, a partir del proceso de observación llevado a cabo en sus aulas.	Significado implementado
	Identificar los sistemas de prácticas puestas de manifiesto por los profesores al evaluar los aprendizajes de la noción de ecuación lineal en el bachillerato; colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes, así como de los instrumentos o materiales utilizados.	Significado evaluado

A continuación, se presenta el análisis de la información generada en cada una de las fases de la investigación, con lo cual se lograron caracterizar los significados institucionales de la noción de ecuación lineal.

4. SIGNIFICADOS DE REFERENCIA DE LA ECUACIÓN LINEAL

En esta sección se describe la caracterización realizada sobre los significados de referencia de la noción de ecuación lineal: a) significado holístico, a partir de un estudio de tipo histórico-documental y; b) significado pretendido por el currículo, a partir del análisis de los programas de estudio y propuestas oficiales.

4.1. Significado holístico de referencia de la ecuación lineal

Considerando el interés por determinar cuáles son los significados pretendidos, implementados y efectivamente evaluados por los profesores respecto de la ecuación lineal, fue necesario identificar y establecer (al menos de manera general) cuáles son los significados que ha ido adquiriendo dicha noción a lo largo de la historia; es decir, sus usos y las diversas formas de ver y de entender a la ecuación lineal con el paso del tiempo.

Dichos significados pueden considerarse como un acercamiento al significado global de referencia de dicho objeto matemático. De acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2011):

> El significado global de referencia se define a partir de dos nociones: significado global (también denominado significado holístico u holosignificado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático) y significado de referencia (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio). (p. 147)

La revisión de trabajos de carácter histórico-epistemológico del álgebra, y en particular sobre la noción de ecuación lineal, permitió determinar siete significados parciales como propuesta del significado global de referencia para esta noción matemática. Se presentan de forma sucinta, y tienen el propósito de hacer contrastes entre los significados pretendidos por el currículo, y el pretendido, implementado y evaluado por los profesores, para así poder establecer algunas conclusiones al respecto:

La ecuación lineal como medio para la deducción de valores desconocidos. Esta acepción tiene origen desde las matemáticas babilonias (2000 a.C.-600 a.C.), donde a través de tablillas de barro y con los egipcios (2000 a.C.-1800 a.C.) en sus papiros, quedaron registrados problemas que tratan de la búsqueda de valores o cantidades desconocidas sobre situaciones de comercio, herencias, división de propiedades, peso de las cosas, etc., resueltas por el “método de la falsa posición” (Guelli, 1989).

La ecuación lineal como representación de la relación entre magnitudes geométricas. Esta acepción fue considerada por las aportaciones de los griegos (300 a.C.-300 d.C.), quienes desarrollaron estudios y manipulaciones sobre el uso de las ecuaciones lineales en situaciones relacionadas con la geometría y la medición de magnitudes, formas y segmentos (Dalcín y Olave, 2007), así como para construir templos (Boyer, 1968).

La ecuación lineal como relación de proporcionalidad. Esta acepción de ecuación lineal se consideró debido a que, por ejemplo, en el *Papiro de Rhind* (s. XVII a.C.) se encontraron problemas referentes a intercambios de mercancías o repartos proporcionales. También aparecen estos tipos de problemas en textos chinos del siglo II a.C. (Cullen, 2007), y en textos hindúes (Patwardan *et al*., 2001).

La ecuación lineal como modelo lineal. Diofanto marcó la modelación de problemas prácticos a través de ecuaciones de difícil deducción, mostrando sus soluciones. Una de sus características fue dar única solución a las ecuaciones, lo que se explica debido a que él buscaba resolver los problemas, no las ecuaciones planteadas. Las soluciones eran números racionales exactos y positivos, a diferencia de los babilónicos que aceptaban aproximaciones irracionales como soluciones a las ecuaciones (Puig, 2006).

La ecuación lineal como la recta en su representación gráfica. Desde la antigüedad, el estudio de las ecuaciones lineales presentó una fuerte relación con situaciones gráficas y geométricas, siendo habitual que a una letra se le designara para representar una magnitud o un objeto, un punto o una recta (Bashmakova y Smirnova, 2000). Los trabajos desarrollados por Viète, Fermat y Descartes, con base en los Elementos de Euclides, presentaron cálculos y construcciones geométricas, así como argumentos involucrando a las ecuaciones lineales (Millán, 2004). Además, según Gulikers y Blom (2001), la idea de línea recta es uno de los conceptos de la geometría que fueron estudiados con mayor profundidad por los griegos.

La ecuación lineal como relación funcional. Esta acepción se consideró ya que Collete (1998) expresa que la representación analítica de la recta es denominada función lineal. Así también Smith y Col (2001) expresan que una función lineal es una cuyo dominio son todos los números reales, cuyo codominio también todos los números reales, y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado. La función lineal se define por la ecuación $f(x) = mx + b$ (o

$y = mx + b$) llamada ecuación canónica. Mencionan que una función es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y, donde a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

La ecuación lineal como expresión analítica. Esta última acepción se determinó con base en el comienzo de una llamada "verdadera teoría de ecuaciones", la cual se atribuye generalmente a Viète (Ribnikov, 1987). Posteriormente, Euler llamó al álgebra teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases", donde los conceptos y procedimientos estaban en función de cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones. Según Smith (2001), una de las formas representativas actuales de una ecuación lineal, es la expresión $ax + b = c$, donde a,b y $c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$.

Los siete significados parciales expuestos aquí serán retomados en las siguientes secciones, pues permitieron realizar los contrastes pertinentes en los análisis de significados movilizados por los profesores, tal como se mostrará más adelante.

4.2. Significado pretendido por el currículo de bachillerato

Considerando que uno de los objetivos del estudio fue identificar y caracterizar los sistemas de prácticas promovidos para la noción de ecuación lineal, desde los programas oficiales de álgebra, en dos subsistemas del bachillerato mexicano –tecnológico y general–, se seleccionó al programa oficial del curso como base del significado curricular, ya que según Ibarra (2008), éste contiene la posición institucional de un centro de enseñanza, es el documento que se entrega a un profesor cuando se le asigna la tarea de impartir un curso, y contiene la información de los qué, cómo, en cuánto tiempo, para qué, por qué, etcétera.

Otras fuentes consideradas fueron los documentos oficiales, lineamientos y acuerdos secretariales, que han sido publicados para apuntalar el enfoque de EBC. Dichos documentos fueron seleccionados puesto que, además de ser representativos para los diferentes subsistemas de EMS, en ellos se establecen sugerencias y consideraciones sobre la manera en la que los profesores deben llevar a cabo el proceso de evaluación del aprendizaje en sus aulas, incluyendo el uso de diferentes instrumentos para efectuar esta tarea.

4.3 Significado pretendido por el bachillerato tecnológico

La construcción de este significado requirió del análisis de los siguientes documentos: 1) Programa oficial del curso de Álgebra (SEMS, 2013), Unidad 2 "Desarrolla productos notables y viceversa (factorización). Utiliza las propiedades de la igualdad en la resolución de problemas cotidianos que generen ecuaciones de primer grado con una incógnita" (p. 16); 2) ACUERDO número 8/CD/2009 del Comité Directivo del Sistema Nacional de Bachillerato. Orientaciones sobre la evaluación del aprendizaje bajo un enfoque de competencias (SNB, 2009, p. 2); 3) Acuerdo Secretarial 653 (SEP, 2013) por el que se establece el Plan de Estudios del Bachillerato Tecnológico.

El primer significado identificado en el programa oficial del curso de Álgebra para este tipo de bachillerato fue el de ecuación lineal como *expresión analítica*, pues se declara que el profesor inicie con la presentación del concepto de ecuación, a través de la asociación entre el concepto de igualdad y expresión algebraica, formando con ello el concepto de "igualdad algebraica" con el cual se formaliza el concepto de ecuación. Se prescribe que también se identifiquen los elementos que componen a una ecuación (como el signo igual, incógnita y/o variable, miembros, términos, así como el grado absoluto de la ecuación), para con ellos establecer el concepto de ecuación lineal.

La acepción de ecuación como *expresión analítica* se mantiene vigente, pues el programa declara que dentro de los sistemas de prácticas que se deben promover está el uso de las propiedades de la igualdad para resolver situaciones-problema en contextos que sean familiares y atractivos para los estudiantes. Se promueve la construcción de modelos lineales que permitan representar la situación-problema y, a su vez, llegar a la solución de ésta; con ello se considera la presencia de la acepción de ecuación lineal como *modelo lineal*.

Nuevamente la acepción de ecuación lineal como *expresión analítica* se pone de manifiesto cuando, en relación con las propiedades de la igualdad, también se prescribe que sean utilizadas para promover los despejes entre variables. Para la conclusión del tema se prescribe el planteamiento de situaciones-problema también en contexto intra-matemático, a través de los cuales se promueva la resolución y evaluación de ecuaciones lineales de dos incógnitas, para así terminar con la construcción de gráficas. En ese sentido, se muestran indicios de la promoción de las acepciones de ecuación lineal como *relación funcional* y el de *la recta como su representación gráfica*. Para esta última acepción se sugiere la promoción de técnicas para llevar a cabo dichas construcciones, partiendo de la ecuación en su forma analítica, después tabular y finalmente graficar, a través de una serie de puntos.

Respecto a la propuesta institucional para la evaluación del aprendizaje de las ecuaciones lineales, fue posible identificar que las prácticas promovidas se centran en verificar la resolución correcta de las situaciones-problema, principalmente en contexto intra-matemático, así como en el cumplimiento y participación dentro de las tareas matemáticas planteadas. Además, se recomienda llevar a cabo tres tipos de evaluación: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. Los instrumentos que se sugieren para ello son cuestionarios, listas de cotejo, pruebas escritas, guías de observación, cuadros comparativos, matriz de clasificación, registro de competencias, rúbricas y escala de valores.

4.4 Significado pretendido por el bachillerato general

Para la construcción de este significado, se consideraron los siguientes documentos: 1) Programa oficial del curso de Matemáticas 1 (DGB, 2014), Bloque VI: "Resuelves Ecuaciones Lineales I" (p. 33-36); 2) ACUERDO número 8/CD/2009 del Comité Directivo del Sistema Nacional de Bachillerato. Orientaciones sobre la evaluación del aprendizaje bajo un enfoque de competencias (SNB, 2009) y Lineamientos de evaluación del aprendizaje en la educación media superior (DGB, 2011, p. 9-11).

En el programa oficial se identificó la presencia de la acepción de *ecuación lineal como expresión analítica*, a través de un sistema de prácticas en el que se promueve que el profesor de a conocer de forma breve las características y propiedades de las ecuaciones lineales, así como los conceptos y definiciones asociados a esta noción. Posteriormente se sugiere continuar con la presentación de las diferentes técnicas y/o procedimientos que serán promovidos para el proceso de resolución de las ecuaciones lineales planteadas.

Asimismo, la acepción de ecuación lineal como *relación funcional* se exhibe cuando se plantea que es necesario que el profesor lleve a cabo acciones que permitan describir e identificar cuál es el comportamiento que tienen las variables y las soluciones obtenidas al resolver problemas sobre ecuaciones y/o funciones lineales en situaciones-problema en contexto intra-matemático. El lenguaje predominante es el algebraico, tanto para llevar a cabo los procedimientos de resolución, como para la comprobación y validación de las soluciones obtenidas. Sin embargo, también se hace explícita la sugerencia de promover los lenguajes de tipo numérico, tabular y gráfico para la representación de funciones lineales.

Por otra parte, se sugieren técnicas para la resolución de situaciones-problema que pueden llegar a ser modeladas por medio de una ecuación lineal. El programa de estudios propone algunos contextos extra-matemáticos, tales como mezclas, movimiento rectilíneo uniforme, palancas, entre otros. En ese sentido, la acepción de ecuación lineal como *modelo lineal* también es promovida. Se prescribe también que el profesor incentive la construcción de gráficas mediante procedimientos tales como análisis de la recta y sus intersecciones con los ejes, pendiente-ordenada al origen y tabulación, con lo cual se identifica el interés en que aparezca el significado de ecuación lineal como *la recta en su representación gráfica*, usándola además para comprobar e interpretar las soluciones obtenidas.

También se identificó la presencia de la acepción de ecuación lineal como *representación de la relación entre magnitudes geométricas*, ya que otro de los aspectos que se plantean en el currículo, pone de manifiesto que el sistema de prácticas del profesor debe estar orientado a la construcción e interpretación de la ecuación y/o función lineal, mediante el desarrollo de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales. Para ello, el currículo sugiere que también se promueva la comprensión y análisis de situaciones-problema en contexto extra-matemático, que estén asociadas con el entorno del estudiante.

En cuanto a la propuesta institucional del bachillerato general para la evaluación del aprendizaje de las ecuaciones lineales, se indica el planteamiento de situaciones-problema en las que se valore el progreso del estudiante a través de prácticas que pongan en juego los diferentes objetos matemáticos primarios, así como el desarrollo de competencias tanto genéricas como disciplinares. Algunas de las acciones o procesos que son promovidos y susceptibles de ser evaluados, son la resolución de problemas, la interpretación y validación de soluciones obtenidas, la argumentación de los procedimientos realizados y soluciones obtenidas, el manejo y diseño de tablas y gráficos, la modelación de situaciones-problema que involucren el uso de ecuaciones lineales y el manejo de diferentes lenguajes y sus diversos tipos de representación. Los instrumentos sugeridos para ello son: listas de cotejo, escalas de clasificación, problemarios resueltos y portafolios de evidencias.

5. SIGNIFICADOS DE LA ECUACIÓN LINEAL PRETENDIDOS POR LOS PROFESORES

El significado pretendido por los profesores, de acuerdo con el EOS, se conforma por el sistema de prácticas operativas y discursivas que ponen en juego en la planificación de sus clases, tomando como base un significado de referencia (en este caso el pretendido por el currículo oficial). Para los fines de esta investigación, fue necesario caracterizar el significado pretendido por cada profesor, ya que las situaciones y los contextos en los cuales planifican sus clases son distintos. A continuación se describen los análisis sobre los significados pretendidos por los profesores A (bachillerato tecnológico) y B (bachillerato general). Cabe señalar que además de sus planificaciones, para complementar dicha caracterización se diseñaron e implementaron un cuestionario y una entrevista semiestructurada.

5.1. Significados pretendidos por el profesor A

En los hechos el profesor A no desarrolló una planeación didáctica del curso, expresando que se guía totalmente por lo que el libro de texto establece, ya que acostumbra abordar las situaciones problema tal y como se sugieren, asignando el mismo tiempo a cada unidad temática independientemente de los contenidos que se aborden. Además, argumentó la necesidad de trabajar así para que los estudiantes se preparen para el examen final, el cual es centralizado (un único examen aplicado a todos los estudiantes de la institución). No obstante, manifestó la necesidad de aplicar un examen al término de cada tema, esto con el fin de valorar el aprendizaje de sus estudiantes y poder cumplir con el requerimiento institucional (entrega de calificaciones).

A partir del análisis ontosemiótico se identificó un interés prioritario en promover el significado de ecuación lineal como *expresión analítica*, pues a través de esta acepción se gestionan los elementos que componen a la ecuación lineal, así como las técnicas de resolución dentro del mismo lenguaje algebraico. Otro de los significados presentes fue el de la ecuación como *modelo lineal*, al detectar que la mayoría de los problemas propuestos en el texto ya presentan el modelo algebraico con el cual es obtenida su solución.

El profesor A señaló que promueve la construcción de gráficas, partiendo de expresiones analíticas, es decir, ecuaciones lineales de dos variables donde se recurre a la graficación a través de una serie de puntos previamente calculados y colocados en un registro tabular. Este hecho confirma que se abordan de una manera muy incipiente las acepciones de la ecuación lineal como *la recta en su representación gráfica* y como *relación funcional*. Asimismo, se advierte que tiene planificado que, después de promover los aspectos gráficos relacionados con la ecuación lineal de dos variables, se retomen nuevamente las situaciones-problema en contexto intra-matemático para reafirmar las técnicas de resolución de las ecuaciones lineales en su *expresión analítica*.

Complementario a esto, se encontró que dentro del libro de texto se establece una evaluación del aprendizaje a través de rúbricas que se centran en ponderar el interés y la actitud del estudiante, la cantidad de ejercicios resueltos correctamente y el nivel de cumplimiento en la entrega de tareas. A pesar de que se contempla una evaluación diagnóstica y una ficha de autoevaluación que plantea la reproducción de algoritmos, todos estos recursos se alejan de una evaluación de tipo formativa. No obstante, a partir de sus respuestas en la entrevista, se logró identificar que concibe a la evaluación del aprendizaje como una acción temporal, al final del proceso de enseñanza; lo cual le marca la pauta para valorar el dominio de las habilidades y conocimientos (significado) que los estudiantes tienen del objeto. Manifestó que esto es llevado a cabo a través de ciertos registros, pero sobre todo por medio del examen donde se solicita la reproducción de procedimientos y definiciones.

5.2. Significados pretendidos por el profesor B

Para la determinación del significado pretendido por el profesor, se analizó el formato de planeación que proporcionó, con el fragmento correspondiente al tema de las ecuaciones lineales. Una vez realizado el análisis ontosemiótico, se identificó la promoción del significado de ecuación lineal como *expresión analítica*, debido al interés mostrado por la exploración de técnicas para su solución y la formalización de su definición. Posteriormente surgió la acepción de ecuación lineal como *modelo lineal*, pues a través de ella se planificó el planteamiento de situaciones-problema que pueden ser modeladas y resueltas a través de una ecuación lineal, independientemente del tipo de coeficientes.

Además, se logró identificar la presencia de situaciones-problema en contextos extra-matemáticos, a través de los cuales se construye el significado de ecuación lineal como *relación de proporcionalidad*, pues dichas situaciones se planificaron con el fin de impulsar en los estudiantes la identificación de la relación existente entre la ecuación y la función lineal.

En relación con la evaluación del aprendizaje, los instrumentos que se sugieren son listas de cotejo, problemarios resueltos y portafolios de evidencias; se pretenden evaluaciones diagnóstica, sumativa, formativa, autoevaluación y coevaluación. En su discurso el profesor externó que se enfoca en la "identificación de logros de aprendizaje y detección de dificultades presentes al trabajar con el objeto", enfocándose en "encaminar a sus estudiantes hacia la construcción de un significado más completo del objeto a través de la validación de sus acciones y retroalimentación constante".

6. SIGNIFICADOS IMPLEMENTADOS POR LOS PROFESORES

De acuerdo con el EOS, el *significado implementado* refiere al sistema de prácticas efectivamente manifestadas por el docente, durante un proceso de instrucción (Godino et al., 2009); esto es, lo que en realidad hizo y dijo el profesor en el aula al abordar un tema matemático, en su carácter de representante de la institución.

6.1. Significados implementados por el profesor A

El profesor A abordó el tema de las ecuaciones lineales en un periodo de 9 sesiones de 45 minutos cada una. Sin embargo, el tiempo efectivo fluctuaba entre 30 y 42 minutos por sesión, situación que lo obligó a trabajar a "marchas forzadas" para poder cubrir lo que el libro de texto establece.

Inicialmente fue posible identificar su interés por resaltar la importancia del tema, y con ello mostrar la aplicabilidad de las técnicas algebraicas y de algunos conceptos involucrados, lo cual dio paso a la acepción de ecuación lineal como *expresión analítica*. Dado que mencionó constantemente que las ecuaciones lineales tenían diversas aplicaciones en la vida diaria, el profesor expresó a los estudiantes que resolverían durante las sesiones algunas situaciones que les resultarían familiares. En ese sentido, el planteamiento de situaciones-problema en contextos extra-matemáticos sencillos como el manejo de dinero, cálculo de edades, ventas, etc., permitió introducir la acepción de ecuación lineal como *modelo lineal* en la resolución de situaciones-problema en contextos intra-matemáticos.

La ecuación lineal *como relación funcional* y como *la recta en su representación gráfica*, aparecieron vagamente en una de las situaciones-problema sugeridas por el texto y retomada por el profesor. En dicha situación se llevaron a cabo los procesos necesarios para su resolución y no se hicieron explícitos en ningún momento los conceptos de función, pendiente, variables, etc., así que los estudiantes se quedaron con la idea de que se trataba únicamente de una ecuación lineal con dos incógnitas, la cual les permitía obtener pares ordenados que podían ser localizados en el plano cartesiano. Al final de las sesiones y dado que no se llevaba un control de las clases, se retomó la acepción de ecuación lineal como *expresión analítica* para resolver problemas sobre despejes de variables, y la acepción de ecuación lineal como *modelo lineal* para resolver un problema extra-matemático.

6.2. Significados implementados por el profesor B

El profesor B desarrolló el tema de las ecuaciones lineales en un periodo de 8 sesiones de 50 minutos cada una. Se podría decir que abordó el tema en el tiempo programado dentro de la planeación del bachillerato general. Asimismo, se dio a la tarea de llevar a cabo algunas acciones que le permitieran identificar los conocimientos previos de sus estudiantes, incorporando además algunos temas matemáticos que no estaban contemplados en su significado de referencia (programa oficial de materia).

El profesor promovió al inicio las acepciones de ecuación lineal *como medio para la deducción de valores desconocidos* y *como expresión analítica*. Recurrió, aunque de manera muy pobre, a la acepción de ecuación lineal como *representación de la relación entre magnitudes geométricas*. Durante el resto de las sesiones, optó por promover inicialmente la acepción de ecuación lineal como expresión analítica con el fin de formalizar y demostrar, a través de su discurso, los elementos que componen una ecuación. Posteriormente se llevó a cabo una presentación de conceptos y antecedentes históricos del tema, concluyendo con la acepción de ecuación lineal como *modelo lineal* para resolver el problema del misterio de la edad de Diofanto. A partir de ese momento la acepción como modelo lineal recobró fuerza en el resto de las situaciones-problema planteadas.

Además de promover la modelación, se plantearon situaciones-problemas asociadas con el tema de proporcionalidad directa. En ese sentido se resolvieron problemas que permitieron formalizar algunos conceptos como constante de proporcionalidad y variable; se insistió en el uso de los lenguajes tabular y gráfico, y con ello se institucionalizaron los conceptos de función, variable dependiente e independiente, así como algunos aspectos gráficos como recta y pendiente; además de impulsar procesos de generalización a través de una expresión algebraica, la cual era llamada “fórmula”.

7. SIGNIFICADOS EVALUADOS POR LOS PROFESORES

En el EOS, el significado evaluado alude al subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes matemáticos durante el proceso de instrucción (Godino *et al.*, 2009). En ese sentido, la tarea consistió en identificar y caracterizar las prácticas puestas en juego por los dos profesores, al evaluar los aprendizajes sobre la noción de ecuación lineal, analizando también los instrumentos utilizados durante la implementación de dichas prácticas evaluativas, así como los significados evaluados de la noción de ecuación lineal.

7.1. Prácticas, instrumentos y significados evaluados por el profesor A

Inicialmente fue posible identificar su interés en dar cumplimiento tanto a las propuestas sugeridas y pretendidas por su institución, es decir, aplicar el examen diagnóstico y la ficha de autoevaluación, ambos propuestos por el libro de texto; así como preparar a los estudiantes para el día de la aplicación del examen, resolviendo y estudiando las situaciones-problema planteadas por el mismo texto. Durante las sesiones, las prácticas evaluativas del profesor A se centraban en realizar constantes cuestionamientos a los estudiantes sobre las propuestas de procedimientos de resolución de una ecuación, las soluciones obtenidas y sobre los argumentos necesarios para justificar tales resultados. Frecuentemente se cuestionó a los estudiantes sobre conceptos y procedimientos que habían estudiado con anterioridad, todo esto con el fin de verificar si habían sido “comprendidos”.

Durante las sesiones de clase, el profesor identificó dificultades manifestadas por los estudiantes al abordar las situaciones-problema planteadas. Casi siempre, cuando se presentaba una situación de ese tipo, el profesor iniciaba una discusión grupal buscando, mediante interrogantes, evidenciar los errores, y con ello aclarar las dudas que llegaban a externar los estudiantes. No siempre los resultados de las discusiones fueron favorables, lo cual ocasionaba que el profesor se desesperara y terminara resolviendo los problemas, construyendo los modelos o diciendo él mismo la solución, argumentando siempre que "no era nada complejo" y asignando tareas para promover su reproducción.

A pesar de que implementó el examen diagnóstico y llevaba un registro diario sobre las conductas de los estudiantes, el profesor tenía claro que la evaluación se realizaría al final del proceso de instrucción mediante la aplicación de un examen final (evaluación sumativa) diseñado por él mismo, tomando como base las situaciones-problema del texto. De acuerdo con las prácticas implementadas y promovidas por este profesor, es posible concluir que el significado evaluado sobre la noción de ecuación lineal, se centró en el planteamiento de situaciones relacionadas con las acepciones de *expresión analítica* y *modelo lineal,* así como con el de *relación funcional*.

Fue posible distinguir que dentro de las prácticas del profesor A, no se tenía el propósito de llevar a cabo acciones evaluativas a lo largo de la instrucción, debido a que concibe a la evaluación como una acción que se realiza al final del proceso de enseñanza. Por tal motivo, se mantuvo ausente la retroalimentación y la comunicación de los resultados, avances y/o logros obtenidos. El papel de los estudiantes consistió en demostrar, a través de las pruebas escritas, los conocimientos adquiridos sobre la ecuación lineal.

Correspondencia entre los significados del profesor A

Al determinar los significados curriculares se concluyó que, a partir de lo planteado por el programa del bachillerato tecnológico, los significados de la ecuación lineal propuestos se centraron en las acepciones de *expresión analítica*, *modelo lineal* y *la recta en su representación gráfica*. Posteriormente se concluyó que los significados de la ecuación lineal pretendidos por el profesor A fueron los de *modelo lineal* y *expresión analítica*; en apartados anteriores se presentó que el significado de la ecuación lineal implementado por el profesor A consistió esencialmente en dos acepciones: *expresión analítica* y *modelo lineal*. Finalmente, en esta sección se describió que el significado de la ecuación lineal evaluado por el profesor A se centró en esas dos mismas acepciones: *expresión analítica* y *modelo lineal,* aunque también se tuvo la presencia de la ecuación como *relación funcional.* Asimismo, se destacó la presencia de pequeños esbozos sobre el significado de ecuación lineal como la *recta en su representación gráfica* tanto en lo pretendido como en lo implementado.

La Tabla 2 que se muestra a continuación, resume lo descrito.

Tabla 2. Correspondencia entre los significados de la ecuación lineal por el profesor A

Significados parciales de la noción de ecuación lineal	Significado Pretendido por el currículo	Significado Pretendido por el profesor	Significado Implementado por el profesor	Significado Evaluado por el profesor
1. Como medio para la deducción de valores desconocidos	✗	✗	✗	✗
2. Como representación de relación entre magnitudes geométricas	✗	✗	✗	✗
3. Como relación de proporcionalidad	✗	✗	✗	✗
4. Como modelo lineal	✓	✓	✓	✓
5. Como la recta en su representación gráfica	✓	!	!	✗
6. Como relación funcional	✗	✗	!	✓
7. Como expresión analítica	✓	✓	✓	✓

Simbología	
✓	Promovido
!	Promovido parcialmente
✗	No promovido

7.2. Prácticas, instrumentos y significados evaluados por el profesor B

Identificamos que las prácticas de evaluación manifestadas por el profesor B fueron diversas y con diferentes fines. En la etapa inicial del proceso de instrucción, el profesor valoró los aprendizajes previos de los estudiantes, movilizando objetos matemáticos a través de situaciones-problema en contextos intra-matemáticos, calculando valores desconocidos, resolviendo problemas en contextos geométricos y situaciones-problemas sobre ecuaciones lineales como expresiones analíticas.

Durante el desarrollo del tema evaluó constantemente el desempeño de los estudiantes mediante cuestionamientos dirigidos a constatar su nivel de argumentación, así como la seguridad para verbalizar los procedimientos de resolución de los problemas planteados. A través de estas situaciones-problema, el profesor cuestionó a los estudiantes y llevó a cabo procesos de retroalimentación y discusiones grupales. Las situaciones-problema estuvieron mayoritariamente planteadas con el propósito de identificar los elementos de una ecuación lineal y fomentar técnicas de resolución algebraica, modelar enunciados verbales, situaciones de comportamiento lineal (proporcionalidad directa) o que son modelados a través de una función lineal en sus respectivas representaciones tabular y gráfica.

La observación constante del trabajo individual y por equipos, permitió al profesor llevar a cabo una evaluación con la que, al final del proceso de instrucción, identificó a los estudiantes que necesitaban asesorías extra-clase. Complementó su evaluación a través de la autoevaluación y coevaluación de tipo académica y actitudinal. Finalmente, se aplicó un examen escrito, el cual se estructuró con problemas sobre ecuaciones lineales, situaciones-problema en contextos intra y extra-matemáticos relacionados con proporcionalidad y modelados por funciones lineales.

Se concluye entonces que, el significado evaluado del profesor B se enfocó prioritariamente en 5 de los significados parciales de la noción de ecuación lineal (aunque se reflejó presencia de los 7): la ecuación lineal como *medio para la deducción de valores desconocidos*, *relación de proporcionalidad*, *modelo lineal*, *relación funcional* y *expresión analítica*.

Fue posible distinguir que el profesor B, desde su planificación, contempla varias acciones para llevar a cabo la evaluación del aprendizaje de sus estudiantes; por ejemplo, en sus objetivos declaró la implementación de los tres tipos de evaluación; diagnóstica, formativa y sumativa. En el caso de la evaluación diagnóstica, Casanova (2007) la define como la evaluación inicial que tiene por objetivo proporcionar información acerca de los conocimientos y las habilidades previas del sujeto. En ese sentido, el profesor implementó estos tres tipos de evaluación con la intención de comunicar al estudiante su grado de avance y resultados obtenidos. Además de esto, constantemente el profesor recurrió a la retroalimentación, a través de discusiones grupales guiadas. El papel de los estudiantes durante el proceso de estudio consistió en participar activamente en cada una de las tareas.

Correspondencia entre los significados del profesor B

En la sección del significado curricular, se concluyó que el programa del bachillerato general promovía 5 de los 7 significados parciales de la ecuación lineal: *representación de la relación entre magnitudes geométricas*, *modelo lineal*, *la recta en su representación gráfica*, como *relación funcional* y *expresión analítica*. En cuanto a los significados pretendidos por el profesor B, encontramos que este profesor movilizó a la ecuación lineal en sus acepciones de *expresión analítica*, *modelo lineal*, *relación de proporcionalidad*, *relación funcional* y *la recta en su representación gráfica*. De estos cinco significados, en el discurso del profesor solo se manifestaron cuatro de ellos, es decir, no se hizo notorio el significado de ecuación como *la recta en su representación gráfica*. No obstante, se percibieron indicios sobre el significado de ecuación lineal como *medio para la deducción de valores desconocidos*, el cual fue parcialmente manifestado por el profesor dentro de su planificación.

En la sección de significados implementados se mencionó que el profesor priorizó cuatro significados parciales para la noción de ecuación lineal: *relación de proporcionalidad*, *modelo lineal*, como *relación funcional* y *expresión analítica*, aunque los otros tres fueron gestionados parcialmente. Se expuso también que el significado evaluado por el profesor B se enfocó prioritariamente en cinco significados parciales: *medio para la deducción de valores desconocidos*, *relación de proporcionalidad*, *modelo lineal*, como *relación funcional* y *expresión analítica*. La Tabla 3 resume la correspondencia entre los significados descritos para el profesor B.

Resalta que, en el caso del profesor B, se presentó una alta correspondencia entre los significados implementados y los efectivamente evaluados. Además, se puede concluir que consideró, evidentemente, los significados pretendidos por el currículo para llevar a cabo su planeación (significado pretendido por él mismo). Algo interesante después de estos contrastes fue haber identificado que tanto el significado de ecuación lineal como *modelo lineal*, *relación funcional* y como *expresión analítica*, fueron los únicos tres significados que se manifestaron tanto en el significado curricular como en los significados del profesor. Esto hace inferir que tanto el currículo, como la institución, influyeron en la selección de significados que se manifestaron en sus prácticas.

Tabla 3. Correspondencia entre los significados de la ecuación lineal por el profesor B

Significados parciales de la noción de ecuación lineal	Significado Pretendido por el currículo	Significado Pretendido por el profesor	Significado Implementado por el profesor	Significado Evaluado por el profesor
1. Como medio para la deducción de valores desconocidos	✗	!	!	✓
2. Como representación de relación entre magnitudes geométricas	✓	✗	!	!
3. Como relación de proporcionalidad	✗	✓	✓	✓
4. Como modelo lineal	✓	✓	✓	✓
5. Como la recta en su representación gráfica	✓	✓	!	!
6. Como relación funcional	✓	✓	✓	✓
7. Como expresión analítica	✓	✓	✓	✓

Simbología	
✓	Promovido
!	Promovido parcialmente
✗	No promovido

8. REFLEXIONES FINALES

El desarrollo de este estudio permitió recolectar evidencias sobre la manera en la cual se concibe y se lleva a cabo la evaluación del aprendizaje por profesores de matemáticas. En este reporte, el centro estuvo puesto sobre la evaluación de la noción de ecuación lineal, lo cual permitió identificar aquellos factores que jugaron un papel determinante en las prácticas de los profesores, desde su planeación hasta su ejecución (implementación y evaluación del tema).

La reconstrucción del significado holístico de referencia (propuesta de los siete significados parciales del objeto matemático), permitió contar con un referente epistémico sobre la noción de ecuación lineal con el cual fue posible caracterizar y relacionar con mayor precisión tanto las prácticas como los significados puestos de manifiesto por los profesores en su labor áulica.

Considerando que este significado fue utilizado para llevar a cabo los contrastes respecto al significado curricular y los significados pretendidos, implementados y evaluados por los profesores, se pudo observar, en el caso del profesor A, que tanto el significado curricular como su propio significado pretendido fueron muy similares, situación que ocasionó que los diversos significados promovidos de la noción matemática no se correspondieran con el significado holístico de referencia.

Dicha situación jugó un papel fundamental en sus prácticas, bajo el argumento imperativo de acatar lo que el currículo y el texto le establecen, cumpliendo con ello normativas institucionales relacionadas con el calendario escolar y con la preparación necesaria de los estudiantes para abordar el examen final del tema matemático en estudio, aspectos imprescindibles para emitir un juicio sobre su aprendizaje, el cual concretó vía una calificación.

Con respecto a la evaluación, el profesor A sólo consideró dos de los siete significados parciales. Tanto en su práctica operativa como discursiva, concibió la evaluación del aprendizaje como una acción temporal y no como un proceso permanente. En ese sentido, recurrió a evaluación tanto diagnóstica como sumativa, pues las acciones clasificadas como evaluativas dentro de su trayectoria docente, constataron su interés por verificar que los estudiantes adquirieran las técnicas y las habilidades algorítmicas necesarias para resolver un problema, así como para verbalizar y justificar las soluciones obtenidas o la memorización de algunos conceptos. En la práctica del profesor no fue posible identificar que llevara a cabo procesos de retroalimentación o cambios de estrategia para enfrentar una dificultad o resolver conflictos. A pesar de que se desarrollaban discusiones grupales y cuestionamientos, el profesor optaba por la institucionalización. Aunque en el currículo y en el libro de texto se proponen diferentes instrumentos de evaluación, su uso fue muy pobre. Se destaca que el profesor externó que el examen escrito representaba 20% de la calificación obtenida en la evaluación sumativa. Argumentó que esto es así, debido a que "ya se sabe que los estudiantes fallan", pero que de alguna u otra manera se debe cumplir con el requisito institucional de aplicar una evaluación de este tipo.

En ese sentido, la práctica del profesor A careció de espacios a través de los cuales pudiera dar a conocer resultados, áreas de oportunidad o de mejora a sus estudiantes; no los hizo partícipes de alguna retroalimentación en las tareas asignadas o exámenes aplicados; solamente les hacía saber "que las cosas no andaban bien", generando un ambiente de frustración e incertidumbre en ellos.

En lo que al profesor B respecta, como se pudo observar, activó una mayor riqueza de significados de la noción matemática, siendo interesante haber identificado que presentó en su planificación la inclusión de significados (pretendidos) que no se encontraban declarados en el currículo; un ejemplo fue el significado de la ecuación lineal como *relación de proporcionalidad*, considerada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicha noción matemática.

Respecto a la evaluación del aprendizaje, un aspecto interesante fue que el profesor B dio a conocer, desde el inicio del tema, los criterios y factores considerados en la evaluación sumativa, tal y como se lo indicaba su planificación. Mediante la evaluación diagnóstica, el profesor logró procesos de retroalimentación e institucionalización, respecto de los diferentes objetos matemáticos intervinientes durante el estudio de la noción de ecuación lineal. Durante el proceso de instrucción, además de desarrollar plenarias y discusiones grupales, así como trabajo individual y en equipo, también complementó la evaluación a través de una autoevaluación y coevaluación de tipo académica y actitudinal, aunque su trayectoria docente permitió evidenciar que no en todas las sesiones desarrolló acciones con fines puramente evaluativos.

Si bien, durante el desarrollo del tema el profesor manifestó interés en llevar a cabo diferentes acciones relacionadas con la evaluación del aprendizaje y la valoración del progreso de sus estudiantes, se identificó que al momento de implementar la prueba escrita al final del proceso de instrucción, en su estructura priorizó asuntos conceptuales y procedimentales, abordando problemáticas en contextos puramente matemáticos. Aun así, fue muy destacable que en su discurso externara un significado amplio respecto a la evaluación del aprendizaje, concibiéndola como un proceso permanente, en donde sus prácticas no se limitan sólo a emitir juicios o realizar mediciones.

En términos generales el profesor implementó los diversos tipos de evaluación que establecen los lineamientos del modelo curricular y el EBC en México, además de que mostró interés por comunicar a sus estudiantes su grado de avance y resultados obtenidos, así como de fomentar la activa participación durante el proceso de estudio o en cada tarea asignada.

Con lo descrito hasta aquí, se logra evidenciar lo complejo que resulta para los profesores realizar un proceso de evaluación de tipo formativa, que se desarrolle de manera permanente y efectiva, de tal forma que los estudiantes puedan no sólo conocer sus errores o dificultades, sino que a partir de ello puedan reconocer espacios de oportunidad para poder llegar a construir un significado rico y sólido sobre la noción matemática que se esté estudiando. También es posible concluir que, a pesar de que se promueve actualmente en el bachillerato mexicano un modelo de EBC con iniciativas para modificar el significado de evaluación en los profesores, estos procesos de cambio requieren mucho tiempo. Una muestra de ello es que, aunque se dispone de diferentes instrumentos, el examen prevalece como protagonista, siendo aplicado al final del proceso de instrucción y utilizado para emitir juicios sobre el "aprendizaje matemático" a partir de la reproducción de procedimientos y conceptos estudiados.

Los factores que se identificaron como determinantes en las prácticas de evaluación de los profesores fueron: el significado pretendido por el currículo nacional; las normativas institucionales; sus propias creencias y concepciones acerca de la evaluación; el contexto en el que se desarrolla la clase y sus significados personales (conocimientos didáctico-matemáticos) sobre la noción bajo estudio.

Finalmente se señala que una línea de investigación susceptible de desprenderse de este trabajo es el análisis de los significados declarados y logrados por los estudiantes ante las prácticas de los profesores, entre algunos otros aspectos relacionados con la evaluación del aprendizaje en matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco de los proyectos de investigación del equipo de trabajo del Programa de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora, México, en colaboración con un profesor investigador del programa de Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Chile.

REFERENCIAS

Álvarez, R. y Blanco, L. J. (2014). Sobre la evaluación en matemáticas en secundaria. *Suma*, *76*, p. 47-54.

Bashmakova, I. y Smirnova, G. (2000). *The Beginnings and Evolution of Algebra*. The Mathematical Association of America.

Becerra, R. y Moya, A. (2008). Una perspectiva crítica de la evaluación en matemática en la Educación Media Superior. *Sapiens. Revista de Investigación, 9*(1), 35-69.

Boyer, C. (1968). *A history of mathematics.* Wiley International Edition. John Wiley & Sons, Inc. Library of Congress catalog card number 16506. Brooklyn College, pp. 9-583.

Calderón, R. M y Deiros, B. (2003). Evaluación del aprendizaje de las matemáticas. En J. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16. 329-333). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Casanova, M. A. (2007). *Manual de evaluación educativa*. 9ª Ed. Editorial la Muralla, S. A.

Collete, J. (1998). Historia de las matemáticas, vol. 2, Siglo XXI Editores.

Cullen, C. (2007). The Suàn shù sh, 'Writings on reckoning': Rewriting the history of early Chinese mathematics in the light of an excavated manuscript, *Historia Mathematica*, *34*(1), 10-44.

Dalcín, M. y Olave, M. (2007) Ecuaciones de primer grado: su historia. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 20, pp. 156-161), Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dirección General de Bachillerato (2011). *Lineamientos de evaluación del aprendizaje en la educación media superior*. SEP, *DOF* 01/07/2011.

Dirección General de Bachillerato (2014). *Matemáticas 1*. Serie: Programas de estudio. Sistema Nacional de Bachillerato, SEP.

Dolores, C. y García, J. (2016). Concepciones de profesores de matemáticas sobre la evaluación y las competencias. *Números, Revista didáctica de las matemáticas, 92*(1), 71-92.

Dolores, C. y García, J. (2017). Concepciones de profesores de matemáticas acerca de la evaluación vistas a la luz de la reforma educativa actual en México. *Revista Paradigma*, *XXXVIII*(1), 186-210.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *26*(1), 39-88.

Goñi, J. M. (2008). La evaluación de las competencias determinará el currículo de matemáticas. En J. M. Goñi (Ed.), 32-2 ideas clave. *El desarrollo de la competencia matemática* (pp. 167-185). GRAO.

Guelli, O. (1989). A regra da falsa posição. *Revista do Profesor de Matemática, 15*, 18-22.

Gulikers, I. y Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 223-258.

Harlen, W. (2012). The role of assessment in developing motivation for learning. En J. Gardner (Ed.), *Assessment and Learning* (pp. 171-183). Sage.

Hernández, K. (2013). Representaciones sociales sobre la evaluación en matemáticas en el nivel superior. (Tesis de Maestría no publicada) CICATA-IPN.

Ibarra, S. (2008). La transposición didáctica del álgebra en las ingenierías. El caso de los sistemas de ecuaciones lineales. (Tesis de Maestría no publicada) CICATA-IPN.

Millán, A. (2004). Euclides. *La fuerza del razonamiento matemático*. Nivola.

Moreno, (2012). Evaluación cualitativa del aprendizaje: enfoques y tendencias. *Revista de la Educación Superior*, ANUIES, XXXIII *3*(131), 93-110.

Moya, A. (2001). Reflexiones sobre la teoría y práctica de la evaluación en educación matemática. *Boletín de Investigación*, UPEL, J. M. Siso Martínez, vol. (1).

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* NCTM.

Patwardan, K., Naimpally, S. y Singh, A. (2001). Lilavati of Bhaskaracarya. *A treatise of mathematics of vedic tradition.* Motilal Banarsidass Publishers.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada [The epistemic facet of mathematical and didactic knowledge about the derivative]. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2015). *Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. BOLEMA*, *29*(51), 60-89.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Publicacions de la Universitat Jaume I.

Ribnikov, K. (1987): *Historia de las Matemáticas.* Editorial Mir. http://thales.cica.es/rd/Recursos/Matematicas/14/historia.html

Sandín, E. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* Capítulo 7. Mc Graw and Hill Interamericana.

Secretaría de Educación Pública. (2009). Acuerdo secretarial núm. 8: Orientaciones sobre la evaluación del aprendizaje bajo un enfoque de competencias. Comité Directivo del Sistema Nacional de Bachillerato, *DOF* 8/CD/2009.

Secretaría de Educación Pública. (2013). Acuerdo secretarial núm. 653: Por el que se establece el Plan de Estudios del Bachillerato Tecnológico. *DOF*.

Shepard, L. A. (2000). The role of assessment in a learning culture. *Educational Researcher, 29*(7), 4-14.

Smith, Stanley y Col. (2001). *Álgebra.* Addison-Wesley Iberoamericana.

Stiggins, R. J. (2001). *Student-involved classroom assessment*, 3ª ed. Prentice Hall.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2016). Estadísticas e indicadores del Sistema Educativo Nacional Mexicano. *Dirección General de Planeación, Programación y Estadística Educativa* (1) SEP.

Vincenzi de, A. y Angelis de P. (2008). La evaluación de los aprendizajes de los alumnos. Orientaciones para el diseño de instrumentos de evaluación. *Revista de Educación y Desarrollo*, *8,* 17-22.

Webb, N. (1992). Assessment of student's knowledge of mathematics: Steps toward a theory. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 81-93). Macmillan.

Wormeli, R. (2006). *Fair isn't always equal: Assessing and grading in the differentiated classroom*. National Middel School Association (NMSA).

RAÚL ALONSO RAMÍREZ ESCOBAR

Dirección: Departamento de Ciencias Básicas del TecNM / Instituto Tecnológico de Nogales, Ave. Tecnológico 911 C.P. 84065 Colonia Granja, H. Nogales, Sonora, México

Teléfono: (631) 159-0001, (631) 314-8436
+52 631 111 2479

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3202.04

Creencias matemáticas profesadas e implícitas de profesores universitarios de matemáticas

Professed and implicit mathematical beliefs of university mathematics teachers

Antonia Hernández Moreno[1]
Yuridia Arellano García[2]
Gustavo Martínez Sierra[3]

Resumen: Las investigaciones de creencias de profesores se han centrado en el nivel básico y en el de formación, con una gran tendencia al uso de las escalas Likert. Por otro lado, investigaciones sobre emociones de profesores desde las teorías de valoración, sostienen que esas valoraciones son realizadas en función de las creencias, metas, etc. de los profesores. El objetivo de nuestra investigación fue utilizar esta relación entre emoción-creencia para identificar, además de creencias profesadas, creencias implícitas en las valoraciones cognitivas reportadas en auto-informes diarios sobre las experiencias de clase de dos profesores de nivel superior. Identificamos dos tipos de creencias implícitas: referidas al aprendizaje y a la gestión en el aula. Además, 22 creencias matemáticas profesadas por los profesores que organizamos en cinco categorías: matemáticas es, aprender matemáticas es, para aprender matemáticas se debe, enseñar matemáticas es, y para enseñar matemáticas se debe. Presentamos

Fecha de recepción: 25 de marzo de 2019. **Fecha de aceptación**: 29 de mayo de 2020

[1] Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, antonia.inves@gmail.com, orcid.org/0000-0001-9897-7626

[2] Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, yaregar@gmail.com, orcid.org/0000-0002-7841-1470

[3] Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, gmartinez@uagro.mx, orcid.org/0000-0002-2462-7401

algunas implicaciones prácticas y algunas recomendaciones para futuras investigaciones.

Palabras clave: *creencias de profesores. valoración cognitiva. creencias profesadas. creencias implícitas*

Abstracs: Teacher beliefs research has focused on basic level teachers and teachers in training, with a great tendency to use Likert scales. On the other hand, research on teachers' emotions, from valuation theories, argues that these valuations are carried out based on beliefs, goals, etc. of the teachers. The objective of our research was to use this relationship between emotion-belief to identify, in addition to professed beliefs, beliefs implicit in the appraisal cognitive reported in daily self-reports on the class experiences of two higher-level teachers. We identified two types of implicit beliefs: referring to learning and management in the classroom. In addition, 22 mathematical beliefs professed by the teachers that we organize into five categories: mathematics is, learning mathematics is, to learn mathematics, you must teach mathematics, and to teach mathematics, you must. We present some practical implications and some recommendations for future research.

Keywords: *Teachers' beliefs. Appraisal cognitive. Professed beliefs. Implicit beliefs*

1. INTRODUCCIÓN

La investigación de creencias de profesores buscó, en sus inicios, entender el aprendizaje en las aulas desde la perspectiva de los profesores y resolver problemas de implementación de los planes y programas de estudios (Skott, 2015a; 2015b). Las creencias se consideran importantes por varias razones: (1) se piensa que las creencias guían, en gran parte, la práctica del profesor, pueden facilitar o dificultar la práctica al enmarcar y orientar sus decisiones y acciones en el aula (Skott, 2015a; Solís, 2015; Jiménez y Gutiérrez, 2017; Cross, 2015; Thompson, 1992, Philipp, 2007, Fives y Buehl, 2012); (2) se considera que las creencias de los profesores pueden moldear las creencias de los estudiantes (Schoenfeld, 1992), porque mientras aprenden matemáticas los estudiantes también están aprendiendo qué son las matemáticas, qué valor tienen, cómo se aprende, quién debe aprender, etc. (Skott, 2009a; Philipp, 2007), y (3) las creencias de los profesores filtran todo aquello que supone el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática (García, Azcarate, y Moreno, 2006). De modo que las creencias no deben interpretarse como predictores, sino como indicadores de las intenciones que se tienen de cómo actúa un profesor (Andrews y Xenofontos, 2015).

Los puntos sobre la importancia del estudio de las creencias de profesores ponen énfasis en el papel de dichas creencias como indicadores de las decisiones que toman en el aula y en la forma en cómo se relacionan con sus estudiantes a través de sus creencias. En ese sentido, en el estudio de creencias de profesores en Matemática Educativa, se ha destacado la investigación sobre creencias acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje –denominadas creencias matemáticas (Kul y Celik, 2017) – (Beswick, 2007; Cross, 2009; Handal, 2003; Liljedahl, 2009; Philipp, 2007; Raymond,1997; Stipek, Givvin, Salmon, y Macgyvers, 2001; Thompson, 1992; Žalská, 2012). En su conjunto, estas investigaciones muestran, que la manera en que los profesores conciben la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, en consecuencia, su práctica, se fundamenta en sus creencias acerca de la naturaleza y función de las matemáticas.

Por la importancia de éstas, se esperaría que los nuevos retos y desafíos a los que se enfrentan en sus aulas influyan en sus creencias, por tanto, la investigación de las creencias de los profesores se hace necesaria en contextos específicos y de forma recurrente. Gran parte de la investigación sobre el tema se ha centrado en profesores de nivel básico (Perry, y Howard, 1999; Grootenboer, 2008; Förster, 2011; Furinghetti y Morselli, 2011; Beswick, 2012; Misfelddt, Jankvist, y Sánchez, 2016) o en profesores en formación (Kul y Celik, 2017; Charalambous, Panaoura y Philppou, 2009; Riley, 2018; Hidalgo, Maroto, y Palacios, 2015), los cuales se ven influenciados por los planes y programas de estudios que los rigen. Consideramos importante explorar nuevos contextos en los que las creencias de los profesores juegan un papel igualmente importante, ya que, aunque los profesores de nivel superior son autónomos en sus cátedras (García, Azcárate y Moreno, 2006) sus creencias serán, con mayor razón, las guías para indicar y dirigir su actuar en el aula.

En lo que respecta a las tradiciones metodológicas, en las investigaciones de creencias de profesores ha sido común utilizar las escalas Likert. Pero las escalas Likert, por su naturaleza, se restringen a preguntar sobre el grado de acuerdo con oraciones previamente elegidas por los investigadores sin dar oportunidad a los profesores de externar con sus palabras e ideas lo que creen

(Abd-El-Khalick y Lederman, 2000; Di Martino y Sabena, 2010). Por lo tanto, es importante considerar propuestas metodológicas que, permitan describir las creencias matemáticas de los profesores considerando métodos introspectivos y de muestreo constante de la experiencia, que puedan arrojar información más detallada que las escalas Likert y más cercanas a las experiencias particulares de los profesores, expresadas desde sus propias ideas con sus palabras.

Una propuesta metodológica son los auto-informes diarios, utilizada en Martínez-Sierra, Arellano-García, Hernández-Moreno y Nava-Guzmán (2018). El principal objetivo en Martínez-Sierra*, et. al*. (2018) fue estudiar las experiencias emocionales de un profesor de matemáticas de nivel medio superior en sus clases de cálculo, basados en la teoría cognitiva de las emociones (OCC). La OCC propone que las emociones son producto de la valoración cognitiva que los individuos hacen sobre situaciones que contribuyen o restan a su bienestar, existen antecedentes de valoración (metas, actitudes y creencias) con base en las que los individuos interpretan sus experiencias significativas. Martínez-Sierra, *et. al*. (2018) concluyeron que las creencias de cómo se aprende matemáticas son la base de la estructura de valoración cognitiva de las emociones experimentadas por el profesor. Con base en ello, plantearon la hipótesis de que las creencias matemáticas –creencias de lo que son las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje– son los principales antecedentes de valoración cognitiva que soportan las experiencias emocionales de los profesores en el aula. Con esta referencia, partimos de la hipótesis de que es posible identificar grupos de creencias a través del análisis de los antecedentes de valoración cognitiva de las situaciones que desencadenan una experiencia emocional de los profesores. En ese mismo sentido, Frijda y Mesquita (2000) afirman que las creencias se encuentran entre los antecedentes de valoración cognitiva de los eventos que provocan emociones de las personas y esas emociones pueden expresar creencias, a menudo, sólidas. Las creencias, entre otras "preocupaciones", es aquello en lo que se basan los individuos para detectar y evaluar la importancia del medio ambiente para el bienestar del individuo que valora un evento (Moors, Ellsworth, Scherer, y Frijda, 2013, p. 119) y que en consecuencia le desencadenan una experiencia emocional.

En la literatura de creencias de profesores se realiza una clasificación en función de cómo se identifican, creencias profesadas, *professed beliefs or espoused beliefs,* que se identifican por medio de lo que los profesores dicen y creencias atribuidas, *attributed beliefs or enacted beliefs,* que son inferidas de lo que los profesores hacen (Zhang y Morselli, 2016; Fives y Buehl, 2012; Philipp, 2007).

Con la hipótesis planteada definimos las creencias implícitas en las valoraciones cognitivas, *implicit beliefs,* como aquellas que podemos identificar a través de la valoración cognitiva de las situaciones que desencadenan emociones en los profesores.

Con todo lo expuesto, el objetivo de esta investigación es identificar creencias matemáticas de profesores de nivel superior implícitas y profesadas, estudiando las valoraciones cognitivas de situaciones que desencadenan experiencias emocionales mediante auto-informes diarios, que son un método de muestro constante de la experiencia. En consecuencia, la pregunta de investigación es: ¿Cuáles son las creencias matemáticas implícitas y profesadas de profesores de matemáticas de nivel superior narradas en auto-informes diarios?

1.1 Estudios sobre emociones de profesores que muestran su relación con las creencias

Para Schutz, Hong, Cross y Osbon (2006) las emociones son el resultado de "juicios conscientes y/o inconscientes con respecto a los éxitos percibidos para alcanzar las metas o mantener estándares o creencias" (p. 346). Las metas, estándares y creencias son construcciones centrales de organización de las emociones porque representan puntos de referencia utilizados por los maestros y estudiantes para determinar qué tan exitosos se ven a sí mismos en su intento por alcanzar sus objetivos. Las valoraciones son esenciales para que surjan las emociones porque "estas evaluaciones surgen de creencias y teorías personales sobre el mundo y están dirigidas a hacer comparaciones entre las metas de los individuos y dónde se perciben a sí mismas en relación con esas metas" (p. 346). Por lo que, las creencias resultan ser la base en las valoraciones de las situaciones durante las experiencias emocionales en el aula.

En ese sentido, el modelo de Frenzel (2014), propone que las emociones de los profesores resultan de los juicios que hacen con respecto al éxito o fracaso de sus propios esfuerzos de enseñanza, ya que estos parecen ser particularmente importantes. En su modelo, Frenzel especifica que los profesores evalúan cognitivamente las actividades en su salón de clases a partir de metas preestablecidas y, en función de sus juicios respecto a si las conductas de los alumnos están alineadas con ellas. Frenzel señala que para entender los antecedentes de las emociones de profesores, necesitamos identificar los ideales de enseñanza, es decir, las visiones generales de los maestros de lo que desean lograr a través de la instrucción e, inferir las metas resultantes que los maestros utilizan para medir sus éxitos y fracasos. Estos ideales de enseñanza tendrán distintas fuentes, entre ellas las experiencias de enseñanza recurrentes y los estándares que, desde nuestro punto de vista se consolidan en creencias sobre cómo lograr la enseñanza y el aprendizaje, así como qué son y qué significan las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje.

En un estudio más cercano, Martínez-Sierra, *et al.* (2018) mostraron que en nivel medio superior las emociones de profesores son desencadenadas principalmente por las normas de conducta esperadas de los estudiantes y las metas de clase. En donde el concepto de "actitud de los estudiantes" juega un papel importante, este concepto de actitud propio del profesor (son una serie de actividades y conductas que el estudiante muestra ante la clase, tales como la participación, la colaboración y, la autonomía) muestra que las creencias acerca de las normas, comportamientos, aprendizaje, enseñanza y naturaleza de las matemáticas son elementos sólidos de la estructura de valoración cognitiva de las situaciones que desencadenan una experiencia emocional en el profesor.

Los estudios mencionados evidencían que las experiencias emocionales de los profesores surgen a partir de las valoraciones basadas en sus creencias. Esto nos permite considerar a las creencias como los antecedentes de la valoración cognitiva de las situaciones que desencadenan una experiencia emocional en los profesores y, dan pie a pensar que es posible identificar creencias a través del análisis de las experiencias emocionales de los profesores.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Creencias y tipos de creencias

Skott (2015a) propone cuatro aspectos fundamentales que constituyen el núcleo del concepto de creencia:

- Las creencias se utilizan generalmente para describir las construcciones mentales individuales, que son subjetivamente ciertas para la persona.
- Hay aspectos cognitivos, así como afectivos en las creencias o, por lo menos, las creencias y los problemas afectivos son vistos como ligados incomprensiblemente.

- Las creencias se consideran, en general, reificaciones temporales y contextualmente estables, que pueden cambiar como resultado de la participación sustancial en las prácticas sociales relevantes.
- Se espera que las creencias influyan significativamente en la forma en que los profesores interpretan las situaciones para comprometerse con los problemas de la práctica.

En este trabajo se considera que el término creencia se usa para describir las construcciones mentales individuales, que son subjetivamente ciertas para los profesores en cuestión, que tienen cierto grado de convicción y no son consensuadas (Skott, 2015a), además de estar profundamente ligadas con los aspectos afectivos, tales como las emociones. Para fines operativos, consideramos la postura de Pajares (1992, p. 18) quién define una creencia como "el juicio de verdad o la falsedad de una proposición" para identificar las creencias a partir de las narraciones de los profesores.

Para este estudio, es de gran relevancia la clasificación que encontramos en la literatura sobre creencias de profesores en función de cómo se identifican: creencias profesadas (*professed beliefs or espoused beliefs*) como las que se identifican por medio de lo que los profesores dicen y creencias atribuidas (*attributed beliefs or enacted beliefs*) que son inferidas de lo que los profesores hacen (Zhang y Morselli, 2016; Fives y Buehl, 2012; Philipp, 2007). Estos dos tipos de creencias pueden ser compatibles cuando lo que se profesa se corresponde con lo que se hace en el aula o, incompatibles cuando lo que se diga no se corresponda con lo que se infiere de lo que hace.

Cuando las creencias profesadas y atribuidas son inconsistentes debe tomarse en cuenta que "las creencias no deben interpretarse como predictores, sino como indicadores de las intenciones que se tienen de cómo actuar" (Andrews y Xenofontos, 2015, p. 301) y por tanto las circunstancias o el contexto de la clase obligan al profesor a adaptar sus acciones por sobre sus creencias, además los investigadores interesados en la relación creencias y práctica, hacen la inferencia de las creencias atribuidas en contextos distintos en los que se han identificado las creencias profesadas.

En esta investigación se pretende identificar creencias desde los antecedentes de valoración cognitiva que desencadenan emociones en las experiencias diarias reportadas por los profesores. Dado que no se corresponde con las definidas en la literatura de creencias de profesores se ha decidido llamar *creencias implícitas* a las creencias identificadas a través del análisis de las valoraciones cognitivas que desencadenan emociones, debido a que estas creencias no son declaradas por el profesor ni interpretadas de sus acciones en aula, sino inferidas de las valoraciones cognitivas sobre lo que los profesores consideran importante para su bienestar en el aula.

Las teorías de valoración cognitiva de las emociones proponen que las personas experimentan emociones de acuerdo a sus valoraciones o interpretación cognitiva [*appraisal*] de la situación en específico. La valoración es un proceso que detecta y evalúa la importancia del medio ambiente para el "bienestar", se conceptúa como la facilitación o la obstrucción de las "preocupaciones". Por ejemplo, la ley del significado situacional de Frijda (2007) considera que "las emociones surgen en respuesta a la estructura significativa de una situación" (p. 4) por lo que la valoración implica una interacción entre el evento y quién valora el evento (Lazarus, 1991). La valoración puede ser positiva cuando la situación se evalúa como facilitadora para el bienestar del individuo o puede ser negativa cuando la situación se evalúa como una obstrucción. Así, se denomina *antecedente de valoración* a todas aquellas ideas que soportan las valoraciones, estas pueden ser: metas, normas, actitudes, creencias, entre otras. Nuestra investigación se centrará en identificar las creencias en la estructura de valoración de los profesores, a través de las valoraciones cognitivas de las situaciones que valoran como positivas o negativas.

3. METODOLOGÍA

La investigación es de tipo cualitativa y un estudio doble de caso, que nos permite una comprensión profunda de la naturaleza y la complejidad del fenómeno en estudio: las creencias matemáticas de los profesores de nivel superior (Yin, 2009). Particularmente, optamos por un estudio doble de caso instrumental (Stake, 2005) porque de un grupo de cuatro profesores de matemáticas de nivel superior que aceptaron participar, de manera voluntaria, como informantes en la investigación, escogimos a dos profesores por su interés y su disponibilidad para compartir la información necesaria en la investigación.

Yin (2009) identifica tres pasos en el diseño de estudios de casos: definir el caso, justificar la selección de un estudio de caso o un estudio de caso múltiple y, articular explícitamente cómo las perspectivas teóricas guían o deliberadamente no guían el caso. En esta investigación reportamos un estudio doble de caso instrumental –es decir; un caso en donde éste se hace para someter a prueba una teoría (Stake, 2005)– acerca de las creencias matemáticas (profesadas e implícitas) de dos profesores universitarios de matemáticas (GA y EDO), a través del cual intentamos avanzar en lo que se sabe sobre los diferentes tipos de creencias de profesores; en particular avanzar en el conocimiento teórico y metodológico de las creencias implícitas. Deliberadamente utilizamos las perspectivas teóricas antes detalladas para guiar nuestro diseño y análisis de este estudio.

3.1 Participantes

Son dos profesores de matemáticas de nivel superior, de diferentes estados del norte de México. Uno de ellos en el momento de la toma de datos impartía el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I y el otro un curso de Grupos y Anillos. El profesor de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I (en adelante profesor EDO) tiene 39 años, licenciado, maestro y doctor en matemáticas, actualmente es profesor-investigador, cuenta con 17 años de experiencia docente. El profesor de Grupos y Anillos (en adelante GA) tiene 43 años, licenciado en matemáticas, maestro en matemática educativa, maestro en matemáticas y doctor con especialidad en matemática educativa, cuenta con 17 años de experiencia docente.

3.2 Recolección de datos

Consintió en una entrevista semiestructurada inicial con el objetivo de conocer aspectos generales sobre la formación de los profesores y sus opiniones respecto a la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Aunque, la información proveniente de la entrevista semiestructurada, solo se utilizó para la descripción de los participantes, porque el interés se centró en la información recolectada de los auto-informes diarios.

Los cuales consisten en "repetidos auto-informes que tienen como objetivo capturar eventos, reflexiones, estados de ánimo, o interacciones cerca del momento en que ocurren" (Iida, Shrout, Laurenceau, y Bolger, 2012, p. 277). Ofrecen, además, proximidad a la experiencia de los participantes puesto que los datos se recogen sobre su vida a medida que suceden, lo que nos permite identificar las creencias que los profesores ponen en juego durante la gestión de su clase, además reduce en gran medida el sesgo de la retrospección que está asociado a la encuesta habitual o diseño de la entrevista y ofrece la posibilidad de estudiar el cambio intraindividual de procesos, pensamientos, sentimientos y comportamientos en contextos muy específicos (Iida *et al.*, 2012; Zirkel, García, y Murphy, 2015). En consideración con lo anterior, se eligió el uso del WhatsApp® para tener una mayor proximidad a la experiencia de los participantes. Además, de experiencias previas en el grupo de investigación con el uso del WhatsApp, que resultaron exitosas.

Los auto-informes se enviaron por este medio, minutos después de terminar cada clase y, estuvieron guiados por un protocolo (Tabla 1), con una serie de preguntas abiertas detonantes de discurso referente a lo que sucedió en el aula. En el protocolo, las preguntas 1 y 2 sirvieron de control; las preguntas 3-5 para conocer la valoración cognitiva de las situaciones en el aula y las preguntas 6-8 para conocer las creencias matemáticas profesadas por los profesores participantes y detectar experiencias significativas que pudieran propiciar algún cambio de creencias.

Tabla 1. Protocolo para los auto-informes diarios

NOTA: Debido a que solemos olvidar detalles de nuestra experiencia de manera muy rápida, recuerda que es importante contestar las siguientes preguntas minutos después de que la clase haya terminado. Enviar en un solo audio las respuestas de todas y cada una:	
1	Díganos su nombre, la fecha y hora del informe.
2	¿De qué curso es este informe? ¿A qué hora impartió la clase?
3	¿Cómo se sintió durante su clase? Y ¿por qué?
4	Cuéntenos las experiencias positivas que haya vivido hoy en la clase de matemáticas ¿Por qué las considera experiencias positivas?
5	Cuéntenos las experiencias negativas que haya vivido hoy en la clase de matemáticas ¿Por qué fueron experiencias negativas?
6	¿Considera que su vivencia o experiencia de la clase de hoy cambió su idea o concepto de lo que son las matemáticas? ¿Por qué?
7	¿Considera que su vivencia o experiencia de la clase de hoy cambió su idea o concepto de lo que es aprender matemáticas? ¿Por qué?
8	¿Considera que su vivencia o experiencia de la clase de hoy cambió su idea o concepto de lo que es enseñar matemáticas? ¿Por qué?

Los auto-informes se recolectaron en el periodo de septiembre a noviembre, con base en la disposición de tiempo de los profesores. Se recolectaron 9 para EDO y 21 para GA, de 5-9 minutos cada uno. La diferencia de la cantidad de auto-informes por profesor se debió a que EDO contaba con un número menor de clases a la semana (mayor cantidad de horas por sesión). Además, de algunas dificultades en su institución, por ejemplo, suspensión de clase. Mientras que GA, impartía una mayor cantidad de clase semana con menor horas por sesión.

4. ANÁLISIS DE DATOS

Para el análisis de los auto-informes y la presentación de los resultados, utilizamos Rn-X para cada uno, con X=EDO o GA según corresponda y n varía de 1-9 para el profesor de EDO o 1-21 para el profesor de GA.

El conjunto de datos obtenidos fue transcrito y leído repetidamente para familiarizarse con el lenguaje de los profesores. El análisis de los mismos se realizó por profesor en cuatro fases: (1) Identificación de extractos que contengan creencias profesadas o valoraciones cognitivas de situaciones; (2) Identificación de las creencias profesadas y de las creencias implícitas (3) Triangulación entre investigadores (4) Organización de las creencias en tipos de creencias y presentación de los resultados.

Fase 1. Identificación de extractos que contengan creencias profesadas o valoraciones cognitivas

En esta fase se identificaron extractos sobre creencias matemáticas, se organizaron en profesadas cuando los profesores reconocen explícitamente que es una creencia, nos guiamos por frases como “yo creo que…”, “para mi…”, “yo pienso que debe ser…” “tal cosa es …”, “la verdad es …”, “siempre se debe de…”, “para… se tiene que…”, y en creencias implícitas cuando las inferimos a través de la valoración cognitiva de las situaciones que desencadenan una experiencia emocional. Para las implícitas consideramos extractos que expresan una valoración positiva o negativa de la situación suscitada en el aula, por ejemplo:

R1-EDO: "En cuanto a las *experiencias positivas*, siento que hoy **pusieron un poco más atención**, por lo regular están en el teléfono, están mandándose recaditos en papeles, [...] y pues **ahora si pusieron más atención** [...]. La parte *negativa* es que una estudiante que por lo regular **no pone mucha atención** estaba tejiendo durante la clase. Estoy explicando, y ella está tejiendo ahí un suéter o no sé qué este haciendo [tono molesto]. Ok, esa la parte negativa".

En este episodio identificamos la valoración cognitiva de las situaciones que desencadenan una experiencia emocional cuando el profesor EDO hace alusión a sus experiencias positivas y negativas, valoración positiva y negativa respectivamente, en la que buscamos los antecedentes con base en lo que el profesor realiza esa valoración, para el ejemplo observamos que es importante que los estudiantes pongan atención durante la clase, por lo que se convierte en un claro candidato de ser una creencia implícita en la valoración emocional.

Fase 2. Identificación de las creencias profesadas e implícitas

Una vez separadas los extractos del discurso de los profesores se construyó una tabla (Tabla 2) por cada auto-informe para organizar los extractos y tener una visión general de las creencias de los profesores. En la Tabla 2 utilizamos de ejemplo R1-EDO.

Tabla 2. Extractos de creencias implícitas y profesadas de R1-EDO

	Extractos	Creencias	
Valoración (+)	En cuanto a las experiencias positivas, siento que hoy pusieron un **poco más atención**, por lo regular están en el teléfono, están mandándose recaditos en papeles, [...]y pues ahora **si pusieron más atención. A**lgunas [estudiantes] **si participaron más de lo que otras veces**. Y entonces fue la experiencia positiva.	Los estudiantes deben poner atención en la clase [para que logren aprender matemáticas]	Creencias implícitas
Valoración (-)	La parte negativa es que una estudiante que de por lo regular **no pone mucha atención** que digamos estaba tejiendo durante la clase. Estoy explicando, y ella está tejiendo ahí un suéter o no sé qué este haciendo [tono molesto]. Ok, esa la parte negativa	Es importante que los estudiantes participen durante la clase.	

Aprender matemáticas	Reafirma lo que tengo pensado *[aprender matemáticas]* tienen que ver con si es una clase interesante, *si al estudiante le parece interesante o al menos tiene una motivación para aprender [...] si al menos existe una motivación para poner atención, entonces, a lo mejor la clase puede llevarse mejor.*	Para aprender matemáticas la clase debe parecerle interesante a los estudiantes. Para aprender matemáticas los estudiantes deben tener una motivación para aprender	Creencias promulgadas
Enseñar matemáticas	En cuanto al concepto de enseñar matemáticas [...] ***siento que se trabaja mejor si existe un ambiente de colaboración tanto del profesor como del estudiante,*** ese ambiente se logra si realmente están metidos en la clase, no nada más copiando lo que estoy escribiendo [...] incluso si escribo con errores y lo copian con errores. *Sin realmente reflexionar si está bien o está mal antes de escribir.*	Para enseñar matemáticas debe existir un ambiente de colaboración profesor-estudiante. Para aprender matemáticas los estudiantes deben reflexionar lo que hacen no solo copiar.	

Fase 3. Triangulación entre investigadores

Consistió en reuniones regulares en las que cada uno de los investigadores presentó sus interpretaciones en el proceso del análisis de los datos y éstas fueron discutidas a fin de llegar a puntos de acuerdo sobre las creencias que cada uno identificó en los extractos de discurso. La triangulación entre investigadores permite obtener la interpretación de varios investigadores sobre un mismo conjunto de datos, de modo que se discute la pertinencia y la validez de los análisis y esto ayuda a reducir la subjetividad propia del análisis cualitativo.

Fase 4. Organización de las creencias en tipos y presentación de los resultados

Ya identificadas las creencias, tanto implícitas como profesadas de cada uno de los auto-informes presentados por los profesores, se procedió a vaciar la información en una sola tabla (Tabla 3 y Tabla 4) para cada tipo. Para las creencias profesadas se optó por presentar solo las distintas creencias identificadas, sin tomar en cuenta la cantidad de veces que se identificó en los auto-informes.

5. RESULTADOS

En la Tabla 3 se muestran las creencias implícitas en las valoraciones cognitivas y en la Tabla 4 se presentan las creencias profesadas por los profesores en los auto-informes diarios.

Tabla 3. Creencias implícitas de los profesores EDO y GA

Creencia implícita	EDO Valoración		GA Valoración	
	f+	f-	f+	f-
Los estudiantes deben *poner atención* en la clase [para aprender matemáticas]	R1, R3, R7 (3)	R1, R2, R6, R8, R9 (5)	R1, R6, R7, R9, R10, R14, R17 (7)	R2, R12 (2)
Si los estudiantes *participan,* aprenden porque se involucran y forman parte de su propio conocimiento	R1, R3, R5, R7, R8, R9 (6)	R3, R5 (2)	R2, R5, R10, R11, R16, R19, R20, R21 (8)	
Los estudiantes deben *resolver problemas* para aprender matemáticas	R2, R3, R4, R5, R6, R7 (6)	R5 (1)	R8, R11, R15, (3)	R3, R8, R13, R17 (4)
Si los estudiantes *pasan al pizarrón* se puede interactuar con ellos y se desarrolla mejor la clase	R2, R7, R9 (3)		R2, R11 (2)	
Los estudiantes deben *mostrar interés* por aprender matemáticas	R6 (1)	R3 (1)	R1, R2, R7 (3)	R15, R19 (2)
Si los estudiantes *aportan ideas* en las clases se trabaja mejor			R2, R4, R5, R6 (4)	R8, R11, R18 (3)
Total de Valoraciones	19	9	27	11

Nota: f+ denota frecuencia de valoraciones positivas y f- para valoraciones negativas.

Tabla 4. Creencias matemáticas profesadas de EDO y GA

Creencias acerca de las matemáticas		
Matemáticas es...	EDO	resolver problemas
	GA	una forma de pensar y comprender la realidad que nos rodea
Creencias acerca de aprender matemáticas		
Aprender matemáticas es...	EDO	hacer matemáticas (resolver problemas)
	GA	construir razonamientos propios para resolver problemas reflexionar, analizar, pensar y dar respuestas coherentes
Para aprender matemáticas se debe...	EDO	tener interés y motivación de quien aprende hacer problemas de forma independiente aprovechar los espacios que dan los profesores para aclarar dudas pensar alrededor de los conceptos interactuar con el profesor
	GA	ser constante en la resolución de problemas tener iniciativa (adelantarse en los contenidos)
Creencias acerca de enseñar matemáticas		
Enseñar matemáticas es	EDO	propiciar la reflexión acerca del concepto que se quiere enseñar poder guiar en el descubrimiento realizar problemas en clase
	GA	inducir la abstracción de ciertas propiedades planteando preguntas guías
Para enseñar matemáticas se debe	EDO	propiciar un ambiente de cooperación entre profesor-estudiantes tener interés y motivación de los estudiantes interactuar con todos los estudiantes y pasarlos al pizarrón
	GA	plantear situaciones problemáticas dar sólo algunas ideas y permitir que el estudiante reflexione pensar y deducir enfrente de los estudiantes

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

6.1 Resumen de los resultados

Se identificaron seis creencias implícitas en las valoraciones cognitivas de los participantes, que pueden clasificarse en dos tipos: aquellas referidas al aprendizaje (poner atención, participar, resolver problemas y mostrar interés) y aquellas referidas a la gestión de clase (pasar al pizarrón y proponer ideas). Las creencias implícitas 'Los estudiantes deben *poner atención* en la clase [para aprender matemáticas]' y 'Si los estudiantes *participan*, aprenden porque se involucran y forman parte de su propio conocimiento' son las que más valoraciones cognitivas emocionales desencadenaron en ambos profesores. Las creencias implícitas son compartidas exceptuando 'Si los estudiantes *aportan ideas* en las clases se trabaja mejor', que sólo se identificó en el profesor GA.

Se identificaron 22 creencias matemáticas profesadas por los profesores del estudio, que organizamos en cinco categorías (Matemáticas, aprender matemáticas, para aprender matemáticas, enseñar matemáticas y para enseñar matemáticas). Para GA las matemáticas son "una forma de pensar y comprender la realidad" por tanto, "para aprender matemáticas el estudiante debe ser capaz de reflexionar, analizar, pensar y construir razonamientos coherentes ante la resolución de problemas", y esta creencia permea en su visión de la enseñanza en donde busca "inducir abstracciones", es importante plantear situaciones problemáticas, dar algunas ideas y permitir la autonomía de los estudiantes. Mientras que, para EDO, matemáticas es "resolver problemas", por lo que para él aprender matemáticas se debe "hacer matemáticas", lo que involucra realizar problemas constantemente, de manera independiente, con interés y motivación, así, el papel del profesor es guiar a los estudiantes a la reflexión y al descubrimiento a través de una interacción en el aula.

6.2 Sobre las creencias implícitas

Las creencias implícitas en las valoraciones cognitivas pueden servir como una lente a través de la cual los profesores participantes observan el comportamiento de los estudiantes. Por ejemplo, en la creencia implícita 'Si los estudiantes participan, aprenden porque se involucran y forman parte de su propio conocimiento' podemos inferir que el grupo de GA, desde la perspectiva de

GA, participó en las clases, ya que GA realizó más valoraciones cognitivas de las situaciones, evaluándolas como positivas bajo esa creencia. Mientras que el grupo de EDO parece, desde la perspectiva de EDO, más dispuesto a resolver problemas en la clase.

En las creencias implícitas destaca la importancia del aprendizaje de los estudiantes en las valoraciones cognitivas emocionales de los profesores, que se relacionan con su bienestar psicológico. Lo que hace a las creencias implícitas, creencias operativas y contextualizadas, con las que los profesores reconocen emocionalmente sus éxitos o fracasos en el salón de clases. Este resultado es consistente con lo que encontraron Martínez-Sierra *et al.* (2018) y Frenzel (2014), quienes señalan que la principal fuente de valoración cognitiva de las emociones de los profesores en el aula son los estudiantes y el cómo se espera que aprendan. Así como también corrobora nuestro planteamiento inicial: la importancia de las creencias matemáticas, en específico sobre el aprendizaje, son el principal antecedente de valoración emocional de los profesores.

Las creencias implícitas referentes a la *participación* y *poner atención* para aprender matemáticas son en las que más valoraciones realizaron los profesores participantes. Desde las teorías de valoración cognitiva de las emociones, esto implica que estas creencias, entre otras "preocupaciones", son en las que se basan los individuos para detectar y evaluar la importancia del medio ambiente para su bienestar (Moors, Ellsworth, Scherer, y Frijda, 2013, p. 119). Lo cual significa que, participación y atención de los estudiantes son aspectos importantes para el bienestar de los profesores en el desarrollo de la clase y, por tanto, variables a considerar en las planeaciones. Y debido a que las creencias pueden facilitar o dificultar la práctica, al enmarcar y guiar las decisiones y acciones de los profesores en el aula (Skott, 2009a, Skott, 2015; Solís, 2015; Jiménez y Gutiérrez, 2017; Cross, 2015; Thompson, 1992, Phillip, 2007, Fives y Buehl, 2012), las reacciones de los estudiantes, principalmente *participar* y *poner atención,* pueden explicar algunas decisiones de los profesores participantes, por ejemplo pasar al pizarrón a algunos de los estudiantes y resolver problemas durante la clase.

6.3 Sobre las creencias profesadas

Si se considera que las creencias de los profesores pueden ser transferidas a sus estudiantes, mientras aprenden matemáticas (Skott, 2009a; Phillip, 2007), los estudiantes de EDO, estarán expuestos a creencias como que las matemáticas son resolver problemas, mientras que los estudiantes de GA, estarán expuestos a la creencia de que las matemáticas son una forma de pensar. Esto debido a que, EDO muestra coherencia en cuanto a que la resolución de problemas permite entender las creencias sobre lo que son las matemáticas, cómo se aprende y cómo se enseña matemáticas, el caso de GA es semejante respecto a que la naturaleza de las matemáticas es una forma de pensar, esa creencia se muestra ligada a cómo se enseña y cómo se aprenden las matemáticas. Los estudiantes estarán, a lo largo de su vida, enfrentándose a distintas visiones de las matemáticas a través de sus profesores. En este estudio identificamos dos visiones distintas, pero cada una correspondiente con la formación de los docentes.

De las creencias profesadas sobre lo que son las matemáticas para cada participante, si se considera que las creencias filtran todo aquello que supone el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática (García, Azcarate, y Moreno, 2006), podemos decir que, las creencias profesadas pueden depender del curso y contexto en el que se ponen en juego, mientras que las creencias implícitas se pueden considerar un tanto independientes del contexto y del curso. Las creencias profesadas, en cambio, aunque siguen cierta coherencia entre las distintas creencias matemáticas, hacen posible que los profesores varíen su discurso para hacer adecuaciones de qué y cómo presentar el contenido, y de cómo identificar el aprendizaje de sus estudiantes en cada curso. Mientras que las valoraciones cognitivas de situaciones se realizan soportadas en creencias del comportamiento de los estudiantes, que son semejantes en cada curso.

6.4 Sobre el método de auto-informes

El método de muestreo constante, auto-informes diarios, nos permitió obtener datos contextualizados y cercanos a las valoraciones cognitivas emocionales. Una de las ventajas que nos brindó es observar la consistencia y estabilidad de ciertas creencias implícitas y profesadas. Al igual que Iida *et al.* (2012) y Zirkel, García, Murphy (2015) estamos convencidos de que el uso de los auto-informes permite el estudio de la subjetividad de las personas en contextos específicos, en este caso el aula de nivel superior, de una manera económica y ecológica, en este caso, nos permitieron analizar las creencias implícitas y profesadas de los participantes.

Si bien, el método de auto-informes diarios no había sido utilizado para identificar las creencias de los profesores durante la clase, resultó ser un medio novedoso para la identificación de creencias implícitas y profesadas por los profesores de este estudio. Nos permitieron conocer las creencias desde el punto de vista del profesor acerca del ambiente que vive en el aula día a día, dando indicios de su bienestar psicológico durante cada clase, puesto que cada auto informe fungió como un medio de desahogo y reflexión sobre su quehacer profesional.

6.5 Limitaciones y futuras investigaciones

Si bien nuestra investigación no busco explícitamente alcanzar los elementos de rigor canónicos propios de una investigación cualitativa –e.g. credibilidad, auditabilidad (confirmabilidad) y transferibilidad (Denzin y Lincoln, 1994)– consideramos que debido al tipo de datos recolectados y a la triangulación de las interpretaciones de los autores, alcanzamos en cierta medida tales elementos. Si bien no presentamos los resultados con los participantes, consideramos que nuestros resultados son creíbles dado que son producto de la triangulación de interpretación de los tres autores del presente artículo y dada la consistencia entre lo que los profesores dicen creer y lo que nosotros inferimos como sus creencias implícitas. Consideramos que la investigación es auditable, debido a que aquí hemos expuesto con detalle todo nuestro proceder metodológico de recolección y análisis de datos. Si bien los resultados que encontramos no pueden ser generalizados para otros contextos, consideramos que la investigación es transferible en el sentido que en cualquier contexto es posible inferir creencias implícitas y profesadas de profesores a través de los auto-informes de las experiencias (positivas/negativas) de sus clases.

Nuestro estudio enfrenta las limitaciones propias de los análisis cualitativos, narrativos y de caso. La manera en la que accedemos a las creencias profesadas de los profesores sigue siendo a través de sus declaraciones y, aunque las creencias implícitas fueron identificadas a través de las valoraciones emocionales, estas valoraciones son extraídas de las narraciones de los profesores. Sin embargo, consideramos que debemos acceder a las creencias de los profesores desde sus propias perspectivas y valoraciones, porque a pesar de que las creencias son subjetivas, sólo podemos llegar a ellas a través de sus expresiones y es importante no anteponerles valores externos.

Futuras investigaciones pueden explorar más sobre las creencias de profesores de nivel superior, ya que el campo necesita ser desarrollado, pensamos que las creencias de los profesores de nivel superior podrían impactar con mayor énfasis (que de otros niveles formativos) a las creencias de los estudiantes en proceso de profesionalización.

Este estudio da cuenta de la importancia de las creencias matemáticas en las valoraciones cognitivas y el bienestar de los profesores participantes, en este caso de nivel superior, futuras investigaciones pueden profundizar en el papel de estas creencias y de los distintos tipos de creencias en las decisiones de clase que los profesores toman durante el desarrollo de su práctica.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a CONACYT por la beca otorgada para llevar acabo esta investigación. Así, como a los profesores participantes y a los revisores de la revista Educación Matemática por sus atinadas observaciones que nos ayudaron para la presentación de nuestra investigación.

REFERENCIAS

Abd-El-Khalick y Lederman, N. (2000). Improving science teachers' conceptions of nature of science: a critical review of the literature. *International Journal of Science Education, 22* (7), 665-701. https://doi.org/10.1080/09500690050044044

Andrew, P. y Xenofontos, C. (2015). Analysing the relationship between the problem-solving-related beliefs, competence and teaching of the three Cypriot primary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(4), 299-325.

Beswick, K. (2007). "Teachers' beliefs that matter in secondary mathematics class- rooms". *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 95-120.

Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians´ mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 127-147. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9333-2

Charalambous, C., Panaoura, A., y Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers´beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program, *Educational Studies in Mathematics, 71*, 161-180. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9170-0

Cross, D. I. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(5), 325-346.

Cross, D. I. (2015). Despelling the notion of inconsistencies in teachers' mathematics beliefs and practices: A 3-year case study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*, 173-201.

Denzin, N.K. y Lincoln Y.S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Sage Thousand Oaks.

Di Martino, P. y Sabena, C. (2010). Teachers' beliefs: The problem of inconsistency with practice. In M. Pinto, y T. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2), PME.

Fives, H. y Buehl, M. M. (2012). Spring cleaning for the "messy" construct of teachers' beliefs: what are they? Which have been examined? What can they tell us? In K.R. Harris, S. Graham, y T. Urdan (Eds.). *APA Educational Psychology Handbook. Individual Differences and Cultural and Contextual Factors* (Vol. 2, pp. 471-499*)*. American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13274-019

Förster, F. (2011). Secondary Teachers' beliefs about teaching applications-Design and Selected results of a qualitative case study, In G. Kaiser *et al*. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling,* Springer Science+Business Media B.V. (pp. 65-74). https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_8

Frenzel, A. C. (2014). Teacher emotions. In R. Pekrun y L. Linnenbrink-Garcia (Eds.), *International handbook of emotions in education* (pp. 494-519). Routledge.

Frijda, N. H. (2007). *The laws of emotion*. Lawrence Erlbaum.

Frijda, N.; Mesquita, B. (2000). Beliefs through emotions. In N. Frijda, A. Manstead, y S. Bem (Eds.), *Emotions and Beliefs: How Feelings Influence Thoughts (Studies in Emotion and Social Interaction)* (pp. 45-77). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511659904.003

Furinghetti, F. y Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond: Hows and whys in the teaching of proof. *ZDM Mathematics Education, 43*, 587-599.

García, L., Azcárate, C., Moreno M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *RELIME, 9*(1), 85-116.

Grootenboer, P. (2008). Mathematical belief change in prospective primary teachers. *Journal Mathematics Teacher Education, 11,* 479-497. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9084-x

Handal, B. (2003). Teachers' Mathematical Beliefs: A Review. *The Mathematics Educator, 13*(2), 47-57.

Hidalgo, S. Maroto, A., y Palacios, A. (2015). Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros. *Educación Matemática, 27*(1), 65- 90.

Iida, M., Shrout, P., Laurenceau, J., y Bolger, N. (2012). Using diary methods in psychological research. *APA Handbook of Research Methods in Psychology. Foundations, Planning, Measures and Psychometrics*, (Vol. 1, pp. 277–305). http://doi.org/10.1037/13619-016

Jiménez, A., Gutiérrez, A. (2007). Realidades escolares en las clases de matemáticas. *Artículos de investigación, 29*(3), 109-129. https://doi.org/10.24844/EM2903.04

Kul, U., Celik, S. (2007). Exploration of pre-service teachers' beliefs in relation to mathematics teaching activities in classroom-based setting. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3*(1), 245-257.

Liljedahl, P. (2009). Teachers' insights into the relation ship between beliefs and practice. En J. Maasz y W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results* (pp. 44-54). Sense Publishers.

Martínez-Sierra, G., Arellano-García, Y., Hernández-Moreno, A., Nava-Guzmán, C. (2018). Daily emotional experiences of a high school mathematics teacher in the classroom: a qualitative experience-sampling method. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(3), 1-21.

Misfelddt, M., Jankvist, U.T. y Sánchez, M.S. (2016). Teachers´ beliefs about the discipline of mathematics and the use of technology in the classroom, *Mathematics education, 11*(2), 395-419. https://doi.org/10.12973/iser.2016.2113ª

Moors, A., Ellsworth, P. C., Scherer. K. R., y Frijda, N. H. (2013). Appraisal Theories of emotion: State of the Art and Future Development. *Emotion Review, 5*(2), 119-124.

Perry, B., y Howard, P. (1999). Head mathematics teachers´ beliefs about the learning and teaching of mathematics, *Mathematics Education Journal, 11*(1), 39-53.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Information Age Publishing.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 550-576.

Riley, M. E. L. (2007). A typological analysis: understanding pre-service teacher beliefs and how they are transformed, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(3), 355-383. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1360526

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Larning* (pp. 334-370). Macmillan.

Skott, J. (2015a). The promises, problems, and prospects of research on teachers' beliefs. En H. Fives y M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of research on teachers' beliefs* (pp. 13-30). Routledge.

Skott, J. (2015b). Towards a Participatory Approach to "Beliefs" in Mathematics Education. En B. Pepin y B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 3-23).

Skott, J. (2009a). Contextualising the notion of 'belief enactment'. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(1), 27-46.

Solís, C. (2005). Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje en docentes universitarios: revisión de algunos estudios. *Propósitos y Representaciones, 3*(2), 227-260.

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., y Macgyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education, 17*(2), 213-226.

Schutz, P., Hong, J. Y., Cross, D., y Osbon, J. N. (2006). Reflections on investigating emotion in educational activity settings. *Educational Psychology Review, 18*(4), 343-360. https://doi.org/10.1007/s10648-006-9030-3

Thompson, A. (1992). "Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research". En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). Macmillan.

Yin, R. (2009). *Case study research*. Sage Publications.

Žalská, J. (2012). Mathematics teachers' mathematical beliefs: A comprehensive review of international research. *Scientia in Educatione, 3*(1), 45-65.

Zhang, Q., y Morselli, F. (2016). Summary and looking ahead. In M. S. Hannula, P. Di Martino, M. Pantziara, Q. Zhang, F. Morselli, E. Heyd-Metzuyanim, S. Lutovac, R. Kaasila, J. A. Middleton, A. Jansen y G. Goldin (Eds), *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education: An ICME study 13* (pp. 23-26). Springer.

Zirkel, S., García, J. A., y Murphy, M. C. (2016). Experience-sampling research methods and their potential for education research. *Educational Researcher, 44*(1), 7-16. https://doi.org/10.3102/0013189 X14566879.

Antonia Hernández Moreno

Dirección: Centro de Investigación en Matemática Educativa-Facultad de Matemáticas-UAGRO, Av. Lázaro Cárdenas S/N, Ciudad Universitaria C.P. 39074, Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México

Teléfono: 747-77-19310 Ext. 4139

 DOI: 10.24844/EM3202.05

Memoria operativa, ansiedad matemática y habilidad aritmética en docentes de educación básica en formación

Working Memory, math anxiety and arithmetic skills in elementary education preservice teachers

Ismael Esquivel-Gámez[1]
Flora Lilia Barrios-Martínez[2]
Karina Estela Gálvez-Buenfil[3]

Resumen: Dado el impacto que tendrán los docentes en formación, en el aprendizaje de las matemáticas por los niños, en cuanto a su actitud hacia las matemáticas y su habilidad aritmética, se ha desarrollado el presente estudio. Para ello, se explora la relación entre los niveles de memoria operativa, ansiedad matemática y habilidad aritmética, en 39 estudiantes de docencia de una institución particular del sureste mexicano. Para medir la memoria operativa en ambos dominios, se usaron tareas de alcance complejo, para la percepción sobre ansiedad matemática se aplicó la escala Perfil de Ansiedad Matemática y para la habilidad aritmética, un conjunto de problemas verbales extraidos de las guías públicas para el examen nacional de ingreso a la educación media superior del Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior en México. Como en otros estudios, existe asociación positiva entre la capacidad de memoria operativa y la habilidad aritmética, y negativa entre la primera y

Fecha de recepción: 17 de mayo de 2019. **Fecha de aceptación**: 25 de octubre de 2019.

[1] Universidad Veracruzana, Campus Veracruz, Facultad de Administración, iesquivel@uv.mx, orcid.org/0000-0001-7914-5170.

[2] Centro de Actualización del Magisterio en Veracruz, florabarrios@gmail.com, orcid.org/0000-0003-3729-560X.

[3] Universidad Veracruzana, Campus Boca del Río, Facultad de Pedagogía, karigalfil@hotmail.com, orcid.org/0000-0003-2485-4687.

el nivel de ansiedad matemática, en su escala de actitudes; lo cual abre posibilidades futuras de mejorar la primera, mediante entrenamiento adaptativo y verificar el impacto en las dos últimas.

Palabras clave: *Memoria operativa, ansiedad matemática, habilidad aritmética, docentes en formación*

Abstract: This study has been developed given the impact that will have the attitude towards mathematics and the arithmetic ability of the preservice teachers, with their future students learning math. For this, we explore the relationship between the Working Memory levels, math anxiety and arithmetic skills of 39 students from a private institution on the southeast of Mexico. To measure Working Memory in both domains, complex span task were used, for the math anxiety perception the Mathematical Anxiety Profile scale was applied and for the arithmetic ability, a set of verbal problems extracted from the public guides for the national admission high school exam of the National Center for Evaluation of Higher Education in Mexico. As in other studies, a positive association has been found between the Working Memory capacity and the arithmetic skills, and negative between the first and the level of math anxiety, in its scale of attitudes; which opens future possibilities to improve the first one and verify the impact in the last two.

Keywords: *Working memory, math anxiety, arithmetic skills, preservice teachers, mathematics education.*

1. INTRODUCCIÓN

Investigaciones diversas (Chang y Beilock, 2016; Ruff y Boes, 2014) afirman que las actitudes, emociones y creencias de los profesores impactan de manera importante a la forma en que enfrentan a sus estudiantes en el aula de clases y, en especial a las matemáticas ya que pueden transferirles sus miedos y prejuicios al aprendizaje de las mismas; siendo este un factor que influye significativamente en la formación de actitudes positivas o negativas. Los efectos de la ansiedad se pueden manifestar a lo largo de la vida en detrimento del desarrollo vocacional y académico. Tan solo en Estados Unidos 93% de la población adulta ha reconocido haber experimentado cierto grado de AM (Luttenberger, Wimmer, y Paechter, 2018, p.312) y esta situación se replica en muchos otros países donde se han llevado a cabo investigaciones similares. Por lo anterior, se ha desarrollado el presente estudio, cuyo objetivo es medir la capacidad de la memoria operativa, la habilidad aritmética y los índices de ansiedad matemática de estudiantes de docencia y determinar los niveles de asociación entre los constructos. Inicialmente, se documentan los correspondientes constructos, los estudios que han encontrado asociaciones entre ellos, para luego dar paso a la descripción del método y la discusión de resultados, para finalmente presentar las conclusiones.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Ansiedad matemática (AM)

Frecuentemente se define como "sentimientos de tensión y ansiedad que interfieren con la manipulación de los números y la resolución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones de la vida y académicas" (Richardson y Suinn, 1972, p. 551). Estos sentimientos negativos suelen desencadenar síntomas físicos como el aumento de la frecuencia cardiaca, sudoración, dolor de cabeza y desorganización mental (Tobias y Weissbrod, 1980, p. 65). Los diversos grados de ansiedad causada por enfrentarse a situaciones que involucran a las matemáticas, bajo condiciones de demanda cognitiva, provoca que se presenten diferencias entre sus habilidades numéricas y desempeño en el área de las matemáticas desde tempranas edades (Vukovic *et al.*, 2013, p. 7), siendo esto un obstáculo a vencer para lograr aprendizajes significativos (García-Santillán *et al.*, 2017, p. 175).

La AM ha sido investigada en los distintos niveles desde la educación básica (Fernández, 2015; Mammarella *et al.*, 2015; Wright, 2017), media superior (Erdem y Keklik, 2013; Mutodi y Ngirande, 2014) y superior (Cleary, 2017; Shi y Liu, 2016a). También se ha estudiado bajo sus distintas dimensiones como la ansiedad estado, ansiedad rasgo (García-López, 2016), ansiedad hacia las evaluaciones (Casari, Anglada, y Daher, 2014), hacia las tareas matemáticas y hacia los cursos de matemáticas o bien en función de las creencias, actitudes y emociones que provoca (Eccius-Wellman, Lara-Barragán, Martschink, y Freitag, 2017).

Diversos estudios aportan información respecto a los factores que magnifican este problema. Algunos tienen que ver con las características de personalidad del individuo como el temperamento, actitud y motivación propia (Fernández, 2015, p. 29; García-Santillán *et al.*, 2016, p. 369; Rabab'h y Veloo, 2015, p. 4) y otros, con múltiples factores externos como los culturales, sociales y académicos entre otros (Chang y Beilock, 2016, p. 34; Dowker *et al.*, 2016, p. 10). Por su parte, Foley et al. (2017, p. 56), Mutodi y Ngirande (2014, p.289) y Pletzer *et al.* (2016, p. 12) mencionan que el género también es un factor que puede potenciar a la AM.

Con el fin de medir el grado de ansiedad hacia las matemáticas se han empleado múltiples instrumentos y técnicas a lo largo de más de seis décadas de su estudio. Desde que el concepto de "*mathemaphobia*" fue acuñado por Gough (1954) han sido creadas y validadas escalas de autopercepción que aportan información relevante al tema: Escala de actitudes hacia las matemáticas (Aiken Jr. y Dreger, 1961, p. 19); MARS (*Math Anxiety Rating Scale*) de Richardson y Suinn (1972, p. 13); MAS (*Mathematics Anxiety Scale*) de Fennema y Sherman (1978, p. 325); conformados como la base para diversas adaptaciones al contexto social y cultural de diferentes países.

2.2 Habilidad aritmética como base de las matemáticas

Para la Common Core State Standards Initiative (2019), las matemáticas se conceptualizan en función de seis ramas principales; las cuales incluyen al conocimiento básico de los números (números cardinales, ordinales, conocimiento de los dígitos arábigos y estimación numérica), cálculos numéricos (de uno o más dígitos), fracciones, geometría, álgebra y solución de problemas verbales.

Una habilidad básica que se desarrolla a lo largo del aprendizaje de las matemáticas es la aritmética, que está asociada a la capacidad que desarrollan los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas matemáticos básicos, útil en el análisis, razonamiento y proceso de resolución. Esta habilidad es practicada aun en la vida diaria y según Zamora *et al.* (2018, p. 107) es parte fundamental en el aprendizaje y desempeño de todas las materias relacionadas con la solución de problemas.

Aunio y Räsänen (2016, p. 2) enfatizan el hecho de que las habilidades numéricas desarrolladas en etapas tempranas como la de conteo, aritmética básica, conocimiento de los números, cálculo no verbal, combinación de números, cálculo verbal, comparación lineal y de magnitud, lectura de números y relación lógica de los números son predictores de problemas en el futuro desempeño matemático.

En el nivel superior en México, Ramos, Zamora-Lugo y Figueroa-Rodriguez (2018, p. 105) reportan que los resultados del EXANI II (de ingreso al nivel superior) y EXANI III (de ingreso a postgrado) del CENEVAL en el área de pensamiento matemático han decaído entre los años 2014 al 2016, lo que indica deficiencias en los conocimientos básicos para cursar eficientemente dichos niveles educativos.

2.3 Memoria operativa

Se encarga de almacenar temporalmente y actualizar una pequeña cantidad de datos, que están accesibles para, mediante el uso de estrategias, manipularlos en tiempo real posteriormente (Jonides, Lacey y Nee, 2005, p. 2). Para operaciones que implican comprender el lenguaje, procesar datos rápidamente y al resolver problemas, preservar los objetivos es de gran importancia (Etchepareborda y Abad-Mas, 2005, p. 80, Flores y Ostrosky-Shejet, 2012, p. 9).

El modelo de componentes múltiples de Baddeley y Hitch de 1974, revisado por Baddeley (2012, p. 6, 2012, p. 12) ha sido especialmente útil para su análisis. Este modelo propone que la memoria operativa está conformada por un componente ejecutivo central, que se divide en dos subsistemas: el bucle fonológico y la agenda visoespacial y, el búfer episódico. La central ejecutiva es una instancia de control de la atención para eventos relacionados con contenidos dentro la MO así como para los que se encuentran fuera de ella (Jaroslawska, Gathercole, Logie y Holmes, 2016, p. 2). El bucle fonológico es el depósito temporal y el repaso de estímulos verbales, que maneja a su vez, dos subsistemas, un almacén de síntesis articulatoria y uno fonológico (Flores y Ostrosky-Shejet, 2012, p. 9). La agenda viso-espacial, mantiene temporalmente información visual y espacial; la cual es usada para planear movimientos y está asociada a la aptitud espacial y tareas vinculadas (Etchepareborda y Abad-Mas, 2005, p. 80). Por su parte, Arteaga y Pimienta (2006, p. 255-259) proponen que está formada por componentes visuales, espaciales y cinéticos. Los primeros encargados de percibir “el qué”; los segundos de la ubicación y transmisión de “el dónde” y los últimos de apoyar el correcto movimiento. Por último, el búfer episódico es el encargado de mantener una relación entre los tres y la memoria de largo alcance; filtrar los estímulos conforme a su naturaleza y, aunque es un componente temporal, acceder a la memoria de largo plazo, sea para aprender o recuperar (Saeed, 2011, p. 17-18).

2.4 Capacidad de la memoria operativa y su medición

De acuerdo con Conway *et al.* (2005, p. 769), los avances teóricos en el estudio del comportamiento humano desde la revolución cognitiva han colocado a la memoria operativa como un constructo central en la psicología. Para ellos, dado que la MO es un sistema multicomponente responsable del mantenimiento activo de la información frente al continuo procesamiento y/o la distracción, las tareas de alcance para medir su capacidad, se crearon para requerir no solo el almacenamiento y ensayo, sino también el procesamiento simultáneo de información adicional. Conforme a Carruthers (2016, p. 108), en una tarea de alcance, se maneja un distractor, tal como verificar si una frase es lógica o una ecuación es correcta, mientras se intenta memorizar una lista de elementos no relacionados, por tanto hay dos fuentes de datos: el componente de procesamiento de la tarea y el componente de almacenamiento. Con estos instrumentos y conforme a Kane *et al.* (2004, p. 774), hay evidencia de que generalmente, quienes recuerdan la mayoría de los estímulos también obtienen mayor precisión en la tarea de procesamiento, por lo cual no existe una compensación entre ambas.

Dado que dichas tareas no son perfectas o puras, ya que las puntuaciones obtenidas están influenciadas por algo estable, con una pequeña contribución de error debido a fluctuaciones aleatorias (Conway *et al.*, 2005, p. 777), una estrategia de investigación es administrar múltiples tareas porque una sola medida contiene la varianza específica de dicha tarea y al recopilarse múltiples medidas, la varianza compartida entre estas tareas es una mejor representación de la CMO. Además, dado que las correlaciones entre tareas de alcance, según Kane *et al.* (2004, p. 200), generalmente varían de 0.40 a 0.60, sugieren que están aprovechando alguna capacidad común, pero también sugiere que no son idénticas.

A partir del análisis hecho por Conway *et al.* (2005, p. 783), diversos investigadores han aplicado medidas similares, con la idea de validar sus adecuaciones o bien asociar sus puntajes con los de otros constructos. Enseguida, brevemente se describen estudios previos que han trabajado con poblaciones de universitarios reportados sin desórdenes mentales, como en el presente trabajo y en los cuales se reportan tanto las características de las pruebas como del proceso de aplicación, para tener elementos de constraste con las aquí usadas.

Debido al tiempo que se consume en aplicar las tradicionales pruebas de alcance, Foster *et al.* (2015, p. 2) probaron un método con 589 universitarios para maximizar la precisión, a la vez que se agilizaba la aplicación de las pruebas de alcance de operaciones, simetría y rotación; cuyas particularidades eran que el número de elementos a recordar y los distractores correspondientes variaba de forma aleatoria de un intento a otro; teniendo tres intentos en cada bloque. Adicionalmente, para reducir la habilidad de las personas para ensayar lo que había que recordar, se les pedía respondieran al distractor (operación, matriz o letra) dentro de un tiempo equivalente a 2.5 desviaciones estándar de su tiempo promedio.

Agarwal, Finley, Rose y Roediger (2016, p. 2) examinaron en 156 universitarios los efectos de la práctica de recuperación en función de: el tiempo transcurrido o el número de elementos entre la práctica inicial y los intentos de recuperación, el retraso entre la práctica inicial y final y la presencia o ausencia de retroalimentación durante la recuperación inicial. La CMO se evaluó de manera individual o grupal con una prueba de alcance de operaciones. Con una duración aproximada de 10 minutos se presentaron 75 pares operación-letra en bloques con tamaños de 3 a 7 pares, presentando diferentes tamaños de manera aleatoria.

Con la intención de examinar las asociaciones combinadas entre el tiempo de reposo y de actividad física con la CMO y el rendimiento académico, Felez-Nobrega *et al.* (2017, p. 742) trabajaron con 371 universitarios con las pruebas de alcance de operaciones, de simetría y de rotación; aplicadas en grupos de 15 participantes. Las pruebas fueron similares a las propuestas por Foster *et al.* (2015). Para la prueba de operaciones, se tuvieron dos bloques, cada uno de 25 pares de operación-letra y para las de simetría y rotación, se tuvieron 14 pares, con dos y tres bloques respectivamente.

Felez-Nobrega *et al.* (2018, p. 2) validaron las pruebas anteriores en una población de 325 universitarios de habla hispana. Para ello, tradujeron las instrucciones del inglés al español y luego de las mediciones, se obtuvieron coeficientes alfa de Cronbach para determinar la consistencia interna y, la validez fue hecha con la comparación de los puntajes de las pruebas con los obtenidos en dos pruebas de razonamiento y un análisis factorial confirmatorio.

El objetivo del estudio de Foster y otros (2017, p. 1678) fue determinar el grupo más beneficiado con entrenamiento cognitivo (baja *vs.* alta CMO). Para ello, trabajaron con 116 estudiantes entre 18 y 35 años, cuya capacidad se evaluó con pruebas de alcance de rotación y otra de lectura modificada, en la cual se tenía que recordar una figura en lugar de una letra. En la primera, se trabajó desde 2 hasta 9 pares letra-flecha y en la segunda, de 3 a 11 pares frase-figura. Ambas pruebas presentaban los estímulos al azar, de modo que no hubo necesidad del contrabalanceo.

Kray y Fehér (2017, p. 4) en su estudio pre y postest, buscaron determinar el impacto de las demandas de inhibición y memoria de trabajo en la transferencia y mantenimiento de mejoras en la conmutación de tareas, inducidas por entrenamiento cognitivo, desde la perspectiva de 81 jóvenes y 81 adultos mayores. Para medir la CMO se usaron las pruebas de alcance de lectura y conteo, recortadas de 12 a 8 intentos y para la actualización de memoria, la prueba Atrás N Verbal (N = 2, 3).

Para explorar cómo los estudiantes bilingües utilizan su CMO bajo diferentes cargas cognitivas y entender qué lleva a los bilingües a inhibir una respuesta predominante y permitir una respuesta más adaptable y cuándo y cómo ocurre, fueron los objetivos de Yang y Yang (2017, p. 4). En su comparación, entre 25 estudiantes bilingües y 25 monolingües en inglés como lengua nativa, fueron evaluados en su CMO base, con la prueba de alcance de operaciones en la cual, en una sola pantalla aparecían la operación y la letra a memorizar, todo ello se leía en voz alta y luego bajo el control del participante, se presentaba la siguiente pantalla, hasta terminar.

Yue *et al.* (2017, p. 6), a partir de estudios que analizan el cerebro como una red en lugar de un conjunto de regiones inconexas, deseaban probar que las redes de alta modularidad favorecían el rendimiento en tareas simples, mientras que las redes de baja, el rendimiento en tareas más complejas. Para ello, midieron la CMO en 52 universitarios con una prueba de alcance de operaciones, la cual manejaba en distintas pantallas, la operación, el resultado y la letra a memorizar. Antes de la aplicación, los estudiantes tuvieron tres bloques de práctica con 2, 3 o 4 ítems. En el primer bloque, solo recordaban la letra, en el segundo resolvían la operación y en el último, ambos.

En su estudio, Li, He, Wang, Hu y Guo (2017, p. 2) investigaron si el entrenamiento en eficiencia de filtrado visual podría mejorar la CMO visual y evaluaron el efecto de transferencia de dicho entrenamiento en la CMO verbal y fluidez de inteligencia, en 38 universitarios diestros con visión normal y sin daltonismo, acreditado con la prueba de Ishihara. Para las mediciones, se usaron las pruebas de alcance de operaciones y palabras, la cual difiere de la primera en que se memoriza una palabra en lugar de una letra. Los participantes leían en voz alta la pareja de elementos verbales y daban su respuesta al presionar uno de dos botones. En total, hubo 15 series y 60 parejas operación-palabra, las cuales fueron diferentes pero paralelas en los diversos momentos de medición.

Dokić, Koso-Drljević y Dapo (2018, p. 3) trabajaron con 504 universitarios de primer año, con dos objetivos: verificar el efecto en las propiedades psicométricas de las pruebas de Operaciones, Lectura y Simetría al aplicarse en modalidad grupal; y determinar discrepancias entre aplicar o no, el criterio de precisión mayor al 85% (Conway *et al.*, 2005, p. 775). Las pruebas se administraron en una sola hora, en orden contrabalanceado, en grupos de dos a cuatro participantes, quienes fueron sentados de modo que cada uno estaba de espalda o de lado respecto de los demás. Se aseguraron que todos siguieran el mismo ritmo, cuidando que comenzaran la tarea al mismo tiempo y que al terminar, permanecieran sentados para evitar distracciones.

Coleman, Watson y Strayer (2018, p. 3) analizaron el cruce factorial de las instrucciones de la tarea (velocidad vs. precisión) y las diferencias individuales en la CMO (alta *vs*. baja) para producir comparaciones empíricas interesantes que podrían ser teóricamente útiles en esclarecer y disociar diversos mecanismos de control cognitivo. Con ello en mente, hicieron mediciones en 250 universitarias con la prueba de alcance de operaciones, excluyendo aquellas cuya precisión estuvo por debajo del 85%. Luego se invitó a 50 de ellas, con los puntajes del cuartil más alto (25) y del más bajo (25); para ser evaluadas individualmente con la prueba automatizada de flancos de Eriksen y Eriksen (1974, p. 144); bajo condiciones de velocidad versus precisión.

Es notable encontrar en los estudios revisados, que la prueba de Operaciones es la más común y en ocasiones la única medida de la CMO, lo cual es posible, se deba a lo establecido por Foster *et al.* (2015, p. 2), sobre la intención de obtener mediciones en menos tiempo, usando pocos instrumentos para obtener conclusiones sobre la CMO. Por lo anterior, en el presente trabajo se ha decidido realizar mediciones con diferentes tareas de la CMO en los dominios visual y verbal, minimizando el tiempo al ser aplicadas de manera grupal y evitando que aquellos que son mejores en el procesamiento, aprovechen para ensayar los elementos memorizados, por la forma en que se construyeron las tareas, que se describen más adelante. Las diferencias, con trabajos previos revisados, en cuanto a la funcionalidad de las pruebas usadas y su administración para el presente trabajo, se centran básicamente en que cada prueba tiene 3 intentos en sus 4 niveles, los cuales se distinguen por la cantidad de elementos a memorizar y que van desde 2 hasta 5; con un total de 42 elementos. Cuando aparece el distractor, el participante debe escoger la respuesta de entre dos opciones que aparecen en la pantalla. Al momento de recuperar los elementos memorizados, el participante tiene que registrarlos, ya que no cuenta con opciones para elegir. Adicionalmente, una prueba de alcance de razonamiento basada en analogías, adaptada del trabajo de Gutiérrez-Martínez, García-Madruga, Carriedo, Vila y Luzón (2005, p. 8), se modificó para que tuviera una estructura similar a las desarrolladas y validadas por Kane *et al.* (2004, p. 196). No manejan una sesión de práctica y en su lugar, los participantes pueden, previamente a la resolución, revisar videos demostrativos. Bajo la supervisión de un aplicador, se pueden aplicar, de manera individual o grupal, por lo cual se omite la lectura en voz alta y se resuelven al ritmo del propio participante.

2.5 Memoria Operativa y Ansiedad Matemática

Los estudios realizados por Mavilidi, Hoogerheide, y Paas (2014); Sovansky (2013), aportan evidencia significativa del efecto positivo que tiene la disminución de la AM sobre la Capacidad de Memoria Operativa (CMO), potenciándose las habilidades numéricas ya sea por el solo hecho del control de las emociones negativas y pensamientos intrusivos (técnica de la defusión cognitiva) y la implementación de estrategias que la minimicen.

Otras investigaciones (Shi y Liu, 2016a) aportan evidencia del hecho de que al potenciar la CMO se disminuye el nivel de AM y posibilita que la capacidad de razonamiento mejore. Entre los resultados obtenidos por ellos, se menciona el hecho de que sujetos con alta AM manifiestan su condición de estrés principalmente en ejercicios de MO que involucren a los números como elementos a recordar o manipular y en los niveles de mayor complejidad de las tareas de alcance de lectura. También mencionan que no existe diferencia entre individuos con baja o alta AM en lo que respecta a tiempos de reacción y precisión, para pruebas de MO, que no contengan números.

Múltiples estudios demuestran que existe una correlación negativa entre AM y la CMO (Passolunghi *et al.*, 2016, p. 6; Shi y Liu, 2016b, p. 8; Walker, 2013, p. 44). La relación entre AM y MO ha sido documentada como factor determinante en el pobre desempeño académico en el área de las matemáticas; siendo las mujeres quienes presentan índices de ansiedad significativamente superiores (McAuley, 2015, p. 40). Este último hecho puede deberse a condicionantes externos que las afectan desde muy temprana edad (Geist, 2015, p. 330).

Ruff y Boes (2014, p. 9) observaron un efecto negativo de la AM sobre el desempeño académico y García-López (2016, p. 36) en su estudio documental sobre la AM describe varias correlaciones existentes con el desempeño académico en el área de las matemáticas, presentándose con la MO como la más fuerte seguida de los estereotipos sociales (género y grupo étnico).

Otros estudios arrojan evidencia significativa de que la CMO del tipo viso-espacial tiene una fuerte influencia sobre la AM, la motivación y los logros matemáticos, además de tener influencia parcial en la relación entre la actitud y los logros matemáticos por lo que sugieren que los maestros deben enfocarse en la mejora de la habilidad viso-espacial para lograr mejoras en el desempeño matemático, ya que los mecanismos mentales para resolver problemas son los mismos desarrollados durante actividades viso-espaciales (Rabab'h y Veloo, 2015, p. 8).

Luttenberger *et al*. (2018, p.314) concluyen que el desbalance entre AM y MO se debe a deficiencias en el proceso cognitivo de tal forma que vuelve difícil el resistir las disrupciones de pensamientos irrelevantes que interfieren a los estímulos enfocados a las tareas relevantes. Acorde a Ashcraft y Krause (2007), el bajo desempeño dispara la ansiedad matemática y ésta lleva a bajos desempeños en situaciones relacionadas con tareas numéricas. La AM afecta de manera significativa la fluidez de resolución de problemas matemáticos. Los estudiantes adultos con alta AM son más ineficientes para completar operaciones por minuto con un mayor número de dígitos que, aquellos con baja AM. No solo afecta los procesos cognitivos matemáticos, sino también afecta los procesos cognitivos globales que dependen de la fluidez de inteligencia.

2.6 Memoria Operativa y habilidades aritméticas

La capacidad de resolver problemas verbales presenta una alta correlación con la MO (Peng *et al*., 2016, p.457). Los autores concluyen que la correlación entre la MO y las matemáticas en general es de magnitud media (r=0.35) y que los efectos que el tipo de habilidad matemática (conocimiento numérico básico, cálculo numérico, operaciones de un solo dígito, operaciones con varios dígitos, fracciones, resolución de problemas verbales, geometría y álgebra) tiene sobre la relación MO-competencia matemática son significativos. El cálculo numérico y la geometría son las habilidades con mayor y menor correlación con la MO.

La investigación realizada con estudiantes no graduados por Vallée-Tourangeau, Sirota, y Vallée-Tourangeau (2016, p. 3) relacionada con el impacto a la MO al realizar cálculos mentales con números de un solo dígito sugiere que la interactividad aumenta el grado de recursos de MO y disminuye el efecto de la AM al realizar sumas. Los participantes obtuvieron un mayor porcentaje de respuestas correctas en ausencia de la supresión articulatoria (proceso por el cual hablando se inhibe el desempeño de la memoria, mientras son presentados elementos que hay que recordar) y bajo condiciones de alta interactividad con los elementos.

2. MÉTODO

Se partió de un enfoque cuantitativo con un tipo de estudio descriptivo, no experimental, transversal y prospectivo. A continuación, se presentan las características de los participantes, los instrumentos aplicados, el procedimiento seguido y las condiciones de aplicación de las mediciones.

3.1 Participantes

Formaron parte del estudio, todos los estudiantes (N=39) de una institución particular formadora de docentes en una zona urbana del centro del estado de Veracruz, México. Los jóvenes formaban parte de las Licenciaturas en Educación Preescolar y Primaria de 1°, 3°, 5° y 7° semestre. La edad de los participantes fue de 18 a 23 años y 97.4% fueron mujeres. Los participantes leyeron y firmaron un documento dando su consentimiento previo al inicio de la investigación y su participación no estuvo relacionada con asignatura alguna y los resultados obtenidos no afectaron sus calificaciones.

3.2 Instrumentos

Ansiedad Matemática. Se empleó la escala validada para México por Eccius-Wellmann y Lara-Barragán (2016) conocida como "Perfil de Ansiedad Matemática" (PAM). Esta escala de 20 ítems presenta enunciados sobre las actitudes, emociones y creencias alrededor del aprendizaje de las matemáticas. Los ítems fueron construidos con base a una escala de Likert desde 1 (casi nunca) hasta 5 (casi siempre) para un mínimo de 20 y un máximo de 100 puntos.

Examen de aritmética. Aunado a la escala de ansiedad, se aplicó un examen electrónico incorporado a una plataforma Moodle, con 12 problemas de aritmética con 4 opciones de respuesta (Ejemplo: Un adolescente envía 42 mensajes por celular en 2 horas. ¿Cuántas horas le tomará enviar 252 mensajes?) Dichos problemas se extrajeron de las guías públicas para el Examen Nacional de Ingreso a la Educación Media Superior (EXANI I) del Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (CENEVAL, 2018) en México.

Memoria operativa. Se utilizó el software NeuronsWorkout, que consta de ocho tareas automatizadas, seis de ellas de tipo complejo, basadas en el trabajo de Esquivel-Gámez, Balderrama-Trápaga, Vargas-Ortiz y García-Vergara (2018, p. 51). De las seis, cuatro son usadas para el dominio verbal y 2 para el viso-espacial. A continuación, se describen brevemente las citadas pruebas:

Alcance de lectura. Aparecen frases junto con una letra y al tiempo que el participante indica si la frase es lógica o no (ej. El papel se mojó con la tierra cuando lo tiraron), debe memorizar la letra. Cuando termina la serie, se recuperan las letras conforme el orden de aparición.

Alcance de operaciones. Un grupo de pares palabra-operación aritmética aparece, para que el sujeto indique si la operación es correcta o no, al tiempo que memoriza la palabra asociada. Una vez que termina el grupo, las palabras memorizadas se ingresan en el orden en que aparecieron.

Alcance de conteo. Una serie de pares imagen-palabra aparece para que el participante memorice la cuenta de círculos azules e indique si dicha cuenta es un número par o no. Cada imagen contiene círculos y cuadrados azules más círculos verdes. Al final de cada serie, el participante debe registrar las cuentas, conforme al orden en que fueron presentados.

Alcance de razonamiento. Se muestra un conjunto de pares analogía-palabras y el sujeto debe elegir de las palabras, aquella que la complete correctamente. Después de resolver el conjunto, se recuperan las palabras de acuerdo con el orden en que aparecieron.

Alcance de rotación. En una serie aparece una letra en posición normal o girada, luego de indicar SÍ o NO está rotada, desaparece para posteriormente exhibir una flecha que se debe memorizar. Al final de cada serie se debe indicar el orden de presentación de cada flecha.

Alcance de simetría. En un grupo de pares de matrices, inicialmente aparece una con algunas celdas de negro, de modo que puede presentar simetría desde su eje vertical. El participante deberá marcar sí es o no simétrica, para luego desaparecer y mostrar otra matriz con una celda roja y cuya posición debe memorizarse. Al final de cada grupo, en una matriz vacía se deben registrar, con números consecutivos el orden de aparición de la celda roja.

Para el dominio verbal se tienen a las de alcance de: lectura, operaciones, razonamiento y conteo. Para el viso-espacial, se cuenta con las de alcance de rotación y de simetría.

3.3 Procedimiento

Examen de aritmética. El examen se alojó en un curso sobre una plataforma Moodle y para el ingreso a la misma, se concedieron previo a la aplicación, los datos de acceso personales. Se procedió a comunicar el tiempo máximo de resolución (30 mins.), las instrucciones de aplicación del examen y se les prometió un premio monetario a quien obtuviera el mejor resultado. Durante la ejecución, se recordaba frecuentemente a los jóvenes, el tiempo restante y la promesa del premio económico. Al término de la evaluación, se les pidió escribieran en una hoja en blanco sus impresiones de la experiencia

Escala de ansiedad matemática. Al finalizar el examen previo, se indicaron el objetivo y los pasos a seguir, para obtener la percepción de ansiedad matemática, enfatizando que se tomaran su tiempo para responder honestamente a las cuestiones, las cuales estaban integradas en un formulario de Google.

Memoria operativa. Los participantes, organizados en pequeños grupos, se ubicaron en computadoras de modo que dejaran un lugar entre sí, dado que se requería que todos comenzaran cada prueba al unísono y que se redujera la posibilidad de copia. No se ofreció compensación económica alguna y solo se les enfatizó la importancia de la detección temprana de factores personales que pueden impactar en su desempeño académico.

4. RESULTADOS

Una vez concluidas las mediciones, los datos fueron procesados con el software estadístico SPSS V15.0 y la información obtenida se describe enseguida.

Examen de Aritmética. La prueba de normalidad Shapiro-Wilk muestra que, de los resultados obtenidos en la evaluación, solo la edad y calificación total, cumplen tal supuesto. La calificación máxima obtenida fue de 6.54 de una calificación máxima esperada 10 y 84.6% de los jóvenes obtuvieron una calificación reprobatoria (< 6.0). El promedio de calificación obtenido en el examen fue de 3.95 con desviación estándar de 1.27. Dichos resultados parecen indicar un desempeño deficitario en los niveles máximo y promedio, al resolver problemas de aritmética muy básicos. Al buscar asociaciones, se detectó una negativa entre la edad y el tiempo de resolución (r=-0.346, p=0.031) y debido al número tan variable de participantes por grupo, no fue posible llevar a cabo la comparación de medias grupales.

Perfil de Ansiedad Matemática. Al determinar la consistencia interna del instrumento usado, se encontró un Alfa de Cronbach para la escala completa de 0.937 y para sus dimensiones: Actitudes (0.874), Emociones (0.867) y Creencias (0.844). Con los resultados obtenidos, se demuestra una fuerte relación entre las preguntas de cada dimensión, al ser mayores a 0.7 y por tanto, la fiabilidad del instrumento.

De las tres dimensiones, en la correspondiente a actitud, se encontró que, en 5 de sus 8 ítems, 31.6 % de los jóvenes se perciben con mala o pésima actitud ante el hecho de esforzarse en las tareas matemáticas. Para la dimensión de creencias, en cuatro de seis preguntas que la conforman, aproximadamente la mitad (52.6 %) de ellos, se catalogan como poco hábiles o con poca confianza en sus habilidades numéricas. En lo referente a las emociones que generan las matemáticas para los jóvenes, solo 28.9 % de ellos manifiesta sentirse cómodo con ellas y en la pregunta 15 (Las matemáticas son mi punto fuerte) 55.26% de los participantes, respondieron casi nunca y 21 % respondieron que a veces, lo que hace que esta pregunta muestre la percepción más baja de los participantes.

Para la escala total se observó que 15.79 % de los participantes manifiesta AM en al menos 75 % de las situaciones contempladas en los 20 ítems, así como otro 13.16 % presenta condiciones de ansiedad entre 50 y 75 % de las ocasiones presentadas en la escala. 65.75% señala experimentar ansiedad en, cuando mucho, la mitad de las circunstancias planteadas y solo en 5.3 % de los casos, manifestaron no experimentar ansiedad bajo alguna de las situaciones presentadas en los ítems.

Memoria operativa. En cada nivel de prueba, se obtienen los datos: respuestas correctas, respuestas en orden, el tiempo promedio de reacción a cada planteamiento y el porcentaje de precisión ante el cuestionamiento distractor. Para obtener los puntajes de las pruebas, en línea con Conway *et al.* (2005, p. 776), se usó el procedimiento de puntuación de carga unitaria (PCU). Por cada prueba, los estadísticos descriptivos de tales puntajes junto con el tiempo de reacción y porcentaje de precisión, así como el alfa de Cronbach, se muestran en la Tabla 1. En todas las pruebas, se encontró un nivel de asociación medio altamente significativo (desde 0.409 hasta 0.670) entre el PCU y la precisión en las respuestas al distractor y aunque no significativo, se obtuvo un nivel bajo de asociación negativa entre la precisión y el tiempo de reacción, excepto para la prueba de simetría.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos

	Puntaje (PCU)		Precisión		Tiempo de reacción		Consistencia Interna
Prueba	Media	Desv. típica	Media	Desv. típica	Media	Desv. típica	Alfa de Cronbach
Conteo	0.889	0.129	95.43	7.299	3.82	1.114	.818
Lectura	0.896	0.098	91.05	8.689	7.26	3.497	.684
Operaciones	0.876	0.110	79.85	13.800	5.84	2.804	.587
Razonamiento	0.815	0.139	93.51	5.454	7.09	1.915	.772
Rotación	0.635	0.170	96.34	8.953	6.07	2.865	.698
Simetría	0.705	0.175	81.85	13.013	6.46	2.351	.778

A partir de la revisión del criterio de la distribución normal de los puntajes (PCU) se aplicaron las pruebas estadísticas correspondientes, encontrando que al comparar los promedios de los puntajes por dominio, las de naturaleza verbal tuvieron una ventaja altamente significativa contra la del tipo viso-espacial (0.86 vs.

0.67). Aunque el tamaño de la muestra es relativamente pequeño, se calculó el nivel de consistencia interna resultando igual a 0.900 en lo global y por prueba, niveles aceptables.

Digno de comentar, es que, para el caso de la prueba de Operaciones, la cual se caracteriza por tener a la resolución de operaciones aritméticas básicas como elemento distractor, se obtuvo: el promedio menor en la precisión, la mayor dispersión de la misma, un nivel mediano de asociación altamente significativo (r=0.570) del tiempo de reacción con la precisión y uno más bajo con el PCU (r=0.306, p=0.05), la única diferencia significativa entre grupos en el PCU (Chi^2=8.664, p=0.034), desfavorable para el grupo de séptimo semestre y finalmente, una correlación elemento-total negativa de dicho puntaje en su nivel cuatro, que al eliminarse, resultaría un nivel de consistencia interna de 0.810.

Asociación entre puntajes de las pruebas. En la Tabla 2 se presentan los niveles de correlación y significancia para las pruebas de Memoria Operativa, en la cual digno de comentarse es el nivel de asociación, altamente significativo, entre la prueba de simetría y tiempo de reacción, posiblemente debido a que se usa un patrón similar tanto en la etapa de procesamiento como en la memorización. Quizás por lo mismo, fue la prueba de tipo viso-espacial que obtuvo un nivel asociativo mayor que una verbal (Lectura), entre el puntaje y la precisión. Adicionalmente, se encontró correlación negativa y significativa entre la edad de los participantes y los puntajes de las pruebas de lectura y de razonamiento (-0.352 y -0.319 respectivamente), las cuales requieren de una lectura comprensiva de frases.

Tabla 2. Asociación entre puntajes de pruebas de MO

	Rotación	Operaciones	Simetría	Razona-miento	Conteo	Tiempo de reacción	Precisión
Lectura	.475(**)	.482(**)	.382(*)	.453(**)	.351(*)	.031	.435(**)
Rotación	1	.478(**)	.696(**)	.458(**)	.304	.033	.409(*)
Operaciones		1	.561(**)	.419(**)	.406(*)	.306	.505(**)
Simetría			1	.447(**)	.426(**)	.467(**)	.477(**)
Razonamiento				1	.339(*)	-.079	.670(**)
Conteo					1	.096	.482(**)

* p < .05, ** p < .01.

Al buscarse la asociación entre la AM y la MO, se encontraron en sentido negativo y de magnitud moderada unas entre el puntaje de la prueba de razonamiento y la percepción total de la AM (r=-0.391, p=0.018) y otras, con la dimensión de Actitudes (r=-0.435, p=0.008) y de Creencias (r=-0.420, p=0.011). De manera análoga, con las medias globales por dominio, se encontró una de magnitud moderada entre la dimensión Actitudes y el dominio verbal (r=-0.381, p=0.022) y con la AM global, no se encontró asociación significativa alguna.

Entre la calificación obtenida en el examen de aritmética y el nivel de AM, no se encontró asociación alguna, ni en lo global ni por escala. Sin embargo, entre dicha calificación y los puntajes globales de la MO por dominio, se encontró una positiva de magnitud moderada, tanto con lo viso-espacial (r=0.313, p=0.053) como con lo verbal (r=0.443, p=0.005), particularmente con la prueba de Lectura (r=0.418, p=0.007).

5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Examen de Aritmética. En función de los resultados, al analizar los ítems, para el índice de facilidad, se encontraron: una pregunta fácil, una bastante fácil, cuatro adecuadas al nivel del estudiante promedio, tres moderadamente difíciles, una difícil y dos muy difíciles. Solo las preguntas muy difíciles arrojan resultados insatisfactorios de desviación estándar (inferiores al 33%). La ponderación efectiva de la mitad de los reactivos indica que tienen un mayor efecto que el deseado en la dispersión de las calificaciones (preguntas 2, 3, 7, 9, 11 y 12). Ahora bien, de los 12 ítems, 7 muestran un índice de discriminación cero o negativo y solo la pregunta 3 obtiene un nivel adecuado (37.54%), indicando que es efectiva para discernir entre los participantes más de los menos capaces. En cuanto al análisis de la eficiencia descriminativa, los mismos ítems obtuvieron un valor cero o negativo, señalando que preguntan algo diferente al resto o son preguntas erróneas. Al parecer dichos ítems deberían descartarse, sin embargo, dado que han sido analizados a partir de resultados de poblaciones más amplias, de manera que forman parte de la guía del CENEVAL, se considera que tanto el índice como la eficiencia discriminativa, se hayan visto afectados por el bajo desempeño del grupo evaluado.

Además, de la revisión de los comentarios que de manera anónima escribieron al término del examen, digno de comentar es: Solo dos participantes expresaron gusto por las matemáticas, mientras que el resto indicó entre otras cosas que, no recordaban o no sabían como resolver los planteamientos, se sentían estresadas o nerviosas y un rechazo manifiesto a las matemáticas. Si a ello se agrega que en algunos sistemas de educación superior, un puntaje menor a 7 es reprobatorio, todos los participantes (38 mujeres y 1 hombre) estarían reprobados, sin importar el tiempo transcurrido de haber tenido el útimo contacto con la aritmética. Lo anterior puede estar acorde a lo descrito por Peng *et al.* (2016, p. 461), de que la habilidad de cálculo numérico de los docentes de educación básica en formación en general es deficiente, lo que posiblemente impacta a la MO y al desempeño en la evaluación. Si además se considera que los estudiantes próximos a egresar, obtuvieron el puntaje más bajo, la situación que enfrentarán los docentes en formación y los niños bajo su cuidado, es aún más preocupante.

Perfil de Ansiedad Matemática. Es interesante observar que los ítems sobre creencias y actitudes impactan en mayor proporción al factor de ansiedad de los maestros en formación del presente estudio coincidiendo con los hallazgos de Eccius-Wellman *et al.* (2017, p.78-81).

Usando el mismo instrumento y aun cuando trabajaron con una muestra mayor (n=285) en un entorno educativo similar, para Casis *et al.* (2017, p. 188-199), sus estudiados indicaron menores niveles de ansiedad media en lo referente a las emociones que los del presente estudio (3.51 *vs.* 1.75). Una condición similar se tuvo en la confianza en sus habilidades (3.27 *vs.* 3.18) y en que las matemáticas los hacen sentir incómodos y confusos (2.27 *vs.* 2.93). En lo referente a creencias, los estudiantes chilenos (Casis *et al.*, 2017) piensan que pueden obtener mejores resultados que sus pares mexicanos (2.92 *vs.* 2.44).

Así mismo, 15.79% de las participantes en el estudio manifiestan rasgos de alta AM; comparándolos con 17% descrito por Luttenberger, Wimmer, y Paechter (2018, p. 312) de la población americana en general con la misma condición. En línea con ellos, se ha detectado que a mayor edad y en especial las mujeres con alta AM, se perciben como menos hábiles en tareas que incluyan a las matemáticas y creen tener un bajo desempeño durante los exámenes.

En este orden de ideas, Ramírez, Shaw, y Maloney (2018) reportan que más de 80% de los estudiantes universitarios presentan grados de moderados a altos de AM contra 94.7% observado en esta investigación.

Memoria Operativa. Los niveles de asociación encontrados entre el puntaje de memoria operativa por prueba y el porcentaje de precisión, implica que aquellos participantes con los mejores resultados en la tarea de manejo de distractores alcanzaron puntuaciones de MO más altas, en línea con Conway *et al.* (2005, p. 774). Por este motivo, es recomendable alentar a los participantes de estudios similares a que se enfoquen por igual en la memorización y en el procesamiento de la tarea. En cuanto a la media de los puntajes, las menores se dan en las pruebas viso-espaciales, posiblemente debido a que las tareas que manejan estímulos verbales tienen que ver con habilidades más maduras como son el conteo, la aritmética y la lectura y, por tal razón sus puntajes son mayores. Además, el menor tiempo de reacción promedio, se obtiene en la prueba de conteo, que consiste simplemente en contar un tipo de figura. Por otro lado, la media más alta en el PCU se obtiene en la prueba de lectura, posiblemente porque solo es necesario memorizar una letra, así como en el tiempo de respuesta, dado que es necesario procesar frases más extensas. En cuanto a la precisión, posiblemente porque solo es necesario revisar si una letra está o no rotada, se obtuvo la mayor media en la prueba de rotación.

El nivel de asociación entre las diferentes mediciones de la MO va en línea con los resultados de Kane *et al.* (2004, p. 200), excepto para la tarea de conteo, cuyo nivel fue menor a 0.40 con otras tres; posiblemente debido a la exigencia de traducir un estímulo visual (círculos azules) a uno verbal por recordar (número).

5.1 Asociación entre puntajes

De manera particular y en contraste con Peng *et al.* (2016, p. 457), la solución de problemas verbales del examen de aritmética, presenta una moderada correlación con la capacidad de memoria operativa en ambos dominios, siendo altamente significativa para lo verbal, en particular con la prueba de alcance de lectura. Al resolver los problemas, que en promedio manejaban 27 palabras, se requería de una lectura comprensiva y dado que su nivel de desempeño se ha encontrado asociado con la CMO verbal (Esquivel, Martínez, Córdoba y Reyes, 2016, p. 49), de ahí la calificación obtenida. A lo anterior puede añadirse, la asociación encontrada entre el porcentaje de precisión en la prueba de operaciones y su tiempo de respuesta tan bajo, lo cual podría estar asociado a una actitud de negación ante las matemáticas, situación que pudo palparse en los comentarios escritos al final de la prueba.

De los resultados obtenidos por Novak y Tassell (2017, p. 21) en una universidad pública al sureste central de los Estados Unidos (n=47), al buscar asociaciones entre el puntaje ante problemas verbales de matemáticas y la MO (prueba de alcance de operaciones) se encontró una asociación de nivel similar (r=0.18) e igualmente no significativa. Al comparar la asociación entre dicho puntaje y el de una similar a la prueba de alcance de rotación, manifiestan una correlación muy baja y no significativa, a diferencia de la aquí encontrada (r=0.478).

La correlación encontrada entre la AM y la MO (prueba de alcance de razonamiento) fue en grado moderado a diferencia de los resultados reportados por Walker (2013, p. 65) donde reportan una relación de mayor magnitud también negativa (r=-0.640); sin embargo, los instrumentos de medición fueron totalmente distintos.

Según Rabab'h y Veloo (2015, p. 8) la habilidad viso-espacial es mediadora entre la actitud hacia las matemáticas y el logro matemático (r=0.648), entre la motivación y el desempeño (r=0.648) y entre la AM y el logro (0.640), lo que motiva a los estudiantes a aprender matemáticas y permite que la actitud ante ellas mejore. Para el presente caso, no se encontró dicha mediación, ya que al introducir el puntaje promedio de las pruebas viso-espaciales, al modelo de regresión lineal para cada una de las escalas de la AM, teniendo a la calificación de aritmética como variable dependiente, no se obtuvieron resultados favorables.

6. CONCLUSIONES

Para la población estudiada, sus creencias y actitudes han impactado de mayor manera al nivel de ansiedad percibido, en línea con Eccius-Wellman *et al.* (2017). Lo anterior posiblemente, pudo conducir a un nivel deficiente en la prueba de aritmética, sobre todo si se considera que resolvieron problemas básicos, lo cual a su vez pudo disparar la AM.

Conforme a Ashcraft y Krause (2007) y Sokolowski, Hawes y Lyons (2019), la ansiedad matemática conduce a un patrón de evitación global: los estudiantes evitarán tomar cursos de matemáticas y situaciones en las que las matemáticas sean necesarias, incluidas las carreras profesionales; siempre que sea posible. Para el presente caso, dado el tamaño tan reducido de la población estudiada, no es posible generalizar los resultados hacia la elección de estudios universitarios y mucho menos a la decisión de estudiar docencia.

Sin embargo, la habilidad y rechazo mostrados, podría afectar su desempeño en las evaluaciones previstas para el ingreso al servicio magisterial. Con ello, se estaría en línea con la tendencia a la baja, encontrada por Ramos, Zamora-Lugo y Figueroa-Rodriguez (2018, p. 105) en el área de pensamiento matemático del EXANI III de CENEVAL. Por lo anterior, es necesario tanto fortalecer los conocimientos y habilidades matemáticas, así como desarrollar actitudes y creencias positivas en los maestros en formación, que a su vez permitan desarrollarlas en sus futuros estudiantes.

Aunado a lo anterior y conforme a Ball, Thames y Phelps (2008, p. 405), dada la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas, es necesario determinar cuáles aspectos del conocimiento del contenido por enseñar, predicen mejor el desempeño estudiantil, para entonces analizar distintas propuestas para el desarrollo de los profesores en formación que mejoren dicho conocimiento, mediante la implementación de materiales que lo apoyen tanto en su etapa aprendiz como en su etapa profesional.

Aunque con diferentes instrumentos de medición y tamaños de muestra, el hecho de encontrar valores de correlación menores entre AM y MO respecto a otros estudios puede deberse al hecho de que los jóvenes participantes del presente estudio, no se verían afectados en ninguna materia del semestre por un pobre desempeño en el examen y la promesa de un premio monetario no fue suficiente para motivarlos a esforzarse. Por tanto, se requiere implementar mediciones adicionales en muestras similares de estudiantes que permitan, al tiempo de mejorar los procedimientos de medición, determinar con mayor certeza los hallazgos, sobre todo porque en la muestra estudiada, la asociación entre el nivel de ansiedad, global y por escala, con el desempeño aritmético, no ha sido significativa. Y, aunque el nivel encontrado en la habilidad aritmética es preocupante, se hace necesario ampliar el estudio a otros dominios de resolución de problemas matemáticos (geometría y problemas no verbales, entre otros);

además de verificar sus niveles de asociación con el dominio verbal y el viso-espacial de la memoria operativa.

Conforme a los niveles de asociación encontrados, se abre la oportunidad de implementar un ambiente virtual para docentes en formación, en el cual convivan tanto mediciones automatizadas como tareas adaptativas de entrenamiento (aumento de la dificultad a partir del desempeño) de la memoria operativa; aunadas a tutoriales de aritmética con instrumentos de evaluación formativa, que permitan en los estudiantes, logros que mejoren su confianza. Si además, se usan instrumentos de reconocimiento facial mientras resuelven exámenes de aritmética, se estará ante la posibilidad de enriquecer las mediciones de la ansiedad ante los exámenes, las cuales se basan en gran medida en cuestionarios de autopercepción. Con ello, se podrá proporcionar evaluaciones válidas y útiles para los profesionales psicoeducativos, interesados en detectar aquellos estudiantes con riesgo de deserción y en potenciar sus habilidades y conocimientos matemáticos.

REFERENCIAS

Aiken Jr., L. R., y Dreger, R. M. (1961). The effect of attitudes on performance in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, *52*(1), 19–24. http://doi.org/10.1037/h0041309

Agarwal, P. K., Finley, J. R., Rose, N. S., and Roediger III, H. L. (2017). Benefits from retrieval practice are greater for students with lower working memory capacity. *Memory*, *25*(6), 764-771.

Arteaga, G. y Pimienta, H. (2006). Memoria operativa y circuitos corticales, *Revista de la Facultad de Medicina Universidad Nacional Colombia*, *54*(4), pp. 248-268. https://doi.org/10.15446/revfacmed

Ashcraft, M. H., y Krause, J. A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. *Psychonomic bulletin and review*, *14*(2), 243-248.

Aunio, P., y Räsänen, P. (2016). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years –a working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal*, *24*(5), 684–704. https://doi.org/10.1080/1350293X.2014.996424

Baddeley, A. (1983). Working Memory. Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: *Biological Sciences*, *302*(1110), 311–324. https://doi.org/10.1098/rstb.1983.0057

Baddeley, Alan (2012). Working memory: theories, models, and controversies, *Annual Review of Psychology*, *63*, 1-29. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-120710-100422.

Ball, D.L., Thames, M. H., and Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Blazer, C. (2011). Strategies for Reducing Math Anxiety. Information Capsule. Volume 1102. http://eric.ed.gov/?q=math+anxiety+technology+education&ft=on&ff1=dtySince_2009&id=ED536509

Carruthers, P. (2016). La evolución de la memoria de trabajo, Ludus Vitalis, *40*(21), 99-124. http://www.centrolombardo.edu.mx/ludus-vitalis/la-maquinaria-mental-humana-num-40-2013/la-evolucion-de-la-memoria-de-trabajo-ludus-vitalis/

Casari, L. M., Anglada, J., y Daher, C. (2014). Estrategias de afrontamiento y ansiedad ante exámenes en estudiantes universitarios. *Revista de Psicología* (PUCP), *32*(2), 243-269.

Casis, M., Castro, N. R., y Martínez, E. C. (2017). Motivación, autoconfianza y ansiedad como descriptores de la actitud hacia las matemáticas de los futuros profesores de educación básica de Chile. *PNA*, *11*(3), 181–203.

Casoetto, S. D. (2014). Ansiedad rasgo y ansiedad matemática en el ámbito de la educación superior: correlaciones y diferencias de género (UADE). http://repositorio.uade.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/2475/Casoetto.pdf?sequence=1&isAllowed=y

CENEVAL. (2018). Exámenes Nacionales de Ingreso (EXANI) - Ceneval. http://www.ceneval.edu.mx/examenes-nacionales-de-ingreso-exani-

Chang, H., y Beilock, S. L. (2016). The math anxiety-math performance link and its relation to individual and environmental factors: a review of current behavioral and psychophysiological research. Current Opinion in Behavioral Sciences, *10*, 33–38. http://doi.org/10.1016/j.cobeha.2016.04.011

Cleary, L. (2017). Investigating the Impact of a Brief Cognitive Defusion Intervention on State Anxiety and Psychological Inflexibility/Avoidance (Phd, National University of Ireland Maynooth). http://eprints.maynoothuniversity.ie/8751/}

Coleman, J. R., Watson, J. M., and Strayer, D. L. (2018). Working memory capacity and task goals modulate error-related ERPs. *Psychophysiology*, *55*(3), e12805.

Conway, A. R., Kane, M. J., Bunting, M. F., Hambrick, D. Z., Wilhelm, O., y Engle, R. W. (2005). Working memory span tasks: A methodological review and user's guide. *Psychonomic Bulletin Review*, *12*, 769-786. http://link.springer.com/article/10.3758/BF03196772

Đokić, R., Koso-Drljević, M., and Đapo, N. (2018). Working memory span tasks: Group administration and omitting accuracy criterion do not change metric characteristics. *PloS one*, *13*(10), e0205169.

Dowker, A., Sarkar, A., y Looi, C. Y. (2016). Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? *Frontiers in Psychology, 7*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

Eccius-Wellman, C., Lara-Barragán, A. G., Martschink, B., y Freitag, S. (2017). Comparación de perfiles de ansiedad matemática entre estudiantes mexicanos y estudiantes alemanes. *Universia, VIII*(23), 69-83. https://doi.org/10.22201/iisue.20072872e.2017.23.3011

Eccius-Wellmann, C.-C., y Lara-Barragán, A. G. (2016). Hacia un perfil de ansiedad matemática en estudiantes de nivel superior. *Revista Iberoamericana de Educación Superior, 7*(18), 109-129.

Erdem Keklik, D., y Keklik, İ. (2013). Motivation and Learning Strategies as Predictors of High School Students' Math Achievement. Cukurova University Faculty of Education *Journal, 42*(1), 96–109.

Esquivel, I., Martínez, W., Córdoba, R. y Reyes, C. (2016). Memoria operativa y lectura comprensiva: medición con pruebas de amplitud lectora y tipo cloze en ámbitos pre y universitarios. *Apertura, 8*(2). 38-53. https://dx.doi.org/10.18381/Ap.v8n2.919

Esquivel-Gámez, I., Balderrama-Trápaga, J. A., Vargas-Ortiz, M. C. y García-Vergara, N. (2018). La capacidad de la memoria operativa y su medición automatizada. En I. Esquivel-Gámez, G. Aguirre, R. Edel y J. Balderrama (Coordinadores). *Memoria operativa: medición y propuesta para su desarrollo, apoyadas en TIC*. Editorial Porrúa Print.

Eriksen, B. A., and Eriksen, C. W. (1974). Effects of noise letters upon the identification of a target letter in a nonsearch task. *Perception and Psychophysics, 16*(1), 143-149.

Etchepareborda, M.C. y Abad-Mas, L. (2005). Memoria de trabajo en los procesos básicos del aprendizaje, *Revista de Neurología, 40*(1), 79-83.

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1978). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*, 324-326. https://doi.org/10.2307/748467

Fernández Cueli, M. (2015). Análisis de la eficacia de formatos digitales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en tercer ciclo de educación primaria. http://digibuo.uniovi.es/dspace/handle/10651/33296

Flores, J. y Ostrosky-Shejet, F. (2012). *Desarrollo neuropsicológico de lóbulos frontales y funciones ejecutivas*, Manual Moderno.

Foley, A. E., Herts, J. B., Borgonovi, F., Guerriero, S., Levine, S. C., y Beilock, S. L. (2017). The Math Anxiety-Performance Link: A Global Phenomenon. Current Directions in Psychological Science, *26*(1), 52-58. https://doi.org/10.1177/0963721416672463

Foster, J. L., Harrison, T. L., Hicks, K. L., Draheim, C., Redick, T. S., and Engle, R. W. (2017). Do the effects of working memory training depend on baseline ability level? *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 43*(11), 1677.

Foster, J. L., Shipstead, Z., Harrison, T. L., Hicks, K. L., Redick, T. S., nd Engle, R. W. (2015). Shortened complex span tasks can reliably measure working memory capacity. *Memory and cognition*, *43*(2), 226-236.

Felez-Nobrega, M., Foster, J. L., Puig-Ribera, A., Draheim, C., and Hillman, C. H. (2018). Measuring working memory in the Spanish population: Validation of a multiple shortened complex span task. *Psychological Assessment*, *30*(2), 274.

Felez-Nobrega, M., Hillman, C. H., Cirera, E., and Puig-Ribera, A. (2017). The association of context-specific sitting time and physical activity intensity to working memory capacity and academic achievement in young adults. *The European Journal of Public Health*, *27*(4), 741-746.

García-López, A. (2016). Ansiedad a las matemáticas. http://tauja.ujaen.es/jspui/handle/10953.1/4092

García-Santillán, A., Escalera-Chávez, M. E., Moreno-García, E., y Santana-Villegas, J. del C. (2016). Factors that Explains Student Anxiety toward Mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(2), 361-372. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1216a

García-Santillán, A. G., Jutta Schnell, J., y Ramos-Hernández, J. R. (2017). Factores que determinan el nivel de ansiedad hacia la matemática en alumnos de nivel superior. *Pensamiento Matemático*, *7*(1), 165-179.

Geist, E. (2015, Spring). Math Anxiety and the "Math Gap": How Attitudes Toward Mathematics Disadvantages Students as Early as Preschool [Text]. http://www.ingentaconnect.com/content/prin/ed/2015/00000135/00000003/art00009

Gough, O. P. S. M. F. (1954). Why Failures in Mathematics? Mathemaphobia: Causes and Treatments. The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, *28*(5), 290-294. https://doi.org/10.1080/00098655.1954.11476830

Gutiérrez-Martínez, F., y Ramos, M. (2014). La memoria operativa como capacidad predictora del rendimiento escolar. Estudio de adaptación de una medida de memoria operativa para niños y adolescentes. *Psicología Educativa*, *20*(1), 1-10. https://doi.org/10.1016/j.pse.2014.05.001

Jonides, J.; Lacey, S. C. y Nee, D. E. (2005). "Processes of working memory in mind and brain", en *Current Directions in Psychological Science*, *14*(1), 2-5. https://doi.org/10.1111/j.0963-7214.2005.00323.x

Hamid, M. H. S., Shahrill, M., Matzin, R., Mahalle, S., y Mundia, L. (2013). Barriers to Mathematics Achievement in Brunei Secondary School Students: Insights into the Roles of Mathematics Anxiety, Self-Esteem, Proactive Coping, and Test Stress. *International Education Studies*, *6*(11), 1-14.

Hill, B. D., Foster, J. D., Sofko, C., Elliott, E. M., y Shelton, J. T. (2016). The interaction of ability and motivation: Average working memory is required for Need for Cognition to positively benefit intelligence and the effect increases with ability. *Personality and Individual Differences*, *98*, 225-228. https://doi.org/10.1016/j.paid.2016.04.043

Home | Common Core State Standards Initiative. (2019). 7 de marzo de 2019, http://www.corestandards.org/

Jaroslawska, A., Gathercole, S., Logie, M., y Holmes, J. (2016). Following instructions in a virtual school: Does working memory play a role? *Memory and cognition*, *40*, 580-589. https://doi.org/10.3758/s13421-015-0579-2

Kane, M. J., Hambrick, D. Z., Tuholski, S. W., Wilhelm, O., Payne, T. W., and Engle, R. W. (2004). The generality of working memory capacity: a latent-variable approach to verbal and visuospatial memory span and reasoning. *Journal of Experimental Psychology: General*, *133*(2), 189-217.

Kray, J., and Fehér, B. (2017). Age differences in the transfer and maintenance of practice-induced improvements in task switching: the impact of working-memory and inhibition demands. *Frontiers in Psychology*, *8*, 410.

Li, C. H., He, X., Wang, Y. J., Hu, Z., and Guo, C. Y. (2017). Visual working memory capacity can be increased by training on distractor filtering efficiency. *Frontiers in Psychology*, *8*, 196.

Luttenberger, S., Wimmer, S., y Paechter, M. (2018). Spotlight on math anxiety. *Psychology Research and Behavior Management*, *11*, 311-322. https://doi.org/10.2147/PRBM.S141421

Mammarella, I. C., Hill, F., Devine, A., Caviola, S., y Szűcs, D. (2015). Math anxiety and developmental dyscalculia: A study on working memory processes. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology*, *37*(8), 878-887. https://doi.org/10.1080/13803395.2015.1066759

Mavilidi, M.-F., Hoogerheide, V., y Paas, F. (2014). A Quick and Easy Strategy to Reduce Test Anxiety and Enhance Test Performance. *Applied Cognitive Psychology*, *28*(5), 720-726. http://doi.org/10.1002/acp.3058

McAuley, A. J. (2015). The effect of gender, not math anxiety, on working memory tasks (Universidad de Nevada). http://digitalscholarship.unlv.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3884&context=thesesdissertations

Mutodi, P., y Ngirande, H. (2014). Exploring Mathematics Anxiety: Mathematics Students' Experiences. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, *5*(1), 283.

Novak, E., y Tassell, J. L. (2017). Studying preservice teacher math anxiety and mathematics performance in geometry, word, and non-word problem solving. *Learning and Individual Differences*, *54*, 20-29. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.01.005

Passolunghi, M. C., Caviola, S., De Agostini, R., Perin, C., y Mammarella, I. C. (2016). Mathematics Anxiety, Working Memory, and Mathematics Performance in

Secondary-School Children. *Frontiers in Psychology*, *7*. http://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00042

Peng, P., Namkung, J., Barnes, M., y Sun, C. (2016). A meta-analysis of mathematics and working memory: Moderating effects of working memory domain, type of mathematics skill, and sample characteristics. *Journal of Educational Psychology*, *108*(4), 455-473. https://doi.org/10.1037/edu0000079

Pletzer, B., Wood, G., Scherndl, T., Kerschbaum, H.H., y Nuerk, H.-C. (2016). Components of Mathematics Anxiety: Factor Modeling of the MARS30-Brief. *Frontiers in Psychology*, *7*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00091

Rabab'h, B., y Veloo, A. (2015). Spatial Visualization as Mediating between Mathematics Learning Strategy and Mathematics Achievement among 8th Grade Students. *International Education Studies*, *8*(5), 1–11.

Ramirez, G., Shaw, S. T., y Maloney, E. A. (2018). Math Anxiety: Past Research, Promising Interventions, and a New Interpretation Framework. *Educational Psychologist*, *53*(3), 145-164. https://doi.org/10.1080/00461520.2018.1447384

Ramos, D. E. G., Zamora-Lugo, S. y Figueroa-Rodriguez, S. (2018). Habilidades aritméticas en estudiantes universitarios. *Eduscientia*, *1*(1), 100–108.

Richardson, F. C., y Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. Journal of Counseling Psychology, *19*, 551-554. https://doi.org/10.1037/h0033456

Ruff, S. E., y Boes, S. R. (2014). The Sum of All Fears: The Effects of Math Anxiety on Math Achievement in Fifth Grade Students and the Implications for School Counselors. Georgia School Counselors Association Journal, *21*(1). http://eric.ed.gov/?q=math+anxiety&ft=on&id=EJ1084441

Saeed, T. (2011). A Comparative Study of Working Memory in Children with Neurodevelopmental Disorders (Doctoral dissertation, National University of Ireland Maynooth).

Shi, Z., y Liu, P. (2016a). Worrying Thoughts Limit Working Memory Capacity in Math Anxiety. PLoS ONE, *11*(10), 1-12. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0165644

Shi, Z., y Liu, P. (2016b). Worrying Thoughts Limit Working Memory Capacity in Math Anxiety. PLoS ONE, *11*(10), 1-12. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0165644

Sovansky, E. E. (2013). The Relationship between State Math Anxiety and Working Memory. http://www.indigo.lib.uic.edu:8080/handle/10027/21216

Tobias, S., y Weissbrod, C. (1980). Anxiety and Mathematics: An Update. *Harvard Educational Review*, *50*(1), 63-71.

Vallée-Tourangeau, F., Sirota, M., y Vallée-Tourangeau, G. (2016). Interactivity mitigates the impact of working memory depletion on mental arithmetic performance. *Cognitive Research: Principles and Implications*, *1*(1), 26. https://doi.org/10.1186/s41235-016-0027-2

Vukovic, R. K., Kieffer, M. J., Bailey, S. P., y Harari, R. R. (2013). Mathematics anxiety in young children: Concurrent and longitudinal associations with mathematical performance. *Contemporary Educational Psychology*, *38*(1), 1-10. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.09.001

Walker, E. (2013). Understanding the role of metacognition and working memory in maths achievement. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Southampton.

Wright, E. K. C. (2017). Understanding Math anxiety in children: deciphering the contribution of math achievement, working memory, and general anxiety. (Tesis doctoral no publicada), University of South Carolina. http://search.proquest.com/openview/9f9b1efa5ef260735d7c060eb6136001/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

Yang, H., y Yang, S. (2017). Are all interferences bad? Bilingual advantages in working memory are modulated by varying demands for controlled processing. *Bilingualism: Language and Cognition*, *20*(1), 184-196.

Yue, Q., Martin, R. C., Fischer-Baum, S., Ramos-Nuñez, A. I., Ye, F., y Deem, M. W. (2017). Brain modularity mediates the relation between task complexity and performance. *Journal of cognitive neuroscience*, *29*(9), 1532-1546.

Zamora Lugo, S., López Sánchez, J. D., Granados Ramos, D. E., y Romero Esquiliano, G. (2018). F109. An event-related brain potential study of the arithmetic skills in college students. *Clinical Neurophysiology*, *129*, e107. https://doi.org/10.1016/j.clinph.2018.04.272

Ismael Esquivel Gámez

Domicilio: Almagro 48, Virginia, Boca del Río, Veracruz

Teléfono: 229-9814670

 DOI: 10.24844/EM3202.06

Cálculo estimativo: un estudio con alumnos de 5to año de primaria

Computational estimation: A study with 5th grade primary students

Sandra Stauffer[1]
Diana Solares[2]
Claudia Broitman[3]

Resumen: En este artículo presentamos resultados de un estudio sobre la enseñanza del cálculo estimativo para la multiplicación y la división. Los análisis preliminares permitieron inventariar y analizar la variedad de problemas en diferentes fuentes y a partir de variaciones de los mismos diseñamos una secuencia de 14 clases para 5to año de la escuela primaria. El estudio se centró en los conocimientos puestos en juego por los alumnos, en las intervenciones didácticas y en las interacciones en las clases. En este trabajo se documentan y analizan en particular las dificultades a las que se enfrentaron los alumnos y los procedimientos usados, tanto correctos como incorrectos, cuando resuelven problemas que implican anticipar si un cociente será mayor, menor o igual al cociente de otro cálculo dado. Entre los marcos teóricos de referencia para el diseño y el análisis de las clases se destacan la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) y la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1998). La intención de este estudio es aportar conocimientos sobre la enseñanza del cálculo estimativo al sistema educativo y al desarrollo de futuras investigaciones.

Fecha de recepción: 6 de julio de 2018. **Fecha de aceptación**: 23 de octubre de 2019.
[1] Universidad Autónoma de Querétaro. México, stauffersandra@yahoo.com, orcid.org/0000-0001-6688-2139
[2] Universidad Autónoma de Querétaro. México, violetasolares@gmail.com, orcid.org/0000-0001-6034-6693
[3] Universidad Nacional de la Plata. Argentina, claubroi@gmail.com. orcid.org/0000-0002-1774-6752

Palabras claves: *Cálculo estimativo, problemas multiplicativos, secuencia didáctica, Teoría de las Situaciones Didácticas, escuela primaria.*

Abstract: In this article, we present the results of a study regarding the teaching of estimative calculation for multiplication and division. The preliminary analysis enabled the enumeration and analysis of the variety of the problems in different sources. Using their variations as a starting point, we designed a sequence of 14 lessons for the 5th grade of primary school. The study focused on the knowledge of the students, the didactic interventions and the interaction during class. This work documents and analyzes the difficulties faced by the students and the procedures used - correct or incorrect- when they solve problems that involve the anticipation of whether a quotient will be higher, lower or equal to that one of another calculation given. The theoretical framework to design and analyze the sequence was the Theory of Didactic Situations (Brousseau, 2007) and the methodology of Didactic Engineering (Artigue, 1998) The aim of this work is not only contribute to the teaching of estimative calculation but also the developing of new didactic investigations.

Keywords: *Computational estimation, multiplicative problems, didactic sequence, Theory of Didactical Situations, primary school.*

1. INTRODUCCIÓN

Presentaremos algunos resultados de un estudio que se propuso indagar la enseñanza del cálculo estimativo en alumnos de tercer ciclo[4] de la escuela primaria. En particular, analizaremos las dificultades a las que se enfrentan alumnos de quinto grado de primaria al resolver problemas que implican comparar expresiones multiplicativas y los procedimientos usados –tanto correctos como incorrectos–. Los conocimientos de los alumnos se identificaron a lo largo de una secuencia didáctica de 14 clases, diseñada especialmente para este estudio y en el marco de una tesis de maestría (Stauffer, 2018).[2]

El cálculo mental estimativo o aproximado es un tipo de problemas dentro del cálculo mental. A diferencia del cálculo mental exacto, el cálculo estimativo

[4] El tercer ciclo en México corresponde a 5° y 6° año de primaria.

busca un resultado cuyo grado de aproximación puede variar según el problema. Segovia y Castro (1989) definen la estimación como "juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite" (p.18). Este tipo de cálculo está presente en la vida cotidiana de nuestra cultura, ya sea para obtener un resultado numérico, como lo señala la cita anterior o, para tomar una decisión. Por ejemplo, los adultos utilizamos principalmente el cálculo estimativo en situaciones de compra-venta donde debe decidirse qué opción conviene más ("¿Un paquete de 18 pastelillos por $540 es más económico que tres de 6 pastelillos por $192?"). Ya solo el uso social justificaría su enseñanza en las escuelas primarias; pero además, este tipo de cálculo constituye un importante recurso de control, dado que permite anticipar el rango posible de un resultado y luego revisar la validez del mismo a través de un cálculo exacto.

El cálculo mental estimativo juega un rol importante en el aprendizaje de los conocimientos matemáticos. Investigaciones realizadas con niños por Lerner (2005) y retomadas para estudiantes adultos por Broitman (2012), muestran que el trabajo con ciertos problemas de cálculo mental estimativo contribuye a la construcción de algunas relaciones y características de nuestro sistema de numeración. Se proponen, por ejemplo, problemas en los que los estudiantes tengan que anticipar con qué número empieza el resultado de un cálculo como 56 + 22, u otros donde tengan que decidir si un cálculo como 29 + 49 puede dar ochenta y algo o no. Resolviendo este tipo de problemas los estudiantes se enfrentan a tomar decisiones relacionadas con la agrupación decimal y el valor posicional, pilares importantes de nuestro sistema de numeración.

Algunos autores señalan, además, que ciertos problemas de cálculo mental estimativo tienen el potencial de promover procedimientos de tipo algebraico en los alumnos. Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985) identifican cuatro raíces del álgebra: aritmética generalizada; posibilidades y restricciones; reordenamiento y manipulación y expresión de la generalidad. Mencionan que la esencia de la raíz de la llamada expresión de la generalidad está en "identificar y aprovechar aquellos momentos cuando los alumnos están realizando cálculos que pueden revelar, con un poquito de indagación, las reglas de la aritmética" (p. 90) y entre otros, los cálculos estimativos posibilitarían dicha cuestión. Por ejemplo, decidir si 12 x 12'600 es menor, mayor o igual a 24 x 6300, o la misma situación de los pastelillos anteriormente citada, son problemas que implican un tipo de cálculo que conduce a una práctica algebraica, en lugar de buscar resultados numéricos como suele hacerse en aritmética.

Por algunas de estas razones u otras, el currículo de México como el de Argentina[5] incorporan el cálculo estimativo o el cálculo aproximado como contenido en la escuela primaria.

En México, en los "Propósitos del estudio de las Matemáticas para la Educación Primaria" se menciona de manera explícita el cálculo estimativo:

> En esta fase de su educación, como resultado del estudio de las Matemáticas se espera que los alumnos utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos. (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 62)

Sin embargo, los materiales curriculares de apoyo para el maestro contienen pocas propuestas explícitas sobre cómo abordar las también escasas actividades de cálculo estimativo que presentan los libros de texto oficiales.[6] Por ejemplo, el *Libro del maestro de Matemáticas quinto grado* (SEP, 2016) −grado en el que se realizó la investigación que aquí se reporta− presenta sugerencias didácticas únicamente para dos lecciones explícitamente dedicadas al cálculo mental (suma y resta de fracciones y de números decimales), y la estimación únicamente se aborda en una lección sobre la estimación del peso.

En Argentina encontramos una mayor presencia del cálculo estimativo en los documentos curriculares, y se reconoce la importancia de que los alumnos lo desarrollen a lo largo de la educación primaria. En los Núcleos de los Aprendizajes Prioritarios (NAP) elaborados por el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2005) para el segundo ciclo de la escuela primaria, se plantea la necesidad de ofrecer situaciones de enseñanza que promuevan "El análisis y el uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular en forma exacta y aproximada" (p. 17). La importancia asignada al cálculo estimativo en este documento de carácter nacional aparece en todos los grados de la escuela primaria.

También numerosos libros de texto de este país presentan propuestas de enseñanza del cálculo estimativo, por ejemplo, Saiz y Parra (2013) y Broitman,

[5] Hemos analizado en particular su enseñanza en estos dos países por ser los de nuestros ámbitos de trabajo e investigación.

[6] En las escuelas primarias de México se distribuyen gratuitamente libros de texto de Matemáticas y de otras asignaturas. Esos libros son elaborados en la Secretaría de Educación Pública.

C., Itzcovich, H., Novembre, A., Escobar, M., Grimaldi, V., Ponce, H., y Sancha, I. (2015). Asimismo, ponemos en relieve la existencia de varios materiales producidos para docentes con orientaciones para la enseñanza del cálculo estimativo, por ejemplo, Broitman, C. (2011), y *Cálculo mental con números naturales* publicado por la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2006).

2. REFERENCIAS CONCEPTUALES Y DECISIONES METODOLÓGICAS

La investigación realizada, de la que aquí solo se reporta un aspecto, tuvo la intención de estudiar la enseñanza y el aprendizaje escolar del cálculo estimativo, poniendo énfasis en los tipos de problemas, en las intervenciones didácticas y en los conocimientos de los alumnos, considerando las interacciones entre unos y otros aspectos. Para este fin elaboramos una secuencia didáctica de 14 clases durante la cual trabajamos con tres tipos de problemas diferentes que se presentarán más adelante.

Para diseñar y anticipar la gestión de la clase en torno a los problemas seleccionados, nos hemos apoyado en algunos conceptos centrales de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (Brousseau, 2007). En particular hemos tomado su noción de devolución, en el sentido del otorgamiento a los estudiantes de la responsabilidad matemática de resolver los problemas propuestos a partir de sus propios puntos de partida. Así, hemos buscado instalar condiciones para que produzcan y transformen sus conocimientos. Otra idea de referencia de esta teoría, y que hemos adoptado para estas clases, es que los alumnos puedan hacerse cargo de la validación de sus decisiones e ideas matemáticas, en lugar de que estas sean solo una responsabilidad del docente cuando determina si las respuestas dadas son o no pertinentes y correctas. Por otra parte, nos resulta también un aporte la concepción brousseauniana de producción colectiva del conocimiento matemático a través de procesos de debate entre los alumnos y conducidos por el docente. En las clases de la secuencia fomentamos estos espacios y documentamos en este trabajo algunos episodios que dan cuenta de ello. Otra noción también central para el diseño de la presente secuencia didáctica es el concepto de institucionalización, el cual hace referencia a las diferentes intervenciones del docente dirigidas a la toma de conciencia de los alumnos de aquello que han producido, poniendo en relación sus conocimientos con determinados saberes matemáticos. El concepto de institucionalización se hace presente en las maneras en las que el docente va dirimiendo los avances en los conocimientos producidos por los alumnos.

Con respecto a los conocimientos de los alumnos, se buscaba identificar procedimientos correctos y erróneos, así como las dificultades que podrían aparecer en alumnos de quinto grado de una escuela primaria al resolver problemas de cada tipo de los seleccionados.

Implementamos la secuencia durante los meses de noviembre y diciembre de 2016 en un grupo de 5° grado de un colegio bilingüe (español-alemán) de la ciudad de Querétaro, México. Aunque la lengua materna de la gran mayoría de los alumnos del colegio es el español, las clases de matemáticas se imparten en alemán. Por lo mismo, decidimos aplicar la secuencia en esa lengua, para no alterar la dinámica establecida en el colegio y reconociendo, además, que la mayoría de los alumnos ya tienen una larga experiencia con ese idioma. Sin embargo, durante la implementación de la secuencia se aceptaron respuestas de los alumnos también en español y, se les invitó a usar su lengua materna en caso de que tuvieran dificultades para expresarse en alemán.

Si bien la elaboración de la secuencia didáctica no fue en sentido estricto una Ingeniería Didáctica (Artigue, 1998), tomamos de dicha metodología los siguientes aspectos: la realización de análisis preliminares incluyendo antecedentes de otros estudios, producciones curriculares, libros de texto y materiales para docentes; el diseño y análisis a priori de las situaciones de enseñanza para anticipar errores, procedimientos, intervenciones didácticas, entre otras cuestiones; una fase de implementación o experimentación y luego, un análisis *a posteriori,* con su consecuente validación a partir de contrastar anticipaciones y supuestos con los resultados efectivamente obtenidos en la enseñanza.

Los análisis preliminares nos permitieron inventariar los tipos de problemas de cálculo estimativo presentes en diferentes fuentes: investigaciones, producción curricular, libros de texto, materiales para docentes, etc. A partir de un análisis riguroso de esos problemas decidimos seleccionar algunos para nuestro estudio, diseñando una secuencia didáctica en la que se adaptaban o recreaban varios de los tipos de problemas identificados.

Finalmente, la secuencia a implementar abarcaría 14 clases de 45 minutos cada una, durante las cuales se implementaron diferentes tipos de problemas para la multiplicación y para la división, y en cada uno de ellos se comandaban variables didácticas que permitirían graduar la complejidad de los mismos. Asimismo, la secuencia incluía momentos de repaso, de evaluación, de análisis de la evaluación, entre otros.

Los tipos de problemas que estaban incluidos en la secuencia definitiva fueron: [7]

A. Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado
   Ejemplo:
   260 ÷ 24 da
   ❍ menos que 10
   ❍ igual a 10
   ❍ más que 10

B. Encuadrar el producto/cociente entre números dados
   Ejemplo:
   5940 ÷ 24 da
   ❍ entre 0 y 10
   ❍ entre 10 y 100
   ❍ entre 100 y 1000

C. Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado
   Ejemplo:
   Decide si el cociente de 24’800 ÷ 6 es mayor, menor o igual al cociente de 12’400 ÷ 3.[8]

Cada uno de estos tres tipos de problemas se plantearon para la multiplicación y luego para la división. Además, dentro de cada tipo se secuenciaban por grado de dificultad variando los números y las relaciones entre los números.

Al terminar la implementación de la secuencia hicimos un análisis exhaustivo de las intervenciones didácticas y de los procedimientos, errores y dificultades de los alumnos al resolver cada tipo de problemas. Presentaremos únicamente los errores y dificultades que manifestaron los alumnos al resolver problemas del tipo descrito en el inciso C y solamente para la división: anticipar si el cociente será mayor, menor o igual al cociente de otro cálculo dado.

---

[7] Por razones de espacio no se explicita en este artículo el análisis a priori de la tipología de problemas que permitió construir criterios de elección y secuenciación de tipos de problemas.

[8] Si bien la norma es el Sistema Internacional de Medidas (SI) que propone separar los números en grupos de tres cifras con un espacio, hemos decidido preservar en este artículo la escritura utilizada con los alumnos, forma generalizada en la escuela donde se implementó la secuencia.

3. ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS EN PROBLEMAS QUE IMPLICAN ANTICIPAR SI EL COCIENTE SERÁ MAYOR, MENOR O IGUAL AL COCIENTE DE OTRO CÁLCULO DADO

Dentro de la secuencia didáctica mencionada se propusieron a los alumnos problemas que exigían anticipar si el cociente de un cálculo sería mayor, menor o igual al cociente de otro cálculo dado. En el interior de este tipo de problemas se pueden distinguir:

- aquellos donde solamente se variaba el dividendo o el divisor (p.ej. comparar 24’800 ÷ 6 con 24’800 ÷ 12, o comparar 24’800 ÷ 6 con 12’400 ÷ 6)
- aquellos donde se variaban simultáneamente el dividendo y el divisor (p.ej. comparar 24’800 ÷ 6 con 12’400 ÷ 3).

Los problemas donde solamente era diferente el dividendo o el divisor causaron poca dificultad. En cambio, los problemas donde el dividendo y el divisor eran diferentes sí dieron lugar a variados errores. Respecto a estos últimos problemas trabajamos con diferentes variantes:

- se multiplican/dividen el dividendo y el divisor por/entre el mismo número (Ejemplo: comparar 24’800 ÷ 6 con 12’400 ÷ 3; el cociente sigue igual);
- se multiplica uno de los dos por un número, mientras que el otro se divide entre el mismo número (Ejemplo: comparar 24’800 ÷ 6 con 12’400 ÷ 12; el cociente aumenta/disminuye)
- se agregan/quitan mil al dividendo mientras que al divisor se le quita/agrega uno (Ejemplo: comparar 24’800 ÷ 6 con 23’800 ÷ 7).

En una evaluación que hicimos a los alumnos en la clase número 10 de la secuencia didáctica, identificamos que en las dos primeras variantes hubo errores similares a los que se habían manifestado anteriormente en la comparación de multiplicaciones: aparentemente más de la mitad de los alumnos se confundió en cuanto a las relaciones que se pueden establecer entre dos multiplicaciones y las que se pueden establecer entre dos divisiones. En la comparación de dos multiplicaciones (p. ej. 12 x 12’600 con 24 x 6300) se puede establecer que si se multiplica uno de los factores por un número y se divide el otro entre el mismo número, se mantiene el resultado. Sin embargo, esta relación no es válida al comparar dos divisiones. En el problema de decidir si 24’800 ÷ 3 da lo mismo que 12’400 ÷ 6, doce de veinte alumnos dijeron, erróneamente, que sí da lo mismo; todos ellos explicaron su respuesta diciendo que se multiplicó el dividendo por 2 y se dividió el divisor entre 2, y que por eso “se compensa”. Veamos la explicación de José: “Da lo mismo porque el dividendo es lo doble y el divisor es la mitad, y da lo mismo porque el dividendo se hace lo doble y el divisor se hace la mitad.”

Algo parecido surgió en el problema de comparar el cálculo 6200 ÷ 3 con el cálculo 12’400 ÷ 6, que sí da el mismo resultado. Solamente la mitad de los veinte alumnos resolvió de manera correcta este problema; quienes eligieron la respuesta incorrecta justificaron recurriendo a relaciones erróneas, como lo muestra el siguiente ejemplo de Juan: “Parece que fuera lo mismo, pero no, porque tendrían que ser opuestos para ser igual.”

También la tercera variante (se agregan/quitan 1000 al dividendo mientras que al divisor se le quita/agrega 1, p.ej. comparar 24’800 ÷ 6 con 23’800 ÷ 7) dio lugar a confusión; varios alumnos comentaron que estos problemas daban lo mismo, “porque le quitas 1 (que de hecho son 1000) al dividendo y le sumas 1 al divisor”. Es interesante que, por un lado, los alumnos consideren que con esa modificación se mantiene el resultado, como si se tratara de una “compensación”; por el otro lado, llama la atención que este razonamiento haya aparecido en diferentes momentos de la secuencia.

La primera vez que se identificó esa “compensación” fue durante un juego de equipos que se hizo en la octava clase. Este juego se llevó a cabo primero con una mitad del grupo, y luego con la otra mitad. Para asegurarse de ganar, al interior de su propio equipo los alumnos tenían que dar a conocer sus estrategias sobre cómo comparar cálculos, tanto de multiplicaciones como de divisiones. Se formaron equipos de 3 o 4 alumnos y se les dio la siguiente consigna:

1. Entre ustedes recuerden y explíquense las diferentes relaciones entre las multiplicaciones y divisiones que hemos encontrado en las sesiones anteriores.
2. Va a pasar un alumno de cada equipo para resolver un problema de comparación entre cálculos. En ese momento su equipo no puede ayudarlo. Por eso es importante que revisen antes las estrategias.
3. Si la respuesta es correcta, el equipo gana un punto. Si la respuesta no es correcta, otro equipo puede ganar el punto si resuelve bien el problema.
4. El equipo que al final tenga más puntos gana el juego.

Se identificaron ciertas dificultades al resolver este tipo de problemas en las dos partes en que dividimos el grupo para el juego, como se muestra en las siguientes interacciones:

Interacción en la mitad A del grupo:

A Gisela le toca comparar el cálculo 47'120 ÷ 13 con el cálculo 48'120 ÷ 12. Lo pone en "igual a" (el resultado correcto sería "menos que") y explica su decisión:

Gisela:[9]	*Porque aquí es uno menos* (de 48'120 a 47'120) *y aquí es uno más* (de 12 a 13). (Se ríe, parece insegura.) *No sé...*
M:	*Ok, entonces tú dices aquí es uno menos y aquí es uno más, entonces da lo mismo.*
Gisela:	*Creo.*

En lo que expresa Gisela, "*porque aquí es uno menos y aquí es uno más*" se manifiesta la idea de compensación; sin embargo, Gisela exterioriza cierta inseguridad. La docente devuelve el problema al grupo, lo que se puede observar a continuación:

M:	*Ok. ¿Qué dicen los demás? ¿Quién está de acuerdo con Gisela? ¿Quién dice sí, Gisela tiene razón? Uno, dos, tres... ¿Quién dice Gisela no tiene razón? Uno, dos, tres, cuatro... ¿Quién no está seguro?*
Mateo:	*Yo.* (Los demás se ríen.)
M:	*Ok. ¿Quién quiere explicar?* (Melisa levanta la mano.) *Melisa.*
Melisa	(Se queda sentada, piensa.) *Aja, aja, aja* (asiente con la cabeza.)
M:	¿Qué quiere decir esto, Melisa?
Melisa:	*Que...* (Se levanta.) *Pienso que Gisela tiene razón, no soy muy inteligente para las matemáticas, pero si este* (señala el dividendo del cálculo 49'120 ÷ 12) *y este es más grande y así* (señala el pizarrón con las multiplicaciones, pero no está claro a qué se refiere.), *entonces uno está más grande y el otro está más pequeño... y pues creo que los dos dan lo mismo.*

[9] Las transcripciones son traducciones propias del alemán al español. Las expresiones originalmente dichas por los alumnos en español se señalan con letra cursiva.

Melisa apoya lo expresado por Gisela; sin embargo, no es clara en su explicación: no dice qué tanto más pequeños o más grandes son los números implicados. Después de lo dicho por Melisa quieren participar Lucas y Jorge:

M: *Ok. Lucas, y después Jorge.*

Lucas: (Se levanta.) *Está mal porque...*

Melisa: *Ay* (con tono triste).

Lucas: *Tienes menos dulces* (dibuja un dulce en el pizarrón, los demás se ríen) *y se los tienes que dar a más niños* (dibuja un niño.)

Melisa: *Ah sí, cierto.* (Se levanta y empieza a borrar el dibujo de Lucas.)

Lucas expresa su desacuerdo con lo dicho por Gisela y Melisa y argumenta apoyándose en un contexto de reparto para justificar su opinión. Aparentemente la explicación de Lucas le parece lógica a Melisa. Enseguida Jorge apoya a Lucas y da una explicación sin recurrir a ese contexto:

Jorge: *Sí, es lo mismo* (se levanta.) *Es lo mismo que Lucas dijo* (termina de borrar el dibujo de Lucas.) *Vamos... Para que los dos estén iguales este* (el divisor) *tiene que estar dividido entre dos o multiplicado por dos* (anota debajo de los divisores 11 y 12: ÷2; x 2) *y este* (el dividendo) *igual.* (Se refiere a que el dividendo debería de estar dividido entre 2 o multiplicado por 2, igual que el divisor)

Heidi: *O entre cuatro, ¿no?*

Jorge: *Mmm, tienen que... los dos tienen que este... o sea estos dos deben de estar multiplicados o divididos, los dos lo mismo. Pero esto* (se acerca al lado del pizarrón con las multiplicaciones) *es al revés. Este* (uno de los factores) *puede estar multiplicado, pero este* (el otro factor) *tiene que estar dividido. Y tiene que estar siempre dividido o multiplicado por el mismo número. Entonces por eso esto va aquí* (mueve el cálculo 47'120 ÷ 13 a la columna "menos".)

La explicación de Jorge, además de no usar ningún otro contexto hipotético, es más amplia que la de Lucas ya que también menciona que son diferentes las relaciones en las multiplicaciones que en las divisiones.

Sin embargo, como se muestra enseguida, a pesar de que Melisa había aceptado la explicación de Lucas, parece volver a entrar en duda con la explicación de Jorge:

Melisa: *Pero tienes más dulces y* (en la grabación no se entiende qué más dice. Otros alumnos hacen comentarios que no se entienden.)

Jorge parece darse cuenta que Melisa necesita apoyarse en un contexto para entender el problema, por lo que recurre a la explicación de Lucas:

Jorge: (Parece desesperarse.) *Aquí tienes menos dulces y más niños* (en 47'120 ÷ 13) *y aquí tienes más dulces y menos niños* (en 48'120 ÷ 12).

Sin embargo, a pesar de las explicaciones recibidas se mantuvo cierta confusión e incertidumbre entre algunos alumnos, como lo manifiesta Heidi:

Heidi: *Estoy de acuerdo que este está mal aquí* (Se refiere a que el cálculo 47'120 está mal en la columna "igual a") *pero es que... es que... estás sumando uno y estás quitando uno, ¡entonces es muy confuso! Entonces lo hice al azar. Pero, estoy de acuerdo con Jorge, es menos.*

Pudimos observar la misma confusión en la otra mitad del grupo, como lo muestran las siguientes interacciones.

Interacción en la mitad B del grupo:

A Alicia le toca comparar el cálculo 47'120 ÷ 13 con el cálculo 48'120 ÷ 12. Lo pone en "igual a" (el resultado correcto es "menos que") y explica su decisión:

Alicia: *Es igual porque este factor* (se refiere al dividendo 47'120) *es más pequeño que este (48'120) pero este factor* (se refiere al divisor 13) *es más grande*

Juan: ¡Es un divisor no un factor!

Alicia: ¡Ah, ah, sí!

M: *Explícalo otra vez en español, Alicia, para que todos entiendan lo que dijiste.*

Alicia: *Este divisor* (47'120) *es más chiquito que este* (48'120) *pero este* (señala el divisor 13) *está más grande. Entonces yo... bueno, ¿ya entendieron?*

As: *Sí.*

Aunque confunde los términos matemáticos "divisor" y "factor", Alicia expresa la misma idea de compensación que Melisa dio en el grupo anterior. Su explicación no es clara y queda inconclusa; sin embargo, sus compañeros expresan haberla comprendido. Laura complementa la explicación de Alicia, apoyando la idea de la compensación, mientras que algunos otros alumnos manifiestan su desacuerdo:

Laura: *Como si pusieras del trece uno a siete para que queda... para que* (no se entiende en la grabación todo lo que dice, tal vez se refiere a que el divisor 13 es uno más grande que el divisor original, y que el divisor 47, sin considerar los ceros, es uno menos que el divisor 48.)

Alicia: ¡*Aja!*

Adrián: *No, ¡está mal!*

M: *Pregunta: ¿Quién está de acuerdo con Alicia? Levanten la mano.* (Levantan la mano José y Pablo.)

Alicia: ¿Ya? ¿Sólo tres están de acuerdo conmigo?

M: ¿Quién no está de acuerdo con Alicia? (Levantan la mano Adrián y Pablo.)

Emma: *Yo estoy indecisa.*

La docente sostiene la incertidumbre por medio de intervenciones diversas de devolución. En este caso solicita a los alumnos que todos se involucren en la resolución del problema por lo que les pide su opinión sobre lo expresado por Alicia. Adrián quiere explicar su desacuerdo.

Adrián: ¿Puedo explicar?

M: *Vas Adrián. Puedes hacerlo en español.*

Adrián: (Se levanta y va al pizarrón, Alicia sigue enfrente del pizarrón.) *Está mal, porque si tú* (le habla directamente a Alicia) *tienes trece niños, pero tienes cuarenta y siete lápices...*

Emma: ¡Ah, está mal!

Adrián: *...tienes menos lápices y más niños entonces, entonces cada niño va a tener menos lápices.*

Juan: ¡Ah sí, cierto! (Adrián se sienta, Alicia se queda viendo el pizarrón.)

M: ¿Sí Alicia?

Alicia: *Sí... pero tú nos dijiste que era... ¿Qué?* (Parece confundida. Cambia el cálculo a la columna "menos" y se sienta.)

Como lo hizo Lucas en el grupo anterior, Adrián se apoya en un contexto de reparto (lápices entre niños) para justificar su respuesta. Alicia, aunque expresa su acuerdo con la explicación de Adrián, parece confundida. La maestra sostiene la incertidumbre y la devolución frente a la convicción de que podría haber otros alumnos que no estuvieran de todo convencidos de la respuesta.

M: *Ok, pero creo que José y Blanca todavía no están seguros. Blanca.*

Blanca: *Sí estoy segura, pero si fuera igual, tendría que ser por dos y por dos. (Se refiere a que si el cociente se mantuviera igual, el dividendo y el divisor se deberían de haber multiplicado por dos.)*

M: *Ok, ahí sería lo mismo. José.*

José: (Se levanta y va al pizarrón. Regresa el cálculo a la columna "igual a".) *Porque este es mil menos* (se refiere a 47'120 en comparación con 48'120), *pero este* (se refiere a trece en comparación con 12) *es uno más...*

M: *Entonces, da lo mismo, ¿dices?* *Estamos otra vez indecisos, José dice: Aquí son mil menos* (lo anota en el pizarrón poniendo una flecha que va de 48'120 a 47'120 y con la anotación 1000 en la flecha) *y aquí es uno más, entonces da lo mismo.* (Matías levanta la mano.) *Matías, ¿qué opinas?*

Matías: *Está bien.*

M: ¿Que da lo mismo?

Matías: *Sí.*

M: ¿Por qué?

Matías: *Porque... espera...sí... porque cuarenta y ocho es cuarenta y ocho, pero baja a cuarenta y siete, pero como que se compensa con el trece que está ahí, porque el otro es doce. Como que se compensa...*

A pesar de la explicación de Adrián, José regresa a la idea de la compensación, idea que la docente devuelve al grupo y que Matías apoya. Enseguida Emma expresa su desacuerdo con José y con Matías.

M: ¿Emma?

Emma: *Es menos.*

M: ¿Por qué?

Emma: *Porque, porque...*

M: *Puedes decirlo en español.*

Emma: (No contesta. Blanca levanta la mano.)

M: *Blanca.*

Blanca: *Es menos porque a fuerza tiene que ser por dos y por dos, no puede ser más y menos.*

Aunque la respuesta de Blanca no es completamente correcta (no tiene que ser "a fuerza" por dos, puede ser multiplicado/dividido por cualquier número), Blanca parece haberse dado cuenta de que no es posible que el resultado de dos divisiones sea igual si los dividendos y los divisores se distinguen por un número que se suma o se resta.

Emma: ¡Ya sé! (se levanta y va al pizarrón.)

Emma: *Porque mira, este es más grande que este* (se refiere al divisor 13 en comparación con 12) *y este* (el dividendo) *es menos, entonces es lógico que tiene que dar menos.*

M: ¿Por qué es lógico?

Emma: ¡Porque así es!

M: ¿Por qué?

Emma: ¡Porque sí! (Cambia el cálculo a la columna "menos que" y se sienta.)

Matías: ¿Por qué dices que sí, si ni siquiera sabes por qué es?

Sigue una discusión acalorada en la cual Emma insiste que "Es lógico que no puede dar lo mismo", mientras que Matías vuelve a recurrir a la idea de la compensación.

M: *Alicia.*

Alicia: *No entiendo a Emma, porque dice es que este es más grande que este, pero este es más chiquito, entonces es muy obvio que tenga que ser menos.* (Dice algo más que no se entiende bien en la grabación. Mientras que Alicia habla, se levanta Matías y regresa el cálculo otra vez a la columna "igual a".)

Matías: *Si quitas el siete* (de 47'120) *y pones el ocho, sería lo mismo. Y si aquí* (divisor) *si le restas uno te da doce, entonces si aquí le restas uno, te da cuarenta y siete y si aquí le sumas uno te da trece. Es como que se compensa el número que...*

Emma: *¡Eso no se puede!*

Juan: ¿Por qué?

Emma: ¡Es imposible!

Matías: ¡Es imposible, pero explícame qué tienes que hacer! (Parece enojado)

Emma: (Se levanta y cambia el cálculo a "menos que", se vuelve a sentar.)

Matías: *A ver, ¡explica! Emma, ¡explica!*

Pablo: ¡No se enojen!

Para calmar la situación la docente realiza una intervención en la cual solicita a Adrián que repita su explicación. Esta intervención se apoya en el supuesto de que, para algunos alumnos, escuchar la explicación contextualizada por parte de su compañero les permitirá entender las relaciones en juego:

M: *Escuchen bien la explicación de Adrián.*

Adrián: *Es menos, porque hazte cuenta que tienes cuarenta y siete lápices, bueno cuarenta y siete mil ciento veinte, pero tienes trece niños, o sea más niños... y menos lápices. Obviamente...*

Matías: ¡Ah claro!

Adrián: *...si tienes más niños y menos lápices cada uno recibe menos.*

As: ¡Sí!

M: ¿Convencimos a todos? ¿José?

José: *Asiente con la cabeza.*

M: ¿Seguros? ¿Alicia? ¿Juan?

As: ¡Sí!

En los extractos anteriores podemos identificar que a pesar de las argumentaciones apoyadas en un contexto de reparto que dieron algunos compañeros, hay otros que volvieron a recurrir a la justificación errónea de la compensación por "quitarle uno al dividendo y sumarle uno al divisor."

En la novena clase se retomó el mismo ejemplo para la elaboración grupal de un cartel; el propósito era que el cartel resumiera las relaciones entre multiplicaciones y entre divisiones:

Alicia: *Si el dividendo es más pequeño y el divisor más grande, no da el mismo resultado.*

M: *Entonces, por ejemplo, como aquí (señala el cálculo 47'120 ÷ 13.)*

Alicia: ¡Aja!

M: *Alicia dice: Si el dividendo es más pequeño y el divisor más grande, no da el mismo resultado. En este cálculo, en los dos grupos de ayer hubo discusiones.*

As: ¡Sí!

M: ¿Por qué hubo discusiones? ¿Se acuerdan? Porque algunos lo pusieron en medio (se refiere a la columna de "igual a", pega el cálculo ahí.) ¿Se acuerdan por qué algunos, al principio dijeron que daba lo mismo? Carla.

Carla: (No se entiende bien lo que dice en la grabación.)

M: *Exacto, algunos ayer dijeron, aquí* d*ice más uno y acá menos uno (pone flechas con +1/-1 de los números originales a los números del cálculo que se compara) y da lo mismo. Y ahora dice Alicia: No, yo aprendí que no da lo mismo. ¿Podemos, en lugar de solamente anotar que no da lo mismo, decir si da menos o más? José.*

José: *Da menos.*

M: ¿Por qué da menos?

José: *Porque el dividendo es menos y el divisor es más. Si tienes más niños y menos lápices cada uno de los niños recibe menos.*

M: *Bien, entonces José explica con el mismo ejemplo.* (Anota el ejemplo y la explicación en el cartel.) *José dice: Aquí tenemos menos lápices y más niños. Por eso da... ¿Da qué Pablo? ¿Menos lápices por niños o más lápices por niño?* (Le solicita a Pablo que conteste porque lo ve distraído.)

Pablo: *Mhhh, menos.*

M: *Menos. Bien, ¿algo más que podríamos anotar acerca de la división? Melisa.*

Melisa: *Y si tienes lo contrario, si tienes más en el primero y menos en el segundo, tienes más porque tienes más cosas que dar y menos a quienes repartir.*

Lo expresado por los alumnos en este momento de la clase hizo pensar a la maestra que se habían convencido de que no existe una "compensación" en este caso. Sin embargo, en la evaluación que se hizo posteriormente en la clase 10, ante la comparación de los cálculos 17'800 ÷ 7 y 18'800 ÷ 6, pudimos identificar que al menos dos alumnos seguían con la misma confusión, como se muestra en lo escrito por Ana: “Es igual porque al primer numero[10] le quitaste uno y al que estas dividiendo le sumaste uno” y por Pedro: “Es igual porque como un factor principal es menor y el otro es mayor hace que sea algo igual.”

Catorce de veinte alumnos contestaron de manera correcta el problema de comparar el cálculo 17’800 ÷ 7 con el cálculo 18’800 ÷ 6, tres contestaron que los dos cálculos daban lo mismo, dos contestaron que el segundo daba más que el primero y un alumno no contestó el problema. De los tres alumnos que contestaron erróneamente, Ana y Pedro justificaron con una compensación, mientras que Laura pareció confundirse entre las relaciones que se pueden establecer entre dos multiplicaciones y las que se establecen entre dos divisiones. Esta última alumna escribió: “si el primer número es entre y el segundo es por o viceversa es igual”, lo cual sí puede ser correcto en la comparación de dos multiplicaciones (por ejemplo 4 x 2400 = 2 x 4800) pero no en una división (2400 ÷ 4 < 4800 ÷ 2). Además, en su explicación sobre por qué eligió “igual a 18’800 ÷ 6” mencionó una relación multiplicativa que no se encuentra en el problema, como se muestra en su respuesta escrita: “Yo digo que da igual porque Sandra (la maestra) nos enseño que si el primer numero es entre y el segundo por o visebersa es igual.”

4. CONCLUSIONES

Para la resolución de problemas que implican una comparación de divisiones, de manera semejante a lo que hicieron en las multiplicaciones, los alumnos recurrieron a analizar las diferencias entre el dividendo y el divisor de un cálculo, con el dividendo y el divisor del otro cálculo, para después establecer relaciones entre los dos cálculos. Les resultó más fácil establecer relaciones en problemas donde solamente era diferente el dividendo o el divisor, aunque en ocasiones hubo confusión respecto a qué relaciones eran válidas para las multiplicaciones y cuáles para las divisiones. Causaron más dificultad aquellos problemas en los que eran diferentes el dividendo y el divisor. Observamos que si bien los alumnos identificaron qué relación había entre el dividendo y el divisor de un cálculo y el otro (por ejemplo: “se dividió el dividendo entre dos y se multiplicó el divisor por dos”), se confundieron con los efectos que estas diferencias tenían sobre el

[10] En todas las transcripciones de respuestas escritas por los alumnos se respetaron la redacción y la ortografía originales.

resultado. Podemos resaltar que para facilitar el trabajo con dichas relaciones la maestra, aunque no estuviera previsto en el análisis a priori, promovió que los alumnos se apoyaran en contextos hipotéticos que les ayudaran a interpretar las relaciones involucradas. La mayoría de los alumnos se apoyó en este recurso para resolver problemas que exigen una comparación de divisiones en varios momentos de la secuencia, a veces de manera espontánea y otras después de una invitación de la docente.

Pudimos observar también que durante la secuencia hubo alumnos que seguían con dificultades con las relaciones enseñadas, a pesar de haberlas institucionalizado a lo largo de varias sesiones, y a pesar de haber analizado que las relaciones entre multiplicaciones y entre divisiones no son iguales. Por un lado, esto nos indica que establecer estas relaciones es efectivamente complejo, y que se necesita un trabajo continuo que permita que los conocimientos sobre ese aspecto se puedan consolidar. Por el otro lado, identificamos que los problemas propuestos son sumamente fructíferos para trabajar las relaciones que se pueden establecer entre dos multiplicaciones y entre dos divisiones.

Varios autores plantean que este tipo de problemas puede aportar al desarrollo del pensamiento algebraico, sobre todo en cuanto a temas de equivalencia entre dos expresiones y a la posibilidad de tratar relaciones entre expresiones sin exigir un resultado numérico. Las aportaciones de este tipo de problemas son aún más relevantes si se consideran las siguientes limitaciones en las prácticas escolares clásicas de la escuela primaria, las cuales ya han sido señaladas por diversos trabajos de investigación: la ausencia de situaciones que exijan comparar cálculos y la presentación del símbolo igual solamente como antecesor del resultado de un cálculo que se escribirá a la derecha de este símbolo. En cambio, los problemas que exigen la comparación de cálculos abonan a una ampliación de los sentidos del símbolo igual (Broitman, Castillo y Bernasconi Echeverría, 2019), enriqueciendo así los conocimientos aritméticos y sin limitar el desarrollo de un pensamiento algebraico.

Como hemos mencionado en diferentes momentos de este artículo, lograr que los alumnos elaboren conocimientos que vayan más allá de los cálculos exactos y de los algoritmos es un propósito importante en la enseñanza. Para finalizar expresamos nuestra intención de que este estudio colabore con la enseñanza del cálculo estimativo en la escuela primaria y aporte al necesario desarrollo de nuevas investigaciones didácticas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-60). Grupo Editorial Iberoamérica S.A.

Broitman, C. (2011). *Estrategias de cálculo con números naturales: Segundo ciclo.* Santillana.

Broitman, C. (2012). *Adultos que inician la escolaridad: sus conocimientos aritméticos y la relación que establecen con el saber y con las matemáticas.* (Tesis doctoral no publicada). Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de la Plata.

Broitman, C., Castillo, C., y Bernasconi Echeverría, A. (2019). Hacia la ampliación de sentidos del símbolo igual en los primeros grados de la escuela primaria. *YUPANA Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral 11,* 8/37.

Broitman, C., Itzcovich, H., Novembre, A., Escobar, M., Grimaldi, V., Ponce, H., y Sancha, I. (2015). *Los matemáticos de 4°.* Santillana.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Libros del Zorzal.

Lerner, D. (2005). ¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. En M. Alvarado, y B. M. Brizuela, *Haciendo Números* (pp. 147-197). Paidós.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (1999). *Rutas hacia el álgebra.* Universidad Pedagócica y Tecnológica de Colombia.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. (2005). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Segundo Ciclo EGB/Nivel Primario.* Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

Saiz, I., y Parra, C. (2013). *Hacer Matemática 5.* Estrada.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011: Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Quinto Año.* SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2016). *Desafíos Matemáticos. Libro para el Maestro. Quinto Grado.* SEP.

Secretaría de Educación, G. (2006). *Cálculo mental con números naturales: apuntes para la enseñanza.* Coordinado por Susana Wolman. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Síntesis.

Stauffer, S. (2018). *Cálculo estimativo en quinto grado de primaria. Implementación de una secuencia didáctica*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Querétaro.

SANDRA STAUFFER

Dirección: Universidad Autónoma de Querétaro
Cerro de las Campanas s/n, Colonia las Campanas
76010 Santiago de Querétaro, QRO
Teléfono: 442 139 39 25

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3202.07

Construções e valorização da cultura por meio do ajurí na educação escolar indígena

Constructions and valorization of the culture through ajurí in indigenous school education

Sandra Maria Nascimento de Mattos[1]
José Roberto Linhares de Mattos[2]
Enilza Rosas da Silva[3]

Resumo: Este trabalho investigou os conhecimentos sobre construções de moradias em uma comunidade indígena, chamada Araçá, da região Norte do Brasil. Analisou a valorização cultural, as condições ambientais e sustentáveis da comunidade e os processos de ensino e aprendizagem na escola indígena. Verificou a importância do trabalho coletivo na construção das casas, denominado ajurí, que é fundamental para a caracterização e formação organizacional, por mutirões entre os moradores da comunidade. Investigou os conhecimentos na arquitetura indígena por meio da etnomatemática, no formato das casas e coberturas, sistemas métricos de plantas baixas e estruturas. A pesquisa teve como objetivos reconhecer, juntamente com alunos e professores, os conhecimentos tradicionais envolvidos na construção das moradias e a utilização destes conhecimentos no ensino e na aprendizagem na educação escolar indígena. Foram utilizados como referenciais teóricos de base, D'Ambrosio

Fecha de recepción: 18 de febrero de 2019. **Fecha de aceptación**: 11 de enero de 2020.

[1] Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Agrícola–PPGEA. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro; smnmattos@gmail.com; orcid.org/0000-0003-2622-0506.

[2] Professor do Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal Fluminense; jrlinhares@gmail.com; orcid.org/0000-0002-4075-6764

[3] Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima, Campus Boa Vista; enilza@ifrr.edu.br; orcid.org/0000-0002-0895-1877.

(2011) sobre o programa etnomatemática e Ausubel (2003) sobre aprendizagem significativa. A metodologia utilizada foi a pesquisa de campo de abordagem qualitativa, com observação participante, entrevistas, e captação de imagens e vídeos. Constatou-se que, por serem conhecimentos ancestrais de construção de moradias, fazem parte da cultura do povo.

Palavras-chave: construções *indígenas, ajurí, cultura, etnomatemática, aprendizagem significativa.*

Abstract: This work investigated the knowledge about house constructions in an indigenous community, called Araçá, in the northern region of Brazil. It analyzed the cultural valorization, the environmental and sustainable conditions of the community and the teaching and learning processes in the indigenous school. It verified the importance of the collective work in the construction of the houses, called ajurí, which is fundamental for the characterization and organizational formation, for joint efforts among the residents of the community. It researched the knowledge in indigenous architecture through ethnomathematics, in the form of houses and roofs, metric systems of floor plans and structures. The research aimed to recognize, together with students and teachers, the traditional knowledge involved in the construction of houses and the use of this knowledge in teaching and learning in indigenous school education. Basic theoretical references were D'Ambrosio (2011) on the ethnomathematics program and Ausubel (2003) on meaningful learning. The methodology used was field research, with participant observation, construction of house mockup, interviews, use of images and videos. It was verified that this knowledge is part of the culture of the people.

Keywords: *Indigenous constructions, ajurí, culture, ethnomathematics, meaningful learning.*

INTRODUÇÃO

As comunidades indígenas utilizam-se de técnicas tradicionais na construção de seus ambientes de convívio, sejam suas residências ou locais coletivos, com poucas variabilidades. Construídas com matérias-primas disponíveis, geralmente em madeira e cobertas com palhas de buritis (*Mauritia flexuosa L.)* e da palmeira inajá (*Attalea maripa*), sendo esta última muito utilizada no revestimento ou vedação das habitações. Diante do exposto, abordar os conhecimentos tradicionais de arquitetura e a prática do ajurí, que é o trabalho em mutirão na construção das casas, é importante e se justifica por auxiliar os professores realizarem a interação entre teoria e prática nas disciplinas estudadas. De acordo com Libâneo e Pimenta (1999, p. 267) os professores desempenham uma atividade teórico-prática, consequentemente, "[...] é difícil pensar na possibilidade de educar fora de uma situação concreta e de uma realidade definida", desenvolvendo nas aulas atividades que buscam aproximar os conteúdos escolares à realidade e às necessidades dos alunos.

A pesquisa teve como objetivos identificar os conhecimentos sobre a construção das moradias da Comunidade Araçá, no estado de Roraima, no Brasil, e a utilização nos processos de ensino e aprendizagem na educação escolar indígena, assim como, conhecer as condições ambientais e sustentáveis da comunidade. Para alcançar estes objetivos foi feita uma análise sobre as construções indígenas, as espécies vegetais utilizadas, a tecnologia aplicada e os diferentes saberes matemáticos existentes nas tipologias de construção das moradias da Comunidade Araçá. Ressalta-se que, por serem conhecimentos tradicionais desenvolvidos em suas práticas cotidianas, não há conhecimentos matemáticos escolares explícitos nessas construções, mas que esses conhecimentos envolvem estratégias matemáticas próprias, ou seja, modos de matematizar no mundo. Para Mattos (2016) matematizar tem a ver com a matemática vivida cotidianamente, corroborando Skovsmose (2001) quando afirma que matematizar significa desenvolver maneiras de entender e suprir as necessidades da realidade.

Buscou-se a etnoarquitetura como o processo de adaptação territorial e coletiva para a utilização do espaço. Ainda, utiliza-se a etnoarquitetura como o conjunto das estruturas construtivas que cada grupo sociocultural usa para abrigar os familiares no desenvolvimento da vida cotidiana (Silva, 2001). É pertinente o emprego da etnoarquitetura para que haja compreensão dos aspectos construtivos utilizados pela etnia, estabelecendo maneiras de conforto, comodidade e relação sustentável com o ambiente.

Os estudantes aprenderam que é importante respeitar a sabedoria dos antepassados, os costumes que ainda são difundidos, e necessários para a durabilidade natural dos materiais retirados das matas, utilizados nas construções das moradias. É importante observar que a coleta das madeiras e palhas precisa ser executada em um período específico do mês, ou seja, na lua cheia, para evitar a decomposição precoce provocada pela ação predatória dos fungos e outros xilógrafos (cupins). Estes saberes da educação indígena, entendida como aquela que ocorre cotidianamente na difusão dos saberes e fazeres tradicionais aos mais jovens, quando integrados à educação escolar indígena, possibilitam uma aprendizagem significativa (Ausubel, 2003), além de permitir a preservação da cultura e do ambiente (Mattos e Ferreira Neto, 2016).

A EDUCAÇÃO ESCOLAR INDÍGENA E A RELAÇÃO COM A CULTURA

As primeiras experiências com a educação escolar indígena no Brasil começam a ser traçadas no processo histórico de contato, da exploração, negação da cultura e dos direitos dos povos indígenas. Para Meliá (1979), a escola está ligada à história da igreja no Brasil, com intenção de preparar os indígenas de acordo com os interesses dos colonizadores. A educação escolar indígena no Brasil esteve elencada por mudanças definidas na própria legislação e, em cada um desses períodos, a cultura indígena foi considerada de diferentes maneiras. O plano Nacional da Educação (Lei nº 10.172), no que se refere à Educação afirma que:

> No Brasil, desde o século XVI, a oferta de programas de educação escolar às comunidades esteve pautada pela catequização, civilização e integração forçada dos índios à sociedade nacional. Dos missionários jesuítas aos positivistas do Serviço de Proteção aos Índios, do ensino catequético ao ensino bilíngue, a tônica foi uma só: negar a diferença, assimilar os índios, fazer com que eles se transformassem em algo diferente do que eram. (Brasil, 2001, p. 59).

Com base na trajetória histórica da educação escolar indígena, Roraima não difere de outros contextos do espaço brasileiro, pois também foi uma prática imposta pela colonização. No entanto, com a promulgação da Constituição Federal (Brasil, 1988), o Estado passou a promover, através da Secretaria Estadual de Educação, mecanismos que têm como objetivo uma educação escolar diferenciada, isto porque surgiram pressões de movimentos indigenistas, principalmente das entidades contrárias à política de apenas integrar a Nação.

A educação indígena sempre existiu e pode acontecer nos espaços comunitários, em que a cultura local está relacionada às atividades tradicionais desenvolvidas na aldeia. Esta prática, de acordo com Brandão (1981) é diferente da educação escolar, pois ocorre em todos os espaços, para a valorização da cultura da etnia. De acordo com esse autor:

> Uma das principais características dessa forma de educação é a maneira de como é adquirido o saber, que é dado pouco a pouco, pelo simples ato de conviver e observar diferentes situações entre as pessoas, tanto no meio familiar como também na comunidade ao todo. (Brandão, 1981, p. 20).

Nessa perspectiva, quando falamos de educação indígena é necessário diferenciá-la da educação escolar indígena vivenciada na aldeia. Como já foi abordado, esta última estava pautada na imposição da cultura ocidental, baseada em livros acadêmicos fora do contexto indígena. Porém a educação escolar indígena permite aos indígenas terem acesso ao conhecimento, provocando novos desafios para esses povos. Dessa forma, entendemos que:

> [...] a educação indígena refere-se aos processos próprios de transmissão e produção dos conhecimentos dos povos indígenas, enquanto a educação escolar indígena diz respeito aos processos de transmissão e produção dos conhecimentos não-indígenas e indígenas por meio da escola, que é uma instituição própria dos povos colonizadores. A educação escolar indígena refere-se à escola apropriada pelos povos indígenas para reforçar seus projetos socioculturais e abrir caminhos para o acesso a outros conhecimentos universais, necessários e desejáveis, a fim de contribuírem com a capacidade de responder às novas demandas geradas a partir do contato com a sociedade global. (Luciano, 2006, p. 130).

Nesse contexto são estabelecidos os princípios organizadores da prática pedagógica que têm foco na diversidade cultural, sendo eles: a especificidade, a diferença, a interculturalidade e o uso das línguas maternas, princípios norteadores que vem encabeçando o novo projeto de se pensar e discutir o tema de educação escolar indígena. Esses princípios corroboram Henriques, Gesteira, Grillo e Chamusca (2007) quando afirmam que:

> As experiências alternativas que inovaram a discussão e prática da educação escolar em um contexto de diversidade indígena firmaram categorias que se tornaram definidoras das escolas indígenas como uma categoria específica de estabelecimento de ensino. São características da escola indígena: a interculturalidade, o bilingüismo ou multiligüismo, a especificidade, a diferenciação e a participação comunitária. (p. 20).

Diante do exposto, torna-se imprescindível aliar a educação indígena à educação escolar indígena, norteando o ensino e a aprendizagem por meio da contextualização de aspectos construtivos das moradias e de sustentabilidade, tão presentes na cultura desses indígenas. Isso auxilia o estabelecimento das características firmadas para a educação escolar indígena.

CONSTRUÇÕES DAS HABITAÇÕES INDÍGENAS E A IMPORTÂNCIA DO AJURÍ

Para compreender melhor a arquitetura das casas indígenas e como eles as constroem, é necessário compreender os processos de transformação ao longo do tempo, das moradias indígenas. Na análise de Ribeiro (1995) buscou-se entender o processo da trajetória dos abrigos ou casas indígenas. A relação de contato dos indígenas com os colonizadores contribuiu para os processos de mudanças no estilo de vida indígena. De acordo com Santos (2014), as casas mudaram sua concepção arquitetônica com a chegada dos colonizadores. Devido ao intenso processo de ocupação dos territórios indígenas, as habitações modificaram-se. Com base na análise de Ribeiro (1995) as casas que eram construídas essencialmente de vegetais, alteraram-se para os casebres de taipa, adobe, tijolo, pedra e cal.

Os espaços mais expressivos para compreender a lógica da construção indígena são as malocas construídas de adobe. O adobe vem dos modelos urbanizados e sua matéria prima, o barro, é abundante na região. Sua fabricação não impõe dificuldade de manuseio. As casas de madeira e argila, também são expressivas na comunidade. Estes processos de construção são considerados sustentáveis e acessíveis, tendo em vista a mão de obra local. Em relação à utilização de alguns tipos de materiais nas construções mais recentes de algumas comunidades indígenas há algumas inquietações, do ponto de vista sustentável, uma vez que podem provocar impactos ambientais, além do distanciamento ou reconhecimento da realidade cultural. De acordo com Franco (2001):

> Uma vez que o desenvolvimento sustentável apresenta além da questão ambiental, tecnológica e econômica, uma dimensão cultural e política, ele exige a participação democrática de todos na tomada de decisão para as mudanças que se farão necessárias para a implementação do mesmo. (p. 26).

Assim como as decisões são tomadas por toda comunidade, os conhecimentos culturais são ensinados aos mais novos pelos mais antigos. Um desses conhecimentos é o ajurí, que é um trabalho coletivo realizado quando se inicia a construção de uma casa. Ele é fundamental para a caracterização e formação organizacional através de um mutirão entre os moradores. Segundo Santos (2014), a prática do ajurí, envolve toda a comunidade. Dessa maneira, "todas as etapas são expressamente contempladas pelo pertencimento coletivo, cujo sentimento ainda permanece vivo nas comunidades Macuxi e Wapixana" (Santos, 2014, p. 190) e demais povos originários de Roraima, apesar das mudanças ocorridas na forma de construção das casas.

De acordo com o senhor Cassimiro, indígena Wapixana, descrito em Santos (2014), o processo lunar é um conhecimento milenar que deve ser respeitado para que as coberturas das casas resistam por mais tempo. Ele se refere ao ajuri ou mutirão, que é uma mobilização coletiva de pessoas para realizar um trabalho. Podemos observar em sua fala:

> Ajudei a fazer casa, primeiro enfia os esteios, depois coloca as travessas, os esteios são de paus roliços, depois coloca as varas para colocar as palhas de buriti, depois cobre com as palhas de buriti. As palhas de buriti têm que ser tiradas depois da lua cheia, senão ela cria bichos (lagartas). Eu ajudei a fazer, a colocar palhas, depois faz a divisão, depois coloca os enchimentos para depois rebocar. Todas as pessoas ajudam, a gente fazia a ajur*í* (Bauk) que *é* igual a mutirão. (Santos, 2014, p. 190).

A ajuda mútua pode ser feita não só nas construções das moradias, mas em toda forma de atividade que caracterize o trabalho coletivo. Esta ação coletiva é importante para os professores relacionarem o cotidiano dos alunos com os conteúdos escolares, como parte integrante no processo escolar comunitário. Nesta perspectiva, é necessário compreender sobre a percepção dos atores sociais na relação comunitária e no contexto escolar. Assim, a construção de um espaço para partilhar conhecimentos em diversas áreas do saber é fundamental, como a etno-história, etnomatemática, etnogeografia e etnolinguística, pois cada recorte dessa construção se constitui como uma teia de significado que propicia a aprendizagem.

Alguns povos com história mais intensa de contato assimilaram aspectos culturais da sociedade não indígena. Por esta razão, muitas vezes, os rituais e a cultura material tradicional são desvalorizados. A partir da situação de contato, alguns aspectos como a língua materna, culinária, a técnica de construção das moradias foram desaparecendo e a matéria-prima substituída ao longo do tempo.

O ajurí, como prática coletiva, viabiliza a tomada de decisão conjunta. É uma prática que alerta para o desenvolvimento sustentável e, ao mesmo tempo, promove a convivência harmônica com o ambiente. Dessa maneira, o ajurí compreende aspectos inerentes a Etnomatemática tais como a utilização de saberes e fazeres tradicionais para a contextualização de conceitos matemáticos escolares; processa-se no coletivo para o compartilhamento desses conhecimentos e possibilita a interdisciplinaridade.

ETNOMATEMÁTICA A SERVIÇO DA EDUCAÇÃO ESCOLAR INDÍGENA: CAMINHOS POSSÍVEIS

A formação dos professores tem sido uma das grandes preocupações das comunidades indígenas, uma vez que reflete suas mais prementes necessidades internas. É necessário preparar um professor não para repassar conhecimento, mas que seja um profissional capacitado para recriar e transformar a sua realidade, em conformidade com os seus alunos e com a comunidade. Diante disso, o Programa Etnomatemática fornece uma ferramenta fundamental na construção de uma prática escolar diferenciada para o ensino e a aprendizagem na educação escolar indígena, que garanta formas específicas de socialização por meio das crenças e dos valores ambientais e culturais dos povos indígenas.

Nessa perspectiva, D'Ambrosio (2011, p. 23) afirma que "há inúmeros estudos sobre a Etnomatemática do cotidiano. É uma etnomatemática não aprendida nas escolas, mas no ambiente familiar, no ambiente dos brinquedos e de trabalho, recebida de amigos e colegas". Assumimos a etnomatemática, corroborando D'Ambrosio quando afirma que:

> etnomatemática é uma forma de se preparar jovens e adultos para um sentido de cidadania crítica, para viver em sociedade e ao mesmo tempo desenvolver sua criatividade. Ao praticar etnomatemática, o educador estará atingindo os grandes objetivos da Educação Matemática, com distintos olhares para distintos ambientes culturais e sistemas de produção. Justifica-se inserir o aluno no processo de produção de seu grupo comunitário e social e evidencia a diversidade cultural e histórica em diferentes contextos. (D'Ambrosio, 2008, p. 8).

Dessa forma, ensinar matemática escolar em comunidades indígenas é um desafio. Cabe ao professor indígena fazer adaptações em suas estratégias de ensino que favoreçam a aprendizagem significativa (Ausubel, 2003), que é importante para a aquisição do conhecimento. Dessa maneira, ligando-a a cultura, a contextualização e a interdisciplinaridade, que são aspectos possíveis para auxiliar a etnomatemática, influenciando na qualidade da aprendizagem desenvolvida pelo aluno. Os alunos são estimulados e despertam o querer aprender por meio dos organizadores prévios, dos conceitos relevantes e daquilo que o aluno já sabe. Estes são impulsos cognoscitivos que dão origem, de maneira geral, a curiosidade, a busca, a descoberta, a predisposição para explorar, manipular, entender, enfrentar o contexto e chegar à solução satisfatória.

A aprendizagem significativa ocorre quando um novo conhecimento fica ancorado em conceitos pré-existentes que estão na estrutura mental do aluno. Entende-se que não é suficiente somente novas informações para que o aluno aprenda. É relevante o sentido dado ao conhecimento a ser adquirido para que o aluno seja afetado e queira aprender. Como fazer etnomatemática é muito mais que resolver problemas, é necessário proporcionar ao aluno agir, falar argumentando e justificando as respostas utilizando a sua linguagem, escrever utilizando linguagem e símbolos matemáticos, desenhar, refletir e evoluir por si próprio. "A etnomatemática propõe uma pedagogia viva, dinâmica, de fazer o novo em resposta a necessidades ambientais, sociais, culturais, dando espaço para a imaginação e para a criatividade" (D'Ambrosio, 2008, p. 10).

Freitas Filho, Mattos e Ramos (2018) alertam para a possibilidade de se aliar teoria e prática, tendo em vistas o viés etnomatemático como eixo integrador de ensino e de aprendizagem. Os autores afirmam que "através do desenvolvimento de aulas práticas com a participação efetiva dos educandos, aproximando os conteúdos à realidade dos mesmos e às suas necessidades nas comunidades indígenas" há a geração e a difusão de conhecimentos tanto acadêmico como o saber próprio das etnias indígenas, fortalecendo a cultura de cada povo e promovendo a integração entre eles (Freitas Filho, Mattos e Ramos, 2018, p. 537).

Há, portanto, o fortalecimento da identidade da etnia por meio da preservação das atividades tradicionais, sejam elas de construção, agricultura, artesanato, pintura corporal ou quaisquer outras. Além disso, ocorre o empoderamento dos indígenas pois percebem que em suas atividades cotidianas existem conhecimentos tradicionais. E mais ainda, entendem que esses conhecimentos têm o mesmo grau de importância que os conhecimentos acadêmicos e escolares apresentados em sala de aula.

Portanto, o Programa Etnomatemática de D'Ambrosio (2008) é um caminho importante e possível para viabilizar a aprendizagem significativa dos alunos, propiciando ao professor indígena utilizar um ensino mais apropriado aos seus alunos nas escolas das aldeias.

METODOLOGIA

O contexto da pesquisa se deu na Comunidade Araçá, localizada no Município de Amajarí, Terra Indígena (TI) Araçá no estado de Roraima, Brasil. A Escola Estadual Indígena Raimundo Tenente serviu como ponto de referência, pois está inserida no âmbito da questão. As atividades de pesquisa foram desenvolvidas com dez alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, um professor indígena de Matemática, oito alunos do 1º ano do Ensino Médio e um professor indígena de Biologia.

A metodologia de pesquisa utilizada foi a pesquisa de campo, já que uma das ações buscadas era baseada no que concerne o currículo da escola, focando os valores e as práticas que oferecessem um olhar sobre a educação escolar indígena, no sentido de valorizar os conhecimentos tradicionais. Nesse contexto, procedeu-se o levantamento de subsídios que possibilitassem a análise dos dados sobre as construções indígenas, especificamente as espécies vegetais utilizadas, tecnologia aplicada e os diferentes saberes matemáticos existentes nas tipologias de construções das moradias da Comunidade Araçá.

Os instrumentos utilizados foram observação participante na execução de maquete da habitação original indígena, entrevistas com moradores da comunidade sobre as técnicas de construções edificadas por eles na aldeia, captação de imagens e vídeos visando a correlação dos saberes matemáticos locais que foram trabalhados em sala de aula por meio da etnomatemática e elementos naturais empregados na arquitetura das moradias da comunidade, como a palha de buriti e suas propriedades.

A dinâmica da ação pedagógica foi desenvolvida em quatro momentos: aplicabilidade do TCLE (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido) aos professores, pais ou responsáveis dos alunos, aulas de campo e execução das atividades. Como resultado final das atividades, construíram-se as figuras geométricas através de desenhos, pinturas, recorte e colagem, bem como a execução de maquete da arquitetura original da Comunidade Araçá.

RESULTADOS SOBRE AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS COM OS ALUNOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Durante a aula de campo com os estudantes da turma do sexto ano do ensino fundamental buscou-se reconhecer os saberes indígenas, através das técnicas construtivas desenvolvidas na comunidade, já que foi percebido não haver diferença entre as tipologias das casas dos povos Taurepang, Wapixana e Makuxi, na Comunidade Araçá, pois aparentemente são bastante semelhantes. Na observação sobre a construção das casas, os estudantes puderam perceber a contextualização das práticas tradicionais dessa arquitetura no ensino da matemática, por meio da forma de contagem, do período de extração da matéria-prima, e os elementos que compõem a estrutura das habitações, que são figuras geométricas.

Reconheceram um sistema de ideias matemáticas e os modos de lidar com a realidade, que os povos indígenas desenvolveram, por exemplo, a forma que encontraram para medir, utilizando o palmo, a polegada e a vara. Na estrutura da cobertura, identificaram a formação dos ângulos internos dos triângulos isósceles e trapézios escalenos (Figura 1(a) e 1(b)). Volta-se a ressaltar que essas analogias com os conteúdos da matemática escolar só foram possíveis devido ao olhar já impregnado de uma matemática escolar hegemônica.

Salienta-se, ainda, que esses conhecimentos tradicionais próprio da etnia são aspectos importantes para dar sentido aos conhecimentos escolares para esses alunos. Não se está, em momento algum, vulgarizando o saber científico, muito pelo contrário, se está colocando em ênfase conhecimentos tradicionais de grupos socioculturais que foram invisibilizados por longos tempos e que são imperiosos para a aprendizagem significativa dos alunos.

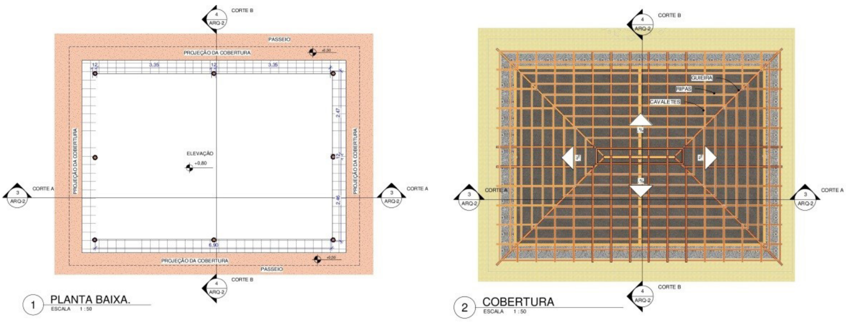
(a)

(b)

Figura 1: Triângulo isósceles e trapézio escaleno nas coberturas.
Fonte: dos autores.

Em Mattos e Ferreira Neto (2016), vê-se conhecimentos tradicionais indígenas envolvidos na construção das moradias originais dos Paiter Suruí de Rondônia, que estão relacionados a conceitos matemáticos acadêmicos da geometria euclidiana, como, por exemplo, segundo os autores, a rigidez de um triângulo que é consequência da congruência lado-lado-lado. Da mesma forma, vê-se unidades de medidas e determinação de áreas do interior das malocas.

No formato da moradia, na comunidade Araçá, quando apresentado a planta baixa, os alunos identificaram perímetro e área em figuras geométricas planas (Figuras 2(a) e 2(b)) como o quadrado, retângulo e outras formas apresentadas pelo professor. Salientamos que as figuras, apresentadas aos alunos, foram elaboradas pelos autores em Autocad, software que disponibiliza ferramentas para criação de projetos que são desenvolvidos por arquitetos e engenheiros. Na forma arredondada da madeira dos elementos estruturais, os estudantes identificaram o cilindro.



(a) (b)

Figura 2: Planta Baixa.
Fonte: dos autores.

Nessa perspectiva, tomando o viés etnomatemático (D'Ambrosio, 2011), configura-se a possibilidade de aprender significativamente e despertar o desejo em aprender os conteúdos matemáticos escolares. É sempre possível matematizar uma dificuldade (Skovsmose, 2001), quando estamos diante de um problema que necessita solução. Eles, os alunos, estão sempre observando essa relação cotidianamente e conseguem transpor para os conteúdos escolares.

Dessa maneira, pode-se constatar que a introdução dos saberes tradicionais da etnia sobre as construções das moradias tradicionais, em sala de aula, contribui para a aprendizagem significativa dos alunos, aumentando a participação e propiciando maior compreensão dos conceitos matemáticos escolares. Constata-se, ainda, que a ocorrência desse engajamento, obtido pelos alunos na aprendizagem dos conceitos escolares, foi devido ao emprego da cultura, vivenciada no cotidiano deles.

APRENDENDO DE FORMA CONCRETA E BUSCANDO O ABSTRATO

Para as atividades desenvolvidas em sala de aula com os alunos do sexto ano do ensino fundamental buscou-se uma forma mais dinâmica, aliando tarefas com utilização de material concreto para que pudessem argumentar, trocar ideias e expor conceitos já adquiridos, necessários para que os estudantes pudessem expressar sua compreensão sobre os conceitos básicos da geometria plana e espacial, por meio dos desenhos, pinturas, recortes e colagens. Dessa forma, possibilitou-se a interação, a criatividade e a participação de todos os alunos, em uma ação conjunta (Figura 3). Por meio dessas atividades, os educandos conseguem compreender e interpretar o aprendizado de forma concreta, trazendo aquilo que já está em sua estrutura mental para dar significação aquilo que está aprendendo.

De acordo com Charlot (2000) saber é relação e esta é repleta de valor e sentido, aspectos essenciais para propiciar a aprendizagem. Segundo o autor, "o saber é construído em uma história coletiva que é a da mente humana e das atividades do homem e está submetido a processos coletivos de validação, capitalização e transmissão" (CHARLOT, 2000, p. 63). Da mesma forma, corrobora Mattos e Mattos (2019, p. 105) quando afirmam que "o saber é produto das relações sociais e por sê-lo constitui a cultura de cada povo. Este saber fica ancorado nas estruturas mentais de cada pessoa, possibilitando ser repassado de geração a geração". Pode-se afirmar que a estratégia utilizada facilita o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos escolares, já que permite o diálogo e a troca constante entre professor e alunos.

Figura 3: Construção das figuras geométricas.
Fonte: dos autores.

Os alunos verificaram que mesmo sem conhecimento escolarizado, os povos indígenas conseguiam construir suas casas, usando materiais apropriados para a construção. Há uma matemática própria que está presente nesses processos de construção, como geometria e unidades de medidas. Para exemplificar o modo como realizam a medida, o professor apresentou o sistema de vara (Figura 4), que é uma medida tradicionalmente empregada pela etnia, utilizando uma vara de 5 palmos de quem a produziu.

Figura 4: Sistema de medição com a vara.
Fonte: dos autores.

Para introduzir o conceito de palmo, o professor pediu aos alunos que cada qual medisse seu palmo com a régua, medida que vai do dedo polegar ao dedo mínimo, e fizessem comparações entre as medidas alcançadas. Dessa maneira, ficou claro para os alunos que cada palmo pode apresentar medida diferente. O professor mostrou aos alunos que o seu palmo corresponde a, aproximadamente, 20 centímetros. Como a vara tem 5 palmos, chegaram à conclusão que a vara produzida por ele mede, aproximadamente, 100 centímetros, correspondente a um metro.

HABITAÇÕES TRADICIONAIS: ETNOARQUITETURA

As atividades desenvolvidas com os estudantes do primeiro ano do ensino médio tiveram enfoque sobre os conhecimentos da tecnologia empregada na arquitetura das habitações na Comunidade Araçá, a importância da ação coletiva no momento da construção, o período favorável para a extração das espécies vegetais mais utilizadas e os saberes matemáticos locais.

A professora de Biologia, durante a pesquisa de campo, destacou a relevância da preservação e a valorização dos bens naturais encontrados nas matas próximas à comunidade, materiais próprios para a construção e manutenção das moradias. Ressaltou a importância do uso dos materiais naturais nas edificações, que influenciam no conforto térmico, economia, sustentabilidade, segurança e respeito ao meio ambiente. Esses são elementos da etnoarquitetura. Segundo Zanin (2006 como citado em Freitas Filho, Mattos e Ramos, 2018, p. 540):

> A etnoarquitetura é uma expressão cultural da relação dos indivíduos com o ambiente que os cerca, sendo que nas atividades que a expressem são utilizados recursos naturais disponíveis para tais indivíduos, de modo que as estruturas desenvolvidas sob a luz desse conceito apresentam relação direta com o contexto físico, social e com a manutenção da vida.

As habitações na Comunidade Araçá têm características de um barracão retangular, que em média ocupam uma área de 32 m^2. Entretanto, variam bastante o tamanho, dependendo do número de pessoas da família que irão ocupar o espaço. As paredes são elevadas com a técnica do pau-a-pique ou taipa de mão ou tijolos de adobe. Partindo desse princípio, os alunos foram agrupados para desenvolverem a confecção de uma maquete de uma construção tradicional, conforme a Figura 5.

Figura 5: Estrutura da construção escolhida pelos alunos.
Fonte: dos autores.

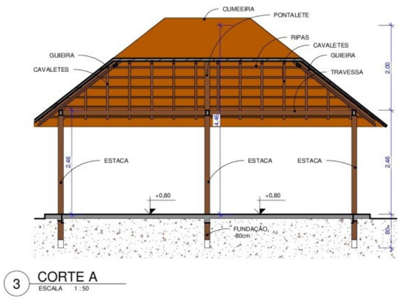
O uso de maquetes de construções originais indígenas é uma metodologia utilizada por professores e alunos na educação escolar indígena. Em Mattos e Mattos (2018) temos o uso de maquetes de construções originais dos Paiter Suruí no ensino de conhecimentos tradicionais e de conteúdos escolares na educação escolar indígena. Também, em Freitas Filho, Mattos e Ramos (2018), o uso de confecção de maquetes representativas de construções de povos indígenas do Sudeste do estado do Pará foi utilizado como resgate cultural daqueles povos e para explorar e dar significado a conteúdos da matemática escolar, em uma turma indígena do Instituto Federal do Pará.

Da mesma forma, aqui os alunos também foram envolvidos desde a elaboração de como seria a maquete até a coleta dos materiais empregados. Em sala de aula os alunos utilizaram a palha do buriti como elemento principal para a idealização da ação. Do *caranã* (nome indígena do talo da folha do buriti), foram confeccionados as estacas, linhas, travessas, guieiras, caibros, cumeeira e pontalete. Do talo das palhas, foram confeccionadas as ripas e com as palhas a cobertura. Para o acabamento foram utilizados o pó e os grãos maiores (solo), também do *caranã* (Figura 6).

Figura 6: Finalização da maquete
Fonte: dos autores.

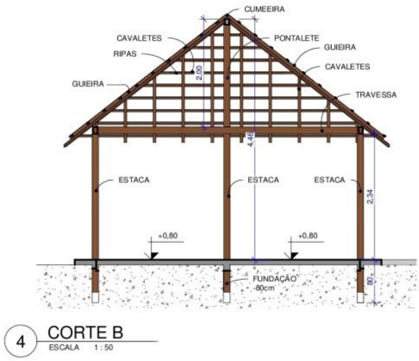
A confecção desta maquete de habitação possibilitou apresentar alguns termos de arquitetura e a função que cada elemento da construção representa no conhecimento dos indígenas, que pode se apresentar de forma distinta no conhecimento não indígena. Na análise do telhado foram apresentadas três partes: a estrutura, a cobertura e a captação de águas pluviais. Foi levado em consideração a forma, o sistema de captação de águas de escoamento, o tipo de cobertura empregado e caimentos por meio da planta baixa apresentada aos alunos (vide Figura 2, planta de cobertura).

A estrutura é o conjunto de elementos que irá suportar a cobertura e a parte do sistema de captação de águas pluviais. A estrutura do telhado é chamada de tesoura, comumente empregada nas edificações da comunidade e é considerada simples na sua constituição. As peças que compõem a tesoura são: travessa, guieiras ou tacaniças e pontalete, que podem ser identificadas nas Figuras 7 e 8. Foi apresentado aos alunos os termos comumente utilizados em arquitetura tais como: linha, tirante ou tensor; perna, empena ou asa e pendural.



(a)

Figura 7: Corte A.



(b)

Figura 8: Corte B.

Fonte: dos autores.

Para os indígenas a travessa tem a mesma função de tração que a linha (termo ocidental) na tesoura. A linha (indígena) são as vigas longitudinais que servem de apoio para a tesoura e caibros. Quanto à estrutura arquitetônica, as estacas exercem as mesmas funções que as colunas de sustentação de apoio nas edificações em alvenaria de tijolos cerâmicos. As estacas são os elementos dispostos verticalmente, que são alocadas nas extremidades do plano retangular e nas posições onde suportarão o madeiramento das linhas, travessas e tesoura.

De acordo com Mattos:

> cabe ao professor propor tarefas que tenham situações contextualizadas na realidade do aluno; estabelecer o esforço que o aluno despenderá para realizar a tarefa de acordo com seu ritmo e suas características de desenvolvimento e prever os resultados esperados, bem como, que caminhos ele pode seguir, a fim de alcançar resultados satisfatórios, que argumentações pode construir, deixando que ele perceba sua capacidade para tal. (Mattos, 2018, p. 742).

Nessa perspectiva, apresentar como as construções tradicionais eram elaboradas, permitiu aos alunos, terem uma nova visão sobre os conhecimentos gerados e difundidos em sua etnia. Essa nova visão tornou possível contextualizar conteúdos matemáticos escolares de forma criativa e significativa.

A tesoura do telhado deu significado aos alunos de vários conceitos da geometria euclidiana. Por exemplo, a inclinação, que é o ângulo entre a guieira e a travessa; paralelismo de retas, contextualizado pelas ripas; perpendicularismo de retas, dado pelo ângulo reto entre o pontalete e a travessa; semelhança dos triângulos formados pelas guieiras e as travessas; e de teoremas importantes como Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras.

Assim, constata-se com a pesquisa que nas construções, das moradias da comunidade Araçá, há uma etnomatemática que pode ser usada na escola local para valorizar a cultura e ancorar conceitos da matemática escolar. Essa forma própria de matematizar dessa comunidade, gerada e difundida pelos seus membros, vem sendo passada de geração em geração por meio do ajurí.

CONCLUSÕES

A casa representa um lugar sagrado para os povos indígenas. É o local onde vivem e criam seus filhos, dessa forma, deve ser bem construída. Para construir as moradias, os indígenas utilizam conhecimentos tradicionais que são passados de geração a geração, ao longo dos tempos. Na construção da casa, reconhece-se um sistema de ideias matemáticas, escolar e do cotidiano, e os modos de lidar com a realidade que os povos indígenas desenvolveram, como, por exemplo, a forma encontrada para medir.

Buscou-se, nas maneiras de matematizar (Skovsmose, 2000) da etnia, recursos para contextualizar e trabalhar interdisciplinarmente os conteúdos matemáticos escolares, entendendo que essa matematização da realidade implica construções de estratégias para solucionar os problemas existentes. Considera-se essa matematização repleta de relações vividas com o saber e construído no passar da história (Charlot, 2000). Portanto, essa forma de matematizar é produto das relações socioculturais dessa etnia.

Durante o desenvolvimento das atividades, os alunos puderam observar como há matemática nas práticas cotidianas desenvolvidas pela comunidade. A matemática vivida no cotidiano da aldeia é uma produção intelectual própria que abrange saberes e fazeres tradicionais. Quando essa matemática é levada à sala de aula, ressignifica os conhecimentos escolares, possibilitando aos alunos desenvolverem uma aprendizagem significativa, como apresentada por Ausubel (2003), já que os novos conhecimentos são ancorados em conhecimentos já adquiridos e que estão na estrutura cognitiva deles.

As atividades propostas, em sala de aula ou fora dela, possibilitaram ao professor contextualizar alguns conceitos da matemática escolar, fazendo com que os alunos relacionassem esses conceitos com as práticas tradicionais, de maneira interdisciplinar e significativa. A contextualização dos conceitos matemáticos escolares, por meio de atividades desenvolvidas fora da sala de aula, trouxe um caráter mais dinâmico e mais atrativo as mesmas. Além disso, reafirmou a coletividade, aspecto que eles valorizam e praticam na aldeia em ações e tarefas cotidianamente, como é o caso do ajuri na construção das moradias. Pode-se afirmar, ainda, que essas atividades trouxeram a preocupação com a escassez de alguns materiais que são utilizados para a construção das moradias e a necessidade de preservação da floresta para sobrevivência da aldeia.

Trazer os saberes e fazeres cotidianos da aldeia, tanto para o ensino como para facilitar a aprendizagem, pressupõe o fortalecimento da identidade bem como o empoderamento dos membros dela. É trabalhar a cultura a favor das relações desenvolvidas entre os indígenas, preservando-a. Nessa perspectiva, a cultura endossa os saberes e os fazeres de cada grupo social como sendo um produto cultural, produzido por meio dos seus artefatos, mentefatos e sociofatos (D'Ambrosio, 2011) e valorado pelas pessoas que compõem esse grupo.

Dessa forma, pelo viés etnomatemático (D'Ambrosio, 2011) foi possível relacionar a matemática própria das etnias, que está implícita no cotidiano dos alunos. Essa matemática própria está presente nas construções, mas não só nelas. Está em qualquer atividade indígena, que muitas vezes passam despercebidas e não são aproveitadas para estimular a aprendizagem significativa dos alunos.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, alguns aspectos foram observados e, por não estarem no escopo da investigação, não foram explorados. Um desses aspectos que provocou inquietação foi a quase extinção dos buritizais e, portanto, a pouca utilização dessas árvores nas construções das moradias. Pensa-se ser necessário um trabalho com os indígenas de produção de mudas e reflorestamento dos buritis no local da comunidade.

REFERÊNCIAS

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma perspectiva Cognitiva*. Plátano Edições Técnicas.

Brandão, C. R. (1981). *O Que é Educação*. 49 Reimpressão. Editora Brasiliense. (Coleção primeiros passos; 20.)

Brasil. (1988). *Constituição Federal*. Brasília, Gráfica do Senado.

Brasil. MEC. (2001). *Plano Nacional de Educação*. PNE. Lei nº 10.172, de 9 de janeiro de 2001. http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/L10172.pdf. Acesso em: 7 de dezembro de 2016.

Charlot, B. (2000). *Da relação com o saber: elementos para uma teoria*. Trad. Bruno Magne. ArtMed.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade* (4. ed.). Autêntica Editora.

D'Ambrosio, U. (2008). O programa etnomatemática: uma síntese. *Acta Scientiae*, 10(1). http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/74. .

Franco, M. A. R. (2001). *Planejamento Ambiental para a cidade sustentável* (2. ed.). Annablume/FAPESP.

Freitas Filho, D. G., Mattos, J. R. L. e Ramos, J. R. (2018). Saberes indígenas presentes nas construções: uma abordagem etnomatemática. *Educação, Cultura e Sociedade 8*(2), 536-551.

Henriques, R., Gesteira, K., Grillo, S. e Chamusca, A. (Org.). (2007). *Educação Escolar Indígena: diversidade sociocultural indígena ressignificando a escola*. Secad/MEC.

Libâneo, J.C.; Pimenta, S.G. (1999). Formação dos profissionais de educação: visão crítica e perspectiva de mudança. *Sociedade e Educação*. Ano XX, *68*, 239-277.

Luciano, G. J. S. (2006). *O índio brasileiro: o que você precisa saber sobre os povos indígenas no Brasil de hoje*. Coleção Educação para todos. MEC/SECAD; LACED/Museu Nacional.

Mattos, S. M. N. e; Mattos, J. R. L. (2019). Etnomatemática e prática docente indígena: a cultura como eixo integrador. *Hipátia*, *4*(1) 102-115.

Mattos, S. M. N. (2018). Comportamentos expressos pelo professor de matemática em sala de aula: uma visão de alunos brasileiros o ensino fundamental II. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31*(1), 741-748.

Mattos, S. M. N. (2016). *O sentido da matemática ou a matemática do sentido: um estudo com alunos do ensino fundamental II*. Tese (Doutorado em Educação). PUC-SP.

Mattos, J. R. L. e Ferreira Neto, A. (2016). O povo Paiter Suruí e a Etnomatemática. In Bandeira, F. A.; Gonçalves, P. G. F. (Org.). *Etnomatemáticas pelo Brasil: aspectos teóricos, ticas de matema e as práticas escolares* (79-100). CRV.

Mattos, S. M. N.; Mattos, J. R. L. (2018). Preservação Ambiental e Cultural na Educação Escolar Indígena. In Mattos, J. R. L.; Mattos, S. M. N. (Org.). *Etnomatemática e Práticas Docentes Indígenas* (185-214). Paco Editorial.

Meliá, B. (1979). *Educação indígena e alfabetização*. Edições Loyola.

Ribeiro, B. G. (1995). *Os índios das águas pretas: modo de produção e equipamento produtivo*. Companhia das Letras; editora da Universidade de São Paulo.

Santos, R. B. S. (2014). *Processos e Identidade dos Indígenas Trabalhadores da Construção Civil na cidade de Boa Vista/RR*. Universidade do Vale do Rio dos Sinos, programa de pós-graduação em educação, São Leopoldo, RS.

Silva, R. G. (2001). Etnoarquiteturas européias na formação socioespacial do Vale do Itajaí/SC-Brasil. *Fórum de Estudos recentes sobre artes, cultura e sociedade*. Reunião de antropologia do Mercosul, IV. Curitiba, 2001.

Skovsmose, (2001). *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Papirus. [Coleção Perspectiva em Educação Matemática].

Sandra Maria Nascimento de Mattos

Dirección: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Programa de Pós-Graduação em Educação Agrícola
BR 465 - Km 7 - Seropédica - RJ – Brazil. 23897-000

Teléfono: +55 21 37873741

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3202.08

Desarrollo del pensamiento estadístico en estudiantes de nivel superior a través de una Experiencia Educativa

Statistical thinking development in superior level students through one educative experience

Diana Del-Callejo-Canal[1]
Margarita Canal-Martínez[2]
Mónica Rubiette Hákim-Krayem[3]

Resumen: La finalidad de este artículo es reflexionar sobre los resultados que se observan como consecuencia de la implementación de las estrategias para desarrollar un pensamiento estadístico en estudiantes universitarios, a través de la Experiencia Educativa titulada "¿Cómo aplicar la estadística en proyectos de investigación?" La perspectiva de los dominios o competencias adaptadas de Garfield, DelMas y Chance (2003) integran el marco teórico. Se utilizaron las evidencias de aprendizaje de 40 estudiantes en tres periodos escolares; la recolección de datos se realizó mediante las producciones escritas por ellos, en dos momentos: al inicio y al finalizar el curso. Los resultados muestran que 40% de los estudiantes logró aplicar la técnica correcta, sin dificultades para argumentar por escrito y oralmente sus hallazgos. Los resultados de esta experiencia pueden permitir a profesores de estadística tomar decisiones sobre su planeación didáctica.

Fecha de recepción: 7 de septiembre de 2018. **Fecha de aceptación**: 6 de marzo de 2020.

[1] Instituto de Investigaciones y Estudios Superiores Económicos y Sociales. Universidad Veracruzana, ddelcallejo@uv.mx, orcid.org/0000-0003-4753-6577.

[2] Instituto de Investigaciones y Estudios Superiores Económicos y Sociales. Universidad Veracruzana, mcanal@uv.mx, orcid.org/0000-0002-1258-5902.

[3] Instituto de Investigaciones y Estudios Superiores Económicos y Sociales. Universidad Veracruzana, rhakim@uv.mx, orcid.org/0000-0003-0841-397X.

Palabras clave: *Pensamiento estadístico, conceptualización estadística, competencias estadísticas, educación estadística, reporte estadístico.*

Abstract: The purpose of this article is to analyze if the results of the implementation of strategies to development a statistical thinking skill in the educative experience for bachelor students entitle How applied the statistics on a research project? The concept and perspective adapted of Garfield, DelMas and Chance (2003) integrated the theorical framework. We use the learning evidences of 40 students during three school periods, through the data recollection of the writing production in two moments: before the course and after them. We found that 40% of the students applied the right statistical technique and write and expose theirs results. The founds of this experience can allow the professors make decisions for the didactic planning.

Keywords: *Statistical literacy, Statistical conceptualization, Statistical skills, Statistical education, statistical report.*

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los retos actuales en el campo de la Educación, es sin duda la responsabilidad social que los facilitadores tenemos ante los estudiantes, manifiesto que se declara en el Modelo Educativo Integral y Flexible (MEIF) de la Universidad Veracruzana (UV), que además concibe la necesidad de realizar innovaciones planeadas, organizadas y concretas para que a través de la práctica docente y en su aplicación con los estudiantes, se logre el desarrollo de las competencias –habilidades cognitivas en estudiantes universitarios para resolver problemas de su contexto real– que generen nuevas formas de ser-hacer y convivir en sociedad (Universidad Veracruzana, 1999).

Resulta pertinente aclarar que, todos los programas educativos de nivel licenciatura de la UV se estructuran por áreas de formación: Básica general, Iniciación a la disciplina, Disciplinar, Terminal y Elección libre (AFEL); nuestra propuesta se inscribe en esta última. El AFEL, está dirigida a una formación complementaria del desarrollo integral de los estudiantes (Universidad Veracruzana, 1999), y por lo tanto permite a los estudiantes de cualquier programa educativo elegir dentro de un catálogo de Experiencias Educativas (EE), algunas de ellas. En dicha área, encontramos una brecha de oportunidad para innovar y fomentar ambientes de aprendizaje inter y multidisciplinarios para aplicar la estadística en la resolución de problemas de la vida real, desde diferentes áreas del conocimiento y disciplinas, enriqueciendo así la formación integral de los futuros profesionistas y coadyuvar en el desarrollo de las competencias de los estudiantes por medio de intervenciones pedagógicas como lo es la innovación, implementación de estrategias didácticas, de recursos y métodos de enseñanza, elaboración de materiales, etcétera.

Desde este hilo conductor decidimos diseñar e implementar la EE denominada ¿Cómo aplicar la estadística en proyectos de investigación?, con la finalidad de proporcionar una EE inter y multidisciplinaria que ligara a la estadística con la investigación. Además, dentro de las competencias de las matemáticas (asignatura presente en los programas educativos), la estadística ocupa un lugar esencial, pues es la disciplina, que permite recolectar, clasificar, analizar e interpretar información cuantitativa para atender problemáticas en diferentes contextos y situaciones y de forma crítica y autónoma (Rouquete, Suárez y Ariza, 2014).

Sin embargo, en nuestra experiencia como docentes, observamos que los estudiantes de licenciatura, a pesar de haber cursado por lo menos trece años de educación de matemáticas (SEP, 2011, 2016, 2017), no han logrado desarrollar la competencia de análisis de situación, argumentación y razonamiento matemático y mucho menos el desarrollo del pensamiento estadístico, procesos cognitivos que se requieren para la comprensión conceptual de la estadística.

Aunado a lo anterior, consideramos que actualmente la cantidad de datos es abrumadora, aprender a tomar decisiones informadas basadas en los datos disponibles y confiables, con al menos las bases estadísticas pertinentes, es vital no solo para investigadores o profesionales de la estadística, sino para los ciudadanos en general (Franklin, Bargagliotti, Case, Kader, Scheaffer y Spangler, 2015 y Weiland, 2017).

En la década de 1980, varios grupos reconocidos de educación en las matemáticas como, por ejemplo: *National Council of Teahers of Mathematics* (NCTM) o *National Assesment of Educational Progress* (NAEP), propusieron a la educación estadística como una competencia necesaria en los graduados de educación media para prosperar en el mundo moderno (Franklin, Kader, Peck, Perry y Scheaffer 2005). A pesar de la necesidad detectada de incluir a la estadística como una asignatura ineludible en los niveles de educación superior, no se ha logrado desarrollar una pertinente comprensión conceptual estadística. Tu y

Snyder (2017), comentan que los estudiantes en los cursos de estadística regularmente carecen de habilidad para generar razonamiento y pensamiento estadístico.

La educación estadística no ha sido lo suficientemente accesible, ya sea como menciona Brown y Kass (2009), porque el currículo de las materias o cursos en estadística se basa en nociones no actualizadas o bien porque la preocupación en la enseñanza de la estadística se enfoca en el uso de las tecnologías y paqueterías estadísticas, que si bien es una herramienta útil, porque agiliza los procesos operativos, no refuerza en la profundización de los conceptos teóricos incluyendo en ellos el desarrollo del pensamiento estadístico (Gould, 2010).

De allí que la EE implementada –por tres periodos escolares consecutivos con estudiantes de diversos programas educativos (PE)– aprovecha la relación natural existente entre la estadística y la investigación, cuya finalidad es promover en los estudiantes un pensamiento estadístico útil para conjeturar e inferir, a través de las estrategias del método científico, la habilidad de explicar un fenómeno real con herramientas estadísticas adecuadas y sean capaces de incorporarse al mercado laboral para ser productivos y adaptarse a los cambios vertiginosos actuales con capacidad crítica y creadora (Rouquette, Suárez y Ariza, 2014). En el diseño curricular de esta EE, planteamos como unidad de competencia que el estudiante conozca, analice y aplique las herramientas estadísticas en proyectos de investigación, mediante estrategias metodológicas y teóricas pertinentes.

Al plantear y reflexionar sobre la pregunta de investigación ¿Qué resultados se observan como consecuencia de la implementación de las estrategias diseñadas para desarrollar el pensamiento estadístico? nuestra finalidad –aparte del logro del objetivo planteado en la EE– es conocer la capacidad para explicar, interpretar y emitir juicios a fenómenos de la realidad y para la toma de decisiones adecuadas con responsabilidad y una actitud crítica y obtener con ello, la conceptualización estadística, desde el logro del pensamiento estadístico.

Escribir este artículo compartiendo nuestros hallazgos, tiene dos intenciones: 1) hacer un ejercicio de autoevaluación que pueda servir a otros docentes para enriquecer su práctica docente, y 2) compartir los resultados de una comprensión integradora de la estadística, más allá de plantear ejercicios diseñados específicamente para probar su eficacia a partir de número de aciertos o fallos de un grupo de estudiantes. Esta comprensión integradora requirió identificar claramente cuáles eran las técnicas y herramientas estadísticas necesarias para analizar cualquier problema de investigación que el estudiante pudiera plantear y con ello, propiciar un pensamiento estadístico lo que sería un aporte innovador a la educación estadística.

2. MARCO CONCEPTUAL: PENSAMIENTO ESTADÍSTICO Y COMO PROVOCARLO

La sociedad demanda profesionistas con competencias, habilidades y actitudes de investigación estadística que puedan apoyar con propuestas pertinentes a la solución de problemáticas de diversa índole, pero también y como ya se mencionó, se requiere que desarrollen las competencias para manejar el bagaje de datos que en la actualidad existen, lo que contrapone a la forma tradicional de visualizar a la estadística únicamente como el manejo de meros cálculos numéricos.

Es importante desarrollar el pensamiento estadístico de los estudiantes, ya que hoy en día estamos expuestos a información estadística todo el tiempo, en Medicina, en Publicidad, en Ciencias Sociales, Política, Economía, Ecología, incluso en la información que recibimos a través de las aplicaciones sociales como *facebook*, ¿Quién de nosotros no ha leído titulares como: una copa de vino al día puede disminuir la probabilidad de un infarto? Compartimos la información, sin cuestionar la veracidad de los estudios y la asumimos como cierta, porque no nos sentimos capacitados para discutirla. Pues bien, el desarrollo del pensamiento estadístico nos aleja de esas explicaciones mágicas, y nos induce a evaluar los argumentos estadísticos de los demás y sustentar los propios (Tunstall, 2018).

A pesar de su importancia para la formación de ciudadanos responsables, el pensamiento estadístico no es una habilidad que se explicite como competencia transversal en los cursos en matemáticas o estadística (Tunstall, 2018). Además, de que dicha habilidad no se puede desarrollar únicamente a partir de ejercicios estandarizados.

Ante lo anterior, en nuestra búsqueda de cómo lograr ese pensamiento estadístico, y debido a que es una actividad intelectual de múltiples aspectos y que se desarrolla gradualmente, encontramos que el desarrollo de una comprensión conceptual estadística requiere de competencias y habilidades. Garfield, *et al.*, 2003, conceptualizan dominios o competencias adaptadas como son: *alfabetización estadística* que refiere a las habilidades básicas sobre conceptos, vocabularios y simbología necesarios para discernir sobre la información o resultados de investigación como, por ejemplo: organizar, presentar y construir tablas de datos para diferentes representaciones de los mismos; el *razonamiento estadístico* que consiste en que los estudiantes sean capaces de deducir el porqué de la aplicación de la estadística en el uso y proceso de la información, esto incluye hacer interpretaciones de los datos, resumir información, conectar conceptos e incluso combinar ideas para obtener resultados más adecuados; y *el pensamiento estadístico* que involucra el entendimiento de por qué y cómo la estadística puede ser aplicada en casos reales, de generar preguntas, colectar datos y seleccionar el análisis adecuado para responderla, ejecutar, hacer juicios de valor, de criticar y evaluar los resultados de un problema resuelto con las técnicas y herramientas estadísticas, lo que significa que hay una reflexión sobre el uso apropiado de la estadística para hacer inferencias confiables y pertinentes y que éstas sean evidenciadas a través de la comprensión del proceso integral de una investigación.

Y además, que tengan la oportunidad de dar sentido a sus conjeturas relacionadas con su disciplina con objetividad; explorar sus propias ideas; plantear hipótesis a partir de datos que sirven de base para una investigación y adaptar estrategias para argumentar sus conclusiones a través del uso adecuado de la estadística.

En conclusión, la finalidad de esta intervención pedagógica es provocar que los estudiantes desarrollen el pensamiento estadístico, a través de un aprendizaje gradual, partir de los conceptos y simbología básicos de la estadística (*alfabetización estadística*), deducir el porqué de la aplicación de la estadística en el uso y proceso de la información (*razonamiento estadístico*) y lograr que sean capaces de evidenciar su desempeño a través de la demostración y aplicación de los conocimientos y habilidades necesarias para analizar e interpretar y proponer alternativas de solución a problemáticas de su entorno, generándose aún más preguntas a futuro (*pensamiento estadístico*).

Para responder a nuestra pregunta de investigación y suscitar el logro del pensamiento estadístico, consideramos que el contexto juega un rol trascendental: los datos estadísticos provienen de un contexto y el modelo y su interpretación tiene que estar inmerso en ese contexto (Kuntze, Aizikovitsh-Udi y Clarke, 2017). Aspecto que va con lo establecido en el proyecto GAISE (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education)*, propuesto por *American Statistical Association* (Franklin *et al.*, 2005) y otras acotaciones recientes de GAISE College Report ASA Revision Committee, 2016, como son:

1. Fomentar el aprendizaje del pensamiento estadístico en el estudiante, como un proceso de investigación que busque resolver un problema de la disciplina que estudia y tome decisiones.
2. Focalizar el alcance conceptual (más allá del mero conocimiento procedimental).
3. Integrar datos reales en un contexto y con un propósito (aprendizaje activo).
4. Usar la tecnología como apoyo para desarrollar conceptos y analizar los datos.
5. Usar la evaluación con el fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes, identificando errores y aciertos y, por ende, retroalimentar y mejorar la función docente.

3. METODOLOGÍA

Con el objetivo de conocer los resultados de la implementación de las estrategias planteadas durante el periodo escolar de aplicación para desarrollar el pensamiento estadístico, se consideraron dos instrumentos de medición: a) Se aplicó un cuestionario (antes y después del curso) en el que se le solicitó al estudiante que describiera con sus palabras el uso de la estadística en proyectos de investigación; se recopiló la información en una tabla de datos para comparar posteriormente. Se valoró el número de palabras que ocupó el estudiante para describir lo que se le pidió y se realizó un análisis de texto en la paquetería *R-project, versión 3.5.0;* b) Un reporte estadístico en formato de artículo científico, para evaluar lo aprehendido sobre el uso adecuado de las técnicas y herramientas estadísticas, así como la comprensión de la presentación de los resultados de una manera académicamente válida (competencias adquiridas y redacción correcta, orden en las ideas escritas, formas de citado correctas, etc.), además de la presentación oral en clase sobre el reporte estadístico generado por el estudiante destacando el uso de la metodología estadística en términos de un pensamiento estadístico.

3.1 Programa de la EE

La EE ¿Cómo aplicar la estadística en proyectos de investigación? Como propuesta educativa para la enseñanza-aprendizaje de la estadística, resalta la importancia de visualizar a la metodología estadística como un eje pertinente aplicable a cualquier disciplina.

El programa de la EE que se oferta a través del AFEL, considera un máximo de 20 estudiantes –de cualquier disciplina–, para asegurar que el estudiante tenga una atención personalizada en su formación. Está estructurado en un total de 60 horas al semestre, con un valor de 6 créditos y es de carácter intersemestral (verano e invierno). Contiene tres temas centrales: 1) metodología estadística para proyectos de investigación –12 horas–; 2) técnicas y herramientas estadísticas para proyectos de investigación –32 horas–; y 3) presentación de reportes de investigación –16 horas–, temas que se van adecuando según lo observado en los cursos ya impartidos anteriormente.

Así mismo, dado que se permite la inscripción de estudiantes de cualquier programa educativo y disciplina, y para cumplir con el objetivo declarado en el programa de la EE,[4] se diseñaron las siguientes estrategias: 1) una exploración de saberes previos de los estudiantes sobre estadística; 2) reajuste y elección de contenidos en los temas centrales, incluimos técnicas y herramientas esenciales de estadística exploratoria, por ejemplo, las medidas de tendencia central y de dispersión, para posteriormente introducir a los estudiantes a comparaciones y relaciones estadísticas, según el tipo de variables cualitativas o cuantitativas que se usen, entre otras; y 3) se elige como trabajo académico la elaboración de un reporte estadístico –evidencia del desempeño del estudiante al final del curso–, estructurado con la aplicación de lo aprendido en clase a un objeto de estudio (problema real) y definida la pregunta de investigación.

3.2 Dinámica en clase

Una vez que se define el trabajo de investigación que evidencia los dominios de los estudiantes, las dinámicas y estrategias de enseñanza-aprendizaje que se utilizaron al interior del aula fueron pensadas y planeadas alrededor del mismo. En los primeros días, de manera intuitiva, el estudiante define su tema y la pregunta de investigación. Se les proporciona el acceso a repositorios de datos como *Web of science*, donde inicia la primera búsqueda académica para seleccionar un artículo que sea algo similar a lo que pensó o le interesó. Posteriormente y conforme avanza el curso, el estudiante es capaz de construir una pregunta de investigación lo suficientemente clara como para identificar y definir las variables

[4] Que el estudiante aplique la estadística en proyectos de investigación mediante el uso teórico-metodológico de la misma, para explicar e interpretar un fenómeno de la realidad.

que usará, y si lo que le interesa es comparar o relacionar objetos de estudio, la pregunta le servirá para plantear una hipótesis estadística.

Dependiendo del trabajo de investigación elegido, los estudiantes diseñan instrumentos y levantan encuestas piloto (fuentes primarias) o bien, obtienen y hacen uso de los datos de alguna fuente oficial (fuentes secundarias). A través del diálogo grupal y ejemplos prácticos del uso de la estadística para identificar diferencias entre variables cualitativas y cuantitativas, el estudiante selecciona el tipo de variables para su proyecto.

Las técnicas estadísticas analizadas en clase se explican bajo tres enfoques: ¿Qué es la técnica?, ¿Cómo opera (procedimiento) la técnica? y ¿Para qué sirve la técnica? Los ejercicios se realizan en clase utilizando el *software R-project*. Al término de esta fase, la siguiente actividad del estudiante es reflexionar y cuestionarse: ¿Qué de lo visto en clase me sirve y puedo aplicarlo a mi trabajo de investigación?

3.3 Participantes y tratamiento

A la fecha, la EE se ha ofertado y aplicado durante tres periodos intersemestrales: diciembre 2017-enero 2018 (invierno), junio-julio de 2018 (verano) y enero 2019 (invierno). Formalmente han cursado un total de 40 estudiantes.

A los estudiantes se les impartió un curso de 60 horas –por cada periodo–, cuya meta final es que, con lo aprendido, sean capaces de: 1) aplicar la técnica estadística correcta para resolver su pregunta de investigación, 2) escribir con claridad el por qué seleccionaron esa metodología, los resultados a los que llegaron y las conclusiones y, 3) explicar de manera oral sus hallazgos. Con la evidencia de dichos puntos, se está cumpliendo con el objetivo del programa de la EE, así mismo, se evidencia el desarrollo del pensamiento estadístico, planteado como finalidad de este artículo.

3.4 Evaluación del desempeño

La acreditación de esta EE del AFEL, requiere cuando menos 60% de evidencias entregadas en tiempo y forma y 80% mínimo de asistencias. Para asignar un puntaje a las evidencias de desempeño de los estudiantes, se determinaron criterios en una escala del 1 al 10 de acuerdo a las normas de acreditación de control escolar de la UV, establecido al inicio del curso:

- Calificación de 5 (no acreditado): Si el estudiante no logra la habilidad de relacionar su tema y pregunta de investigación con la metodología estadística vista en clase y, tampoco explica de manera escrita y oral sus finalidades y resultados, se asume que no ha logrado desarrollar los conocimientos mínimos necesarios para declarar un incipiente aprendizaje estadístico. Además de ello, se suma el incumplimiento en la entrega de evidencias durante el curso e inasistencias.
- Calificación 6 a 7. *Alfabetización estadística*. Si el estudiante logra el dominio básico de relacionar su tema y pregunta de investigación con los conceptos, vocabulario y simbología estadística; es capaz de presentar, organizar y construir tablas de datos y/o representaciones gráficas y determinar de manera incipiente qué técnica estadística podría aplicar, pero tiene dificultades para argumentar el procedimiento estadístico, así como, escribir y explicar oralmente sus hallazgos.
- Calificación 8. *Razonamiento estadístico*. Si el estudiante logra el dominio de relacionar su tema y pregunta de investigación con la selección e interpretación de datos, ordenar y resumir información; combina ideas para obtener resultados más adecuados; conecta conceptos e incluso combina ideas para obtener resultados idóneos; selecciona y aplica la técnica estadística correcta. Pero, presenta dificultad en deducir el porqué del uso de ésta en la interpretación del tema y resolución de su pregunta, y no logra hacer juicios de valor basados en criterios específicos, con organización, con lenguaje adecuado.
- Calificación 9 a 10. *Pensamiento estadístico*. Si el estudiante logra el dominio de relacionar su tema y pregunta de investigación con: disertar por qué y cómo aplicar la técnica estadística correcta; definir, colectar, organizar y valorar qué información es pertinente; generar preguntas avanzadas que orienten su proceso estadístico; sin dificultades para escribir y explicar oralmente sus hallazgos y resultados, interpretando con argumentos, coherencia y claridad; hacer inferencias confiables y pertinentes; y que exista evidencia de la relación en cuanto al proceso integral del uso de la estadística y la investigación.

4. RESULTADOS

Hemos registrado 16 programas educativos de procedencia de los 40 estudiantes que a la fecha han cursado la EE, principalmente de Economía, Ingeniería electrónica, Estadística, Biología y algunos del área de Ciencias de la Salud (tabla 1).

Tabla 1. Frecuencias de alumnos inscritos a la EE, por carrera de procedencia.

Carrera	Frec. Rel.
Nutrición	3%
Contaduría	3%
Publicidad y relaciones p.	3%
Ingeniería ambiental	3%
Ingeniería en alimentos	3%
Ingeniería química	3%
Informática	3%
Ingeniería Mecánica	3%
Química clínica	3%
Psicología	5%
Administración	5%
Químico Farmacéutico Biólogo	8%
Biología	10%
Estadística	15%
Ingeniería electrónica	18%
Economía	18%
Total	**100%**

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con los resultados valoramos que la EE a través de la metodología utilizada, reporta:

- 7.5% de índice de reprobación. Estudiantes que no lograron relacionar y aplicar la técnica estadística correcta con la pregunta de investigación y por tanto tampoco lograron escribir, ni explicar oralmente sus hallazgos con claridad, aparte de que no entregaron los avances requeridos.

- 20% de los estudiantes lograron aplicar la técnica correcta, pero tienen dificultades importantes para escribir y explicar oralmente sus hallazgos –alfabetización estadística–.
- 32.5% de los estudiantes logró aplicar la técnica correcta, con dificultades medias para escribir y explicar oralmente sus hallazgos –razonamiento estadístico–.
- 40% de los estudiantes logró aplicar la técnica correcta, sin dificultades importantes para argumentar oralmente sus hallazgos –pensamiento estadístico– (figura 1).

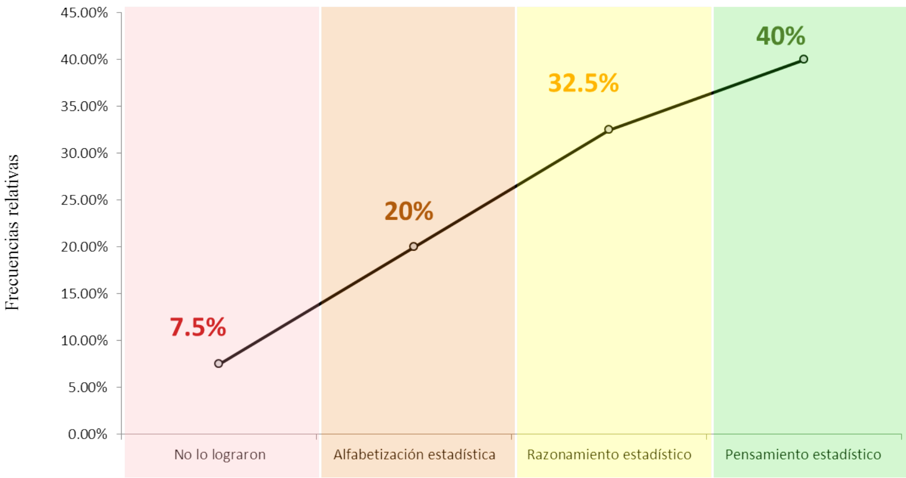


Figura 1: Frecuencias de calificaciones finales en los tres periodos ofertados
Fuente: Elaboración propia.

Durante el desarrollo de la EE se fomentó un ambiente de respeto, diálogo, autocrítica y solidaridad con la finalidad de aprender de sí mismo y de los demás. Reconocemos que el error es una fuente de aprendizaje, por eso la retroalimentación de las actividades en clase y fuera de ella son fundamentales, ya que permite al estudiante percatarse de sus errores y de cómo corregirlos.

Durante las tres aplicaciones se ha observado que, a partir de la primera retroalimentación, los estudiantes ganan confianza y se involucran entre ellos, dando opiniones y consejos para mejorar sus proyectos; también han servido para darnos cuenta que, la principal dificultad de los estudiantes está en la elaboración de su pregunta de investigación y en la identificación y operacionalización de las variables. Esto lo hemos subsanado a través de dialogar y apoyarlos en la construcción de las preguntas e identificación de las variables necesarias de acuerdo con el tema elegido.

Consideramos que la elaboración del reporte estadístico a manera de un artículo científico es un acierto y es una de las evidencias más claras de la asimilación de los temas incluidos en el curso. Al inicio, ninguno de los estudiantes inscritos se consideraba a sí mismo en condiciones de construir un artículo científico y al finalizar 92.5% de ellos ha sido capaz de entregar uno.

Los resultados nos han permitido reconocer los aciertos y dificultades del curso, por ejemplo, debimos incluir el tema de: construcción de una tabla de datos; en la planeación original asumimos que la construcción de una tabla de datos no era necesaria, pero alrededor de 30% de los estudiantes no han tenido experiencia con el traslado de la recopilación de datos a una tabla de datos estadísticamente funcional, así que reestructuramos para hacer un espacio para este tema. También ha sido necesario repasar sobre el método científico. Observamos que, a pesar de llevar cursos de metodología de investigación durante su formación disciplinaria, aproximadamente 80% de los estudiantes no sabe cómo aplicarlo en la práctica.

4.1 Dominios o competencias

a) Conocimiento de la estadística declarado por los estudiantes antes y después del curso de la EE

Los 40 estudiantes respondieron un instrumento antes y después del curso para valorar la asimilación del contenido de la EE. Entre otras cosas, describieron con palabras el uso de la estadística en proyectos de investigación. Como resultado del análisis de texto de esta instrucción, se observó que antes del curso el estudiante utilizó en promedio 8 palabras para describir el uso de la estadística en proyectos de investigación; mientras que, al finalizar el curso, fue capaz de expresarse en promedio con 31 palabras para responder la misma pregunta. Algunas de las respuestas más significativas, se sintetizan en la tabla 2.

Tabla 2. Respuesta antes y después del curso a la instrucción "Describe con tus palabras el uso de la estadística en proyectos de investigación"

Describe con tus palabras el uso de la Estadística en proyectos de investigación	
Antes de iniciar el curso	**Al finalizar el curso**
Para saber la probabilidad de las cosas.	La estadística se aplica para tener un mejor manejo de información en la investigación, ya que esta estudia y presenta los datos de una manera más accesible a entender.
Para aceptar o rechazar una hipótesis de investigación.	La estadística la podemos aplicar en distintas investigaciones en cualquier disciplina, las cuales se basan en plantear hipótesis, seguir una metodología, hasta llegar a los posibles resultados.
Obtención de promedios, rangos y gráficos para comparación de datos.	La estadística en un trabajo de investigación es como la alimentación de un bebé, necesaria para poder crecer y dependiendo de la edad (o dificultad del trabajo) habrá un alimento adecuado para él.
Determinar conjuntos.	Creo que es una herramienta fundamental, la cual si es usada de manera adecuada puede facilitar la manera de explicar los resultados.
Traducir datos de una forma cuantitativa.	Al realizar investigación uno recopila o genera datos. Las herramientas de la estadística nos permiten trabajar estos datos para poder sacar conclusiones de ellos. Es importante conocer la naturaleza de lo que investigamos para poder usar y escoger la mejor herramienta estadística.

Fuente: Elaboración propia.

En los gráficos de nube se observa un gran cambio. Mientras que antes del curso, el estudiante asoció el uso de la estadística en dos aspectos: datos e hipótesis. Al final del curso, el estudiante relacionó a la estadística con investigación, herramienta, resultados, adecuada, importante, mejor. Esto evidenció el avance significativo en la comprensión y sentido del uso de la estadística en un proyecto de investigación y por lo tanto en el desarrollo de su *pensamiento estadístico* (ver figura 2).

Uso de palabras para describir el uso de la Estadística antes del curso	Uso de palabras para describir el uso de la Estadística después del curso.
	

Figura 2. Análisis de texto antes y después del curso.
Fuente: Elaboración propia con base al cuestionario antes/después. Paquete *R-project versión 3.5.0.*

b) Reporte estadístico y el tipo de preguntas que genera

Encontrar el ejercicio que une estas dos temáticas: metodología de investigación y estadística es el reto más grande dentro de esta EE. La alternativa que encontramos fue que, el estudiante decida un tema de investigación en total libertad y agrado. En consecuencia, los ejercicios diseñados de la clase no son estandarizados, ni tampoco tomados de un libro, esto creemos es lo que hace distinta esta experiencia.

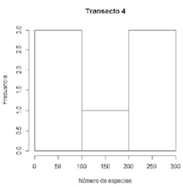
Las temáticas que se han abordado en el curso son variadas, por mencionar algunas: "*Path Planning*, para *robots* con redes resistivas, ocupando como método de búsqueda el algoritmo LCC"; "Diseño y construcción de un prototipo para el tratamiento de residuos orgánicos de piña, papaya y plátano en 21 días"; "El efecto de la crisis del euro en el consumo de productos provenientes de América Latina"; "Diversidad de cnidarios en el arrecife rocoso de la Mancha, Veracruz". La diferencia de temas en los que se puede aplicar una misma técnica estadística otorga un valor agregado a esta innovación educativa y provoca en los estudiantes la curiosidad e interés investigativo.

El trabajar tablas provenientes de datos reales, provoca que en muchas ocasiones se planteen dudas que no surgen con los ejercicios tradicionales, ni se encuentran las respuestas en ningún libro, a estas las hemos llamado preguntas avanzadas, por ejemplo:

- "La regresión, la variable 'profundidad' no se distribuye normal, pero la *qqplot* parece normal ¿Se cumple el supuesto de normalidad o no?" Estudiante de la licenciatura en Biología, diciembre 2017-enero 2018 (figura 3a).
- "Tengo una variable cualitativa y otra cuantitativa ¿cómo mido la relación entre ellas?" Estudiante de la licenciatura en Instrumentación electrónica, diciembre 2017-enero 2018 (figura 3b).
- "Si hay dos medidas de tendencia central (media y mediana) ¿Cuál ocupo?" Estudiante de la licenciatura en Economía, junio-julio 2017 (figura 3c).
- "El mapa del análisis de correspondencias se ve una mancha y no se distinguen los puntos ¿Cómo lo interpreto?" Estudiante de la licenciatura en Ciencias y técnicas estadísticas, enero 2019 (figura 3d).

Como se observa en la figura 3, la resolución de las preguntas que surgen del estudiante, debido al contacto con datos reales, hacen que el conocimiento se asimile de una forma más productiva y que la dinámica de la clase sea más participativa. El facilitador responde las dudas en clase y ante todo el grupo, posteriormente el estudiante al presentar su artículo final se ve obligado a registrar de manera escrita sus hallazgos (incluyendo sus dudas durante el proceso), con sus propias palabras (figura 3).

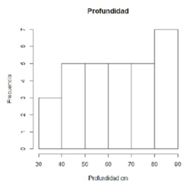
La resolución de problemas estadísticos en este sentido no es algo mecánico al estilo de una receta, como en los tradicionales cursos de estadística, sino que en realidad promueve que el estudiante al tener un problema (de su agrado) en mente, se ocupe de resolverlo y que adapte o descarte los temas vistos en clase para la resolución de su indagación personal.



Fuente: Elaboración propia usando R-project 3.3.2

La profundidad del área va incrementando conforme se acerca a la barrera arrecifal, teniendo una mínima de 36 cm en la orilla de la costa y una máxima de 90 cm cerca de la barrera arrecifal, como se puede observar en el histograma 3. Esta variable también influye en la posición geográfica en la que se encontraron los cnidarios, debido a que necesitan luz solar al tener una relación simbionte con algas llamadas zooxantelas y un constante oleaje para la oxigenación.

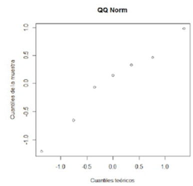
Figura 2. Frecuencia de la profundidad en cm



Fuente: Elaboración propia usando R-project 3.3.2

Según el análisis en el modelo de regresión lineal simple, la correlación con el método de Pearson entre la variable dependiente que es la riqueza de especies y la variable independiente que es la profundidad hay una correlación significativa positiva con un valor de 0.974. Posteriormente al hacer una prueba de hipótesis el p valor es igual a 0.0002026 al ser menor a 0.05 se rechaza H_0 lo que nos dice nuevamente que si hay relación entre las variables. Al verificar los supuestos de erros se observa que se comportan normal teniendo en cuenta la robustez de estos, de acuerdo al qqnorm que se muestra en la Figura 3, y con la prueba de Shapiro-Wilk nos da que el p valor es igual a 0.875 lo que nos dice que es mayor a β_1 y no se rechaza la hipótesis, los datos siguen una distribución normal.

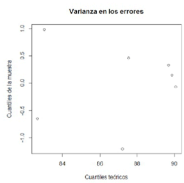
Figura 3. Errores de distribución normal



Fuente: Elaboración propia usando R-project 3.3.2

Por último, si cumple con la homogeneidad de la varianza de errores según la Figura 4, lo que nos dice que la profundidad si influye directamente con la baja diversidad de cnidarios que presenta el arrecife rocoso de la Mancha, Veracruz.

Figura 4. Homogeneidad en la varianza de errores



Fuente: Elaboración propia usando R-project 3.3.2

Extracto del trabajo final de la estudiante de la Licenciatura en Biología, diciembre 2017-enero 2018.

	Normal	2,66666667	4,8	0,53333333	8
	Sobrepeso	1,66666667	3	0,33333333	5
	Obesidad	0	0	0	0
	Total	5	9	1	15
	P-Valor	**0,09467894**			

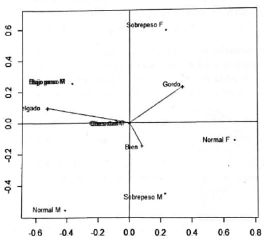
Fuente: Elaboración propia, usando Excel 2010

Al analizar P-Valor con respecto a las mujeres, se observa que este es menor a 0.05, por lo tanto se rechaza la hipótesis plateada (H0) con un 99% de confianza.

Por el contrario, al analizar P-Valor respecto a los hombres, se observa que este es mayor a 0.05, por lo tanto H0 no se rechaza y hay un 91% de confianza en el modelo.

Para una mayor exactitud en los resultados se realizó un análisis de correlación simple, donde el principal resultado es el gráfico de puntuaciones de la figura 1.

Figura 1. Biplot



En donde el primer cuadrante muestra que las mujeres con sobrepeso se visualizan de forma correcta como "gordas".

En el segundo cuadrante de igual manera se observa que las personas delgadas se autoperciben corporalmente de forma real respecto a su IMC.

Extracto del trabajo final de la estudiante de la Licenciatura en Instrumentación Electrónica, diciembre 2017-enero 2018.

Figura 3. Extracto de los trabajos de los estudiantes de la EE ¿Cómo aplicar la estadística en proyectos de investigación?

Fuente: Elaboración propia.

errores y los errores ajustados, donde se espera que los errores no tengan un patrón definido en su comportamiento.

Resultados

I. Análisis exploratorio.

En primer lugar las variables PIBP y PIBC tienen una diferencia de 0.00066 entre sus medias, mientras que la diferencia entre sus medianas es de 0.0003451, es decir, la diferencia entre sus medias es mayor a la diferencia entre sus medianas (véase cuadro 1). Por lo se cree que la mediana es una mejor medida de tendencia central para la comparación de nuestras variables. En segundo lugar, otras de las diferencias en las variables son los valores mínimos y máximos que se observan en cada una éstas, siendo 0.0473276 el máximo valor de la variable PIBP contra un valor máximo de la variable PIBC de 0.0251748 (véase cuadro 1).

Con la información anterior, se sabe que la distancia existente entre la mediana y el valor máximo, de cada variable, es mucho más pronunciada en PIBP que en PIBC. Teniendo una idea de la distribución de los datos, con colas más cargadas a los valores grandes en el caso de la variable PIBP y distribuidas de manera más normal en la variable PIBC.

Cuadro 1. Medidas de tendencia central

Criterio	PIBP	PIBC	ADI
Media	0.0069455	0.0062855	7.145
Mediana	0.0046079	0.0042628	7.530
Valor mínimo	0.0002557	0.0002168	2.120
Valor Máximo	0.0473276	0.0251748	9.820
distancia entre Mediana-Mínimo	0.0043522	0.004046	5.41
Distancia entre Mediana-Máximo	0.0427197	0.020912	2.29

Fuente: Elaboración propia utilizando R projet versión 3.3.2.

Los gráficos que se presentan en la figura 1 observamos las distribuciones de cada una de las variables. Como ya se anticipó, la concentración de los datos de PIBP es hacia los valores pequeños de entre 0.00 y 0.01 con una cola cargada hacia los superiores a este rango, y un valor atípico que pertenece al valor máximo. Similarmente, la variable PIBC presenta colas cargadas hacia valores superiores a 0.01, pero con un valor atípico menos aislado. Por su parte, a variable ADI presenta una concentración más normal con una cola ligeramente cargada a los valores menores a 5 y con un valor atípico cercano a 2.

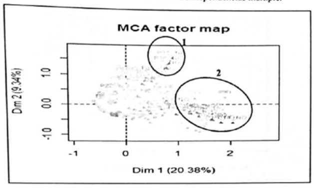
Figura 1. Diagramas de cajas y alambres

3

Extracto del trabajo final de la estudiante de la Licenciatura en Economía, junio-julio 2017

2.3 Análisis de correspondencias

Figura 1. Mapa simétrico del análisis de correspondencias múltiple.



Fuente: elaboración propia con software R.

Con el fin de resumir una gran cantidad de datos en un número reducido de dimensiones con la menor perdida de información posible se procedió a realizar un análisis de correspondencias múltiples el cual con tan solo dos dimensiones explica aproximadamente el 30% de la inercia de los datos. También se puede observar que el elipse 1 contiene las afirmaciones P35, P36 y P37 siendo estas las de mayor poder de discriminación. Dentro del elipse 2 se concentra un grupo de individuos los cuales son aquellos que en la mayoría de las afirmaciones sus respuestas fueron negativas.

2.4 Perspectiva de los alumnos con respecto al emprendedurismo

Tabla 2. Respuestas a pregunta abierta categorizada

Menciona en no más de 2 líneas, tu opinión acerca del tema del emprendimiento:

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
1 Es un tema de interes y necesario	135	21.5	21.5
2 Los conocimientos adquiridos en la formacion academica son utiles para el tema	30	4.8	26.2
3 Es una manera de hacer crecer la economia del pais y generar empleos	34	5.4	31.6
4 Alternativa para tener mejor calidad de vida, independencia e ingresos propios	78	12.4	44.0
5 Es iniciativa, innovacion y creatividad de nuevos proyectos	69	11.0	55.0
6 Debería adoptarse como experiencia educativa	31	4.9	59.9
7 No tengo interes sobre el tema	24	3.8	63.8
8 No contesto	228	36.2	100.0
Total	629	100.0	

Fuente: elaboración propia

Finalmente se realizó un análisis textual para conocer la opinión acerca del emprendedurismo, se establecieron categorías de acuerdo a las respuestas obtenidas, observando que la respuesta con mayor frecuencia es que encuentran el emprendedurismo un

4

Extracto de la primera retroalimentación de estudiante de la Licenciatura en Ciencias y técnicas estadísticas, enero 2019.

Figura 3 (continuación). Extracto de los trabajos de los estudiantes de la EE ¿Cómo aplicar la Estadística en proyectos de investigación?

Fuente: Elaboración propia.

Resaltamos también que hemos encontrado que 8% de estudiantes que se destacan por su capacidad de autoaprendizaje y por cuenta propia indagan variaciones a las técnicas mostradas en clase (al menos un estudiante de cada curso intersemestral). En resumen, hemos registrado que 16 estudiantes han realizado preguntas que dan muestra de un grado de evolución en la comprensión de la aplicación de la estadística en la resolución de problemas de investigación, esto hace constar que hay evidencia de un 40% de los estudiantes que muestran el desarrollo de un *pensamiento estadístico* durante la participación en clase y en su reporte estadístico. Esto, no se da en cursos tradicionales en los que se trabaja con resolución de ejercicios estandarizados.

5. CONCLUSIONES: ACIERTOS Y DIFICULTADES

El valor educacional de usar experiencias de consultoría en la educación estadística es bien conocido (Sabo, 2016), la EE intersemestral *¿Cómo aplicar la estadística en proyectos de investigación?* no solo planteó un escenario de consultoría, sino que permitió que los estudiantes inscritos adquirieran el conocimiento esencial de la aplicación de la estadística en su disciplina, que aprendieran de otras áreas y se interesaran en temas que no conocían. Esto amplía su visión del uso, aplicabilidad y necesidad de esta disciplina y despierte su curiosidad, que es uno de los elementos primordiales para el desarrollo del *pensamiento estadístico*.

Estamos de acuerdo con Hoerl y Snee (2017), en que cada día más se necesitan estadísticos holísticos que resuelvan problemas ágilmente, más aún se necesitan profesionistas de cualquier área de conocimiento que reconozcan y hagan uso de la estadística, por eso es por lo que los casos de estudio reales y no sacados de un libro o diseñados previamente, son necesarios para la educación actual. Que el estudiante proponga una pregunta de investigación y recolecte datos que no cumplen al pie de la letra con la teoría, los coloca en la necesidad de no solo conocer las técnicas y herramientas con las que cuentan para resolver el problema, sino de relacionarlas y/o combinarlas.

La construcción de un reporte estadístico a manera de un artículo científico, como evidencia de aprendizaje y logro de los dominios planteados, ha sido de los grandes retos a lo largo de estas tres aplicaciones. Hay una tendencia marcada a que los estudiantes provenientes del área Físico-Matemáticas, Biología y

Química, Medicina y Ciencias de la Salud, tengan una mayor facilidad para la comprensión y redacción de esta evidencia de aprendizaje, a diferencia de los estudiantes provenientes de Humanidades y Ciencias de la Conducta, Ciencias Sociales y Economía, que presentan mayores dificultades.

El manejo de paquetería de *software* libre R-*project* es una de las herramientas que más trabajo ha costado para la comprensión entre los estudiantes, es necesario ir más despacio de lo que originalmente se había planeado. Requiere realizar muchas prácticas en clase con la orientación del facilitador para que los estudiantes tengan la disposición de consultar sus dudas en la ejecución. Se ha detectado que con regularidad los errores que se cometen son: falta de paréntesis, falta de comas, la no distinción entre mayúsculas y minúsculas, errores de dedo al llamar a las variables, etcétera.

La presentación de su trabajo final ante la clase es una evidencia de aprendizaje muy valorada entre los estudiantes a lo largo de estas tres aplicaciones. Durante la misma, se les hizo notar las mejoras que pueden hacer, como, por ejemplo: dicción, expresión corporal, orden de las ideas, uso adecuado de las diapositivas, etc. Se exhortó a los estudiantes a participar en la mejora de los trabajos de sus compañeros, con ello no solo se apoyan entre ellos, sino que permite autoevaluarse y corregirse. Consideramos que este recurso contribuye en su formación integral universitaria.

Para responder a la pregunta de investigación ¿Qué resultados se observan como consecuencia de la implementación de las estrategias diseñadas para desarrollar el pensamiento estadístico? Acudimos a los resultados de este artículo: 40% de los estudiantes lograron la competencia de un *pensamiento estadístico*, 32.5% la competencia de un *razonamiento estadístico* y 20% la competencia de una *alfabetización estadística*, por lo que podemos comentar que el curso fue exitoso. La pregunta que nos surge es ¿Por qué no hemos logrado 100% de éxito que es la meta a la que esperaríamos llegar? Tenemos algunas hipótesis que en futuros estudios tendríamos que demostrar: El carácter interdisciplinar de la materia hace que las habilidades de razonamiento de los estudiantes sean distintas debido a la disciplina de formación original; el ritmo de aprendizaje propio de cada estudiante; el hecho de que sea intersemestral, lo cual hace que todo sea más veloz; la familiarización con un *software* que va por comandos y no por ventanas, lo que lleva a una brecha disciplinar que no podemos acortar en un solo curso.

El enfoque que aquí se expone para desarrollar el *pensamiento estadístico*, parte de un curso completo de 60 horas/semana/mes y considera como centro la realización de un reporte estadístico, ya que el *pensamiento estadístico* no es medible a partir de tareas formuladas, aun cuando se enriquezcan con un contexto, así que requiere de la complejidad como su aliada. Hay estudios que prueban, a partir de ejercicios diseñados para ello, que entre las principales dificultades para resolver problemas de comparación de conjuntos de datos es que los estudiantes no los conciben como un conjunto, sino como elementos individuales (Orta y Sánchez, 2018). Estos autores proponen el contexto de riesgo, como uno de los elementos que modifica el *razonamiento estadístico*. Nosotros proponemos el reporte estadístico, como el elemento clave para desarrollar el *pensamiento estadístico*.

Y además de lo anterior, que tengan la oportunidad de dar sentido a sus conjeturas relacionadas con su disciplina con objetividad; explorar sus propias ideas; plantear hipótesis a partir de datos que sirven de base para una investigación y adaptar estrategias para argumentar sus conclusiones a través del uso adecuado de la estadística.

Por último, dejamos el comentario de un estudiante al finalizar el curso: "Me parece que esta experiencia educativa es fundamental para cualquier carrera ya que nos da una vista general de lo bueno que es emplear la estadística y nos ayuda para futuras investigaciones".

REFERENCIAS

Brown, E. N., y Kass, R. E. (2009). What Is Statistics? The American Statistician, *63*(2), 105-110. https://doi.org/10.1198/tast.2009.0019

GAISE College Report ASA Revision Committee (2016). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education: College Report. *American Statistical Association*, (February), 1-61. http://www.amstat.org/education/gaise

Franklin, C. A., Bargagliotti, A. E., Case, C. A., Kader, G. D., Scheaffer, R. L., y Spangler, D. A. (2015). *Statistical education of teachers (SET)*. http://www.amstat.org/education/SET/SET.pdf

Franklin, C. A., Kader, G. D., Mewborn, D., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. L. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) College Report. Guidelines for Assesment and Instruction in Statistic Educaction (GAISE) Report. A Pre-K-12 Curriculum Framework*. https//doi.org/10.3928/01484834-20140325-01

Garfield, J., DelMas, R., y Chance, B. (2003). The Web-based ARTIST: Assessment Resource Tools for Improving Statistical Thinking. *Paper presented in the Symposium:*

Assessment of Statistical Reasoning to Enhance Educational Quality, (April). http://apps3.cehd.umn.edu/artist/articles/AERA_2003.pdf

Gould, R. (2010). Statistics and the modern student. *International Statistical Review*, *78*(2), 297-315. https//doi.org/10.1111/j.1751-5823.2010.00117.x

Hoerl, R. W., y Snee, R. D. (2017). Statistical Engineering: An Idea Whose Time Has Come? *American Statistician*, *71*(3), 209-219. https//doi.org/10.1080/00031305.2016.1247015

Kuntze, S., Aizikovitsh-Udi, E., y Clarke, D. (2017). Hybrid task design: connecting learning opportunities related to critical thinking and statistical thinking. *ZDM - Mathematics Education*, *49*(6), 923-935. https//doi.org/10.1007/s11858-017-0874-4

Orta, J. A., y Sánchez, E. (2018). Niveles de razonamiento sobre variación estadística de estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas en un contexto de riesgo. *Educación Matemática*, *30*(1), 47-71. https//doi.org/10.24844/EM3001.02

Rouquette-Alvarado, J., Suárez-Burgos, A., y Ariza-Gómez, E. (2014). Relevancia de la formación estadística en la universidad. La importancia de encontrarles sentido a las matemáticas. *Reencuentro 69*, 37-45.

Sabo, R. T. (2016). Providing Consulting Experiences Through Role Playing in a Graduate Statistics Course. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, *58*(3), 319-333. https//doi.org/10.1111/anzs.12167

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2011). Plan de Estudios 2011, Educación Básica. http://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2016). Propuesta curricular para la educación obligatoria 2016. http://www.gob.mx/cms/uploads/docs/Propuesta-Curricular-baja.pdf

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). Mapa curricular para la generación 2017-2020. http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/mapas_curriculares.php

Tu, W., y Snyder, M. (2017). Developing conceptual understanding in a statistics course: Merrill's First Principles and real data at work. *Educational Technology Research and Development*, *65*(3), pp. 579-595. https//doi.org/10.1007/s11423-016-9482-1

Tunstall, S. L. (2018). Investigating College Students' Reasoning With Messages of Risk and Causation. *Journal of Statistics Education*, *26*(2), 76-86. https//doi.org/10.1080/10691898.2018.1456989

Universidad Veracruzana (1999). Nuevo modelo educativo para la universidad veracruzana lineamientos para el nivel licenciatura. http://www.uv.mx/meif/files/2015/03/MEIF.pdf

Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 33-47. https//doi.org/10.1007/s10649-017-9764-5

Web of Science (2018). Clarivate analytics. http://apps.webofknowledge.com/WOS_GeneralSearch_input.do;jsessionid=5A817342442BC2DFF64E54F5E1ECEC4C?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&SID=8DkL3UoieFQeP7I3EYZ&preferencesSaved=

Diana Del-Callejo-Canal

Dirección Postal: Antonia Peregrino, 23. Colonia Badillo. C.P.91190, Xalapa, Veracruz, México.
Teléfono móvil: 2287535864

 DOI: 10.24844/EM3202.09

Análisis cualitativo de un aprendizaje estadístico temprano con la mirada de los espacios de trabajo matemático orientado por el ciclo investigativo

Qualitative analysis of early statistical learning with the perspective of mathematical working spaces oriented by the research cycle

Pedro Vidal-Szabó[1]
Alain Kuzniak[2]
Soledad Estrella[3]
Elizabeth Montoya[4]

Resumen: La investigación en estadística temprana requiere atender a la progresión del aprendizaje estadístico, en especial, a la capacidad de los estudiantes de primaria de crear representaciones que involucran datos en contextos reales. Esta investigación cualitativa describe y caracteriza una lección de estadística relacionada con el análisis exploratorio de datos en el cuarto grado de enseñanza. Se diseñó e implementó dicha lección y se recolectaron las representaciones de datos que produjeron tres estudiantes de 9 a 10 años. Desde una perspectiva global y local, se analiza la lección y sus implicancias en el aprendizaje respectivamente, según las etapas del ciclo investigativo y las génesis de los Espacios de Trabajo Matemático Estadístico. Se concluye que

Fecha de recepción: 4 de abril de 2019. **Fecha de aceptación**: 20 de mayo de 2020.

[1] Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile; pedro.vidal@pucv.cl; orcid.org/0000-0002-3320-9789.

[2] Département de Mathématiques, Université Paris Diderot, Francia; alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr; orcid.org/0000-0001-8170-3530.

[3] Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile; soledad.estrella@pucv.cl; orcid.org/0000-0002-4567-2914.

[4] Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile; elizabeth.montoya@pucv.cl; orcid.org/0000-0002-1200-6261.

potencialmente la lección generó un espacio de trabajo que proveyó de oportunidad de aprendizaje estadístico, permitiendo a los estudiantes vivenciar una aproximación de los procedimientos que utiliza un estadístico para pensar y aprender más en la esfera del contexto, razonando y comunicando sus ideas con evidencia empírica basada en datos.

Palabras claves: *Espacios de Trabajo Matemático, Análisis Exploratorio de Datos, Ciclo Investigativo, Representaciones de Datos en Contexto, Pensamiento Estadístico.*

Abstract: Research in early statistic requires attention to the progression of statistical learning, especially the ability of primary school students to create representations that involve data in real contexts. This qualitative research describes and characterizes a statistical lesson related to exploratory data analysis in the fourth grade of teaching. This lesson was designed and implemented, and data representations were collected that produced three students aged 9 to 10. From a global and local perspective, the lesson and its implications for the learning of these students are analyzed according to the stages of the research cycle and the genesis of the Statistical Mathematical Working Spaces. It is concluded that the lesson potentially generated a workspace that provided a statistical learning opportunity, allowing students to experience an approach to the procedures that a statistician uses to think and learn more in the sphere of context, reasoning and communicating their ideas with data-based empirical evidence.

Keywords: *Statistical Mathematical Working Spaces, Exploratory Data Analysis, Research Cycle, Data representations in Context, Statistical Thinking.*

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, todavía persisten definiciones que caracterizan la estadística como una rama de la matemática, aunque ya se ha establecido que la estadística es una disciplina independiente con sus propias ideas centrales (Moore, 1998), y cuya naturaleza tiene un carácter interdisciplinar que involucra convertir los datos en visiones del mundo real, siendo la matemática y la computación herramientas para tal propósito (Wild, Utts y Horton, 2018). La estadística es definida como la ciencia de aprender desde los datos, y también, de medir, controlar y comunicar la incertidumbre, según la Asociación Estadística Americana (ASA).

La falta de diferenciación disciplinar entre la estadística y la matemática, ha motivado varios estudios que dan cuenta del fenómeno didáctico relacionado con la difusa distinción entre sus enseñanzas en la escuela (Moore, 1997), lo cual motiva diseños innovadores de tareas y marcos conceptuales que permitan desarrollar y explicar el razonamiento estadístico de los estudiantes en formación (Pfannkuch, Ben-Zvi y Budgett, 2018).

Uno de los propósitos de la educación formal es contribuir al desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes al resolver problemas reales y, frente a incertidumbre, tomar decisiones que se fundamenten en la comprensión, explicación y cuantificación de la variabilidad de los datos en un contexto real (Zieffler, Garfield y Fry, 2018). Generalmente, el sistema educativo promueve una alfabetización estadística en la enseñanza a través del currículo, el cual considera conocimientos estadísticos básicos requeridos para la formación desde el primer grado de escolaridad en algunos países (e.g., Ministerio de Educación de Chile, 2012). Estos conocimientos son útiles para tomar decisiones basadas en evidencias dadas por los datos en contexto y sus representaciones.

Una persona alfabetizada estadísticamente es capaz de leer, interpretar, organizar, evaluar críticamente y apreciar información estadística en áreas de conocimiento social, cultural, científico, artístico, entre otras (Ben-Zvi y Garfield, 2004; Gal, 2004). No obstante, la alfabetización estadística requiere de investigación que atienda a su progresión, en especial, a la capacidad de los estudiantes de primaria de crear representaciones que involucran la variabilidad omnipresente en los datos. Dicha capacidad no ha sido foco de la investigación en los primeros años de formación escolar, siendo subestimada, por lo que requiere un mayor reconocimiento (English, 2010, 2018).

Esta investigación cualitativa busca describir y caracterizar una lección de estadística relacionada con el análisis exploratorio de datos en el cuarto grado de enseñanza. Se realiza un análisis de la lección orientada por el ciclo investigativo y se examinan los desempeños que propició en tres estudiantes de primaria, mediante un marco conceptual referido al espacio de trabajo propio de la estadística temprana.

2. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

El trabajo con problemas reales, en vez de la generación de modelos abstractos, fue enfatizado por el estadístico J. W. Tukey hace más de 57 años a la comunidad científica. En sus palabras:

> ¿Qué hay del futuro? El futuro del análisis de datos puede implicar un gran progreso, la superación de dificultades reales y la prestación de un gran servicio a todos los campos de la ciencia y la tecnología. ¿Lo hará? Eso nos queda a nosotros [los estadísticos], a nuestra voluntad de tomar el camino difícil de los problemas reales con preferencia al camino fácil de suposiciones irreales, criterios arbitrarios y resultados abstractos sin apego real. (Tukey, 1962, p. 64).

Tukey (1977, 1980) fue pionero en liberar los vínculos tradicionales del análisis de datos de los modelos basados en probabilidad y, así el análisis exploratorio de datos comenzó a convertirse en una actividad intelectual independiente (Ben-Zvi, 2014), pues permite pensar, conjeturar y aprender desde los datos. Este análisis inicial tiene como principal característica ser exploratorio, lo que supone un tratamiento más flexible y amplio de distintas representaciones de datos para la búsqueda de regularidades, mediante la exploración sin restricciones, cuyo resultado es un análisis basado únicamente en lo que muestran los datos y solo aplicable a los individuos y circunstancias para los que fueron recolectados; por tanto, las conclusiones son informales, sin todavía hacer inferencias formales sobre alguna población.

En consecuencia, el análisis exploratorio de datos corresponde a un paradigma de la estadística, en el sentido que implica "una combinación de creencias, convicciones, técnicas, métodos y valores compartidos por un grupo científico", según precisan Kuzniak, Tanguay y Elia (2016, p. 723).

3. EL CICLO INVESTIGATIVO PPDAC

Este ciclo conocido como PPDAC –i.e., *Problema*, *Plan*, *Datos*, *Análisis* y *Conclusiones*; ver Figura 1– es una de las cuatro dimensiones del pensamiento estadístico en una investigación empírica, propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), basado en MacKay y Oldford (1994).

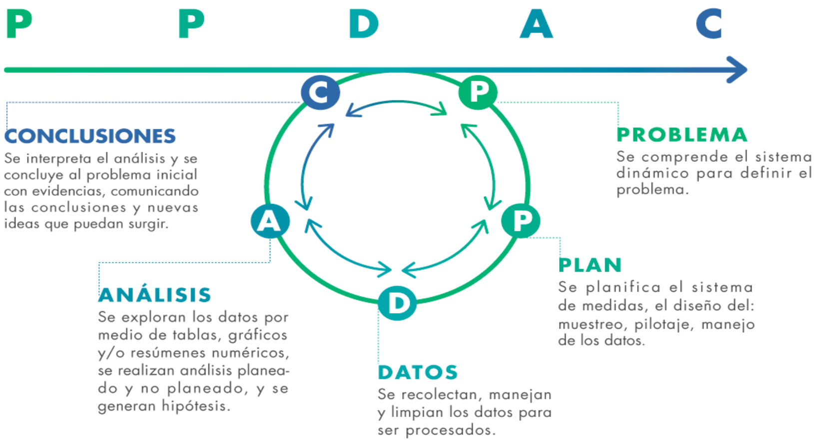


Figura 1: Ciclo PPDAC (elaboración propia basada en Wild y Pfannkuch, 1999).

El ciclo investigativo (PPDAC) "describe los procedimientos a través de los cuales un estadístico trabaja y lo que el estadístico piensa para aprender más en la esfera del contexto." (Pfannkuch y Wild, 2004, p. 41). Este ciclo se ocupa de abstraer un problema estadístico y permite explorar las posibles soluciones, provocando cambios en un sistema para mejorar algo, lo cual requiere una mejor comprensión de su dinámica, en tanto a cómo funciona, anticiparse a cómo reaccionará ante los cambios en los flujos de entrada, su configuración y el contexto (MacKay y Oldford, 2000). Por lo tanto, el ciclo investigativo contribuye al aprendizaje desde los datos (Wild *et al.*, 2018).

La línea de investigación de Pfannkuch y Wild (2000, 2004) ha permitido fundamentar el ciclo investigativo como un método para elaborar un diseño de enseñanza estadística a nivel escolar, tal como reportan Makar y Fielding-Wells (2011). Ejemplo de ello, es el Reporte GAISE, pues ha sido un marco de referencia desde la perspectiva curricular desde Pre-K al grado 12 (Franklin *et al.*, 2007).

A través del ciclo investigativo como propuesta de formación estadística en la escuela, se fomenta la alfabetización y razonamiento de los estudiantes en su rol de consumidores y productores de datos, vinculado al desarrollo de habilidades relacionadas, al ser capaz de representar y argumentar estadísticamente en base a evidencias y, de manera crítica, examinar afirmaciones basadas en datos. Respecto a estas habilidades, Ben-Zvi (2018, p. 7) indica "que todos los ciudadanos las deberían tener y, por lo tanto, que todos los estudiantes deben aprender como parte de su educación formal.”

4. MARCO CONCEPTUAL

A partir de estudios previos, se presenta un marco conceptual que extiende el modelo Espacio de Trabajo Matemático al trabajo estadístico (*Cf.*, Estrella, Olfos, Morales y Vidal-Szabó, 2018; Estrella y Vidal-Szabó, 2017).

4.1 Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

El ETM es un modelo teórico y metodológico que brinda un enfoque analítico para estudiar el trabajo que realizan personas (o sujetos potenciales) frente a alguna actividad matemática. La noción de *espacio* está referida al ambiente intencionado y sistematizado que puede facilitar el *trabajo* que ejecuta un individuo al enfrentar algún problema *matemático* (Kuzniak y Richard, 2014; Flores-González y Montoya-Delgadillo, 2016).

Este modelo permite examinar y comprender la construcción del significado personal o institucional referido a un objeto matemático de manera pragmática, en la resolución de *actividades* por el estudiante o de manera hipotética en la propuesta de *tareas* por el docente o el currículo, considerándose la perspectiva epistemológica y cognitiva propias de la matemática, cuyas conexiones se asignaron en el diagrama ETM de la Figura 2a, con la denominación de génesis semiótica, instrumental y discursiva. Además, cada dos génesis coordinadas se constituyen planos verticales como se exhibe en el diagrama ETM de la Figura 2b, cuyas representaciones se establecen como [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Dis-Sem].

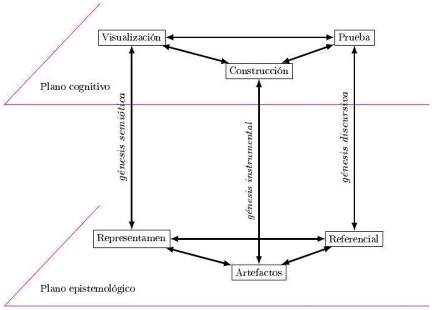


Figura 2a: Diagrama ETM de sus componentes epistemológicos y cognitivos, y génesis.

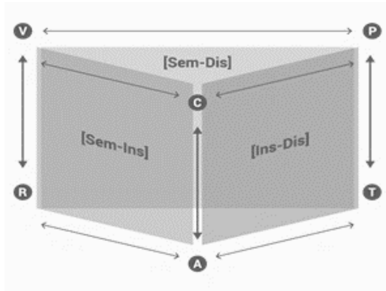


Figura 2b: Diagrama ETM sus planos verticales.

Figura 2: Diagramas ETM (Kuzniak y Richard, 2014).

La tarea cumple un rol primordial en este modelo porque es, en parte, la responsable de la completitud de un ETM, en relación con la activación parcial o total de sus génesis (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016; Parzysz, 2014). En ese sentido, los diagramas del ETM de la Figura 2 presentados por Kuzniak y Richard (2014) son operativos, según el análisis que se requiera realizar en una investigación.

4.2 Ajustes al Modelo ETM de acuerdo con el trabajo estadístico

Considerando que el ETM es una herramienta teórica que tiene la flexibilidad para interactuar con otros enfoques teóricos (Kuzniak, Tanguay *et al.*, 2016), se presenta un ajuste para extender el modelo ETM a la disciplina estadística (Figura 3). En este ajuste, se releva el rol del contexto como idea clave en la estadística y su enseñanza, pues “sin contexto, el modelado estadístico no puede ocurrir.” (Pfannkuch, Ben-Zvi y Budgett, 2018, p. 1115).

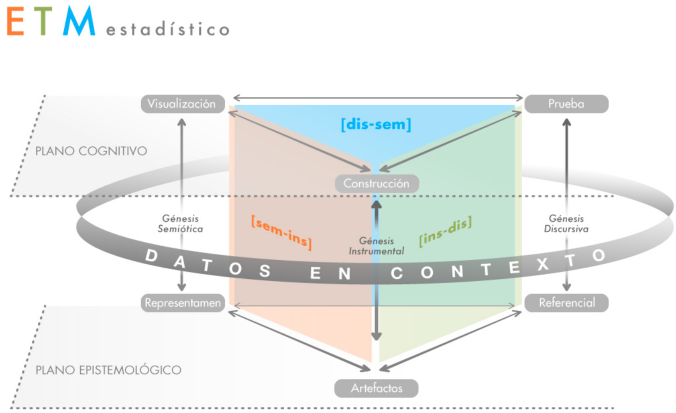


Figura 3: Diagrama ETM estadístico basado en Kuzniak y Richard (2014). Fuente: elaboración propia.

El contexto implica al menos dos perspectivas. Desde lo epistemológico, el contexto de los datos se refiere a la situación del mundo real de la que surgen los datos para responder a un problema (Cobb y Moore, 1997). Desde lo cognitivo, el contexto del aprendizaje y la experiencia se remiten a los conocimientos contextuales del sujeto frente a los datos (Pfannkuch, 2011).

El ETM estadístico (ETM-E) es un espacio de trabajo en la disciplina estadística, siendo fundamental el contexto que dota de significado a la interpretación de la variabilidad omnipresente en los datos, como también indica Makar (2018). El ETM-E situado en el paradigma del análisis exploratorio de datos, demanda una nueva caracterización de la génesis semiótica, instrumental y discursiva. A saber:

Génesis semiótica en ETM-E. Da cuenta de la dialéctica entre lo semántico y lo sintáctico de los datos en contexto, en tanto significado y representación, permitiendo el análisis de los signos involucrados en las acciones de leer o escribir en estadística y que se relacionan a los procesos de decodificación y codificación de signos.

Génesis instrumental en ETM-E. Da acceso a explicar la acción de un sujeto al operar con artefactos, materiales o simbólicos, ya sean herramientas (valor epistemológico) o instrumentos (valor cognitivo) involucrados en un proceso de construcción en estadística, esto es, representar datos, determinar resúmenes numéricos de los datos en contexto, entre otros.

Génesis discursiva en ETM-E. Se enmarca en actividades estadísticas que demandan justificación basadas en propiedades y definiciones de la estadística, considerando la evidencia en los datos para tomar decisiones en contexto. Esta génesis integra el razonamiento estadístico que contempla la vinculación entre los procesos de prueba con pocos o muchos datos (*big-data*) y los referentes teóricos usados en la estadística (e.g., conceptos de medidas de tendencia central, de dispersión, de posición, de forma, entre otros), coherentes al conocimiento contextual que portan los datos.

En esta investigación se consideraron dos tipos de ETM-E, basados en los ETM reportados por Kuzniak, Tanguay *et al*. (2016). Por un lado, el *ETM-E idóneo* refiere a la forma en que el conocimiento debe ser enseñado, en relación con su lugar y función específica dentro del currículo, dependiendo de la institución involucrada, por lo que la activación potencial o efectiva de una o más génesis promoverán el aprendizaje en virtud de la enseñanza. Por otro lado, el *ETM-E personal* remite tanto a conocimientos estadísticos como a capacidades cognitivas vinculadas entre sí que posee un sujeto al enfrentar alguna tarea estadística. Las distintas activaciones de la génesis semiótica, instrumental y/o discursiva del ETM-E, evidencian una caracterización del trabajo estadístico de un sujeto como resolutor de problemas estadísticos.

Mediante el marco conceptual ETM-E, se describe y caracteriza una lección orientada por el ciclo investigativo y se examinan los desempeños de estudiantes de primaria.

5. METODOLOGÍA

Esta investigación cualitativa se enfoca en el estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 1998), bajo una visión global de la lección y una visión local de las implicancias de la lección en tres estudiantes de primaria.

5.1 Contexto y sujetos

En una escuela chilena con un puntaje sobre el promedio nacional de 250 puntos en una prueba de matemática –i.e., Prueba SIMCE, Sistema de Medición de la Calidad de la Educación, del grado 4 en el año 2014–, 17 estudiantes del grado cuatro, fueron partícipes de una lección de organización de datos con final abierto sin instrucción previa y diseñada por un equipo docente (tres profesoras de la escuela que trabajaron conjuntamente con cuatro investigadores del área de la educación estadística temprana). Se consideraron los consentimientos escritos de la directora del establecimiento, docentes y apoderados.

De los 17 estudiantes, se seleccionaron tres, a quienes se les asignó los nombres de *Miguel* (10 años), *José* (10 años) y *Javier* (9 años 5 meses). El criterio de selección consideró la originalidad y riqueza de las representaciones de datos que produjeron durante la implementación de la lección, como también la capacidad de comunicar ideas sobre ellas durante las entrevistas aplicadas.

5.2 Recolección de datos

Fueron recolectados a través de: *(a)* la resolución escrita del problema de la lección en una hoja de trabajo; *(b)* fotografías de cada una de las representaciones de datos producidas (ver Anexos 2, 3 y 4); *(c)* el registro audiovisual de la lección implementada y *(d)* la transcripción de las entrevistas *in-situ* durante la lección y posteriores a la implementación de la lección.

Problema de la lección. Los estudiantes enfrentaron una situación de análisis exploratorio con datos reales. El problema proponía la siguiente tarea ¿de qué manera podemos organizar nuestras colaciones para saber si son saludables? La fotografía fue entregada en una hoja de trabajo a cada estudiante, la cual también contempló espacios en blanco para que los estudiantes pudieran construir una representación de los datos y así pudieran responder al problema (Figura 4).

Figura 4: Colaciones de los estudiantes del grado 4, llevadas a la escuela un día cualquiera.

Cabe señalar que esta lección está basada en una experiencia anterior que describen Estrella, Zakaryan, Olfos y Espinoza (2020), aunque en esta ocasión se consideraron las colaciones que realmente llevaron los estudiantes a la escuela un día, las que fueron fotografiadas sobre la mesa de la profesora (ver Anexo 1).

5.3 Modalidad del análisis

Tras la recolección de datos, el análisis de esta investigación contempló dos etapas: (I) Un análisis global de la lección que describió y caracterizó la lección siguiendo las etapas del ciclo investigativo (PPDAC) en el paradigma del análisis exploratorio de datos y de acuerdo con el ETM-E idóneo; *(II)* Un análisis local del desempeño de tres estudiantes partícipes de la lección, según las génesis del ETM-E personal, y la activación de los planos verticales (i.e., los planos [Sem-Ins], [Ins, Dis] y/o [Dis-Sem]).

Como análisis previo referido a la respuesta experta, se esperaba: *(a)* la definición explícita o implícita de la variable estadística con sus respectivas categorías (i.e., tipo y/o calidad nutricional de la colación); *(b)* la determinación de las frecuencias absolutas correspondientes (e.g., haciendo uso de alguna estrategia de conteo); *(c)* el diseño de alguna representación de datos −e.g., lista, tabla, gráfico de barras con o sin escala u otra−; *(d)* en la conclusión al problema, una indicación por escrito o de manera verbal sobre la mayoría de las colaciones de baja calidad nutricional, usando la frecuencia mayor de la categoría de la variable respectiva, desde su propia representación de datos.

La triangulación de datos se realizó entre el análisis de las producciones de los estudiantes, el análisis de las transcripciones de la lección videograbada y el análisis de las entrevistas videograbadas de los estudiantes sobre sus producciones.

6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se presenta una visión global que describe y caracteriza la lección en términos de las etapas del ciclo investigativo en términos de las génesis del ETM-E idóneo. Posteriormente, se presenta una visión local respecto a las implicancias del ETM-E idóneo en los ETM-E personales de los tres estudiantes partícipes de la lección.

6.1 Visión global de la lección

6.1.1 La lección en términos del ciclo investigativo (PPDAC)

El problema y el plan. Tanto las etapas del problema como el plan fueron realizadas por el equipo docente, se consideró un *Problema (P)* cercano que tomaba como contexto la calidad nutricional de las colaciones que llevaban sus estudiantes a la escuela, y se formuló el problema de la lección en términos de una pregunta que requirió de datos reales para ser contestada, *¿de qué manera podemos organizar nuestras colaciones para saber si son saludables?* Respecto al *Plan (P)*, el equipo docente tuvo que elaborar una planificación para recolectar y registrar los datos necesarios para dar respuesta al problema. La profesora a cargo de la implementación de la lección en un día escolar, reunió las colaciones de sus estudiantes para fotografiarlas en su conjunto.

La necesidad de los datos. En la etapa de *Datos (D)*, al inicio de la implementación de la lección, los estudiantes identificaron sus propias colaciones, a través de la proyección ampliada de dicha fotografía en aula. A continuación, un extracto de cómo la profesora despertó la necesidad de los datos en sus estudiantes.

Profesora:	¿Qué aparece ahí?
Estudiante-1:	Hay comida
Profesora:	¿Cualquier tipo de comida?
Estudiante-2:	Hay comida saludable y comida chatarra [de bajo valor nutricional]
Profesora:	Me parece conocida esta imagen [muestra la proyección de la fotografía en la pizarra]
Estudiante-3:	¡Son nuestras colaciones!

Asimismo, la profesora les solicitó saber la cantidad total de colaciones en su hoja de trabajo, y usando distintas estrategias de conteo, la mayoría llegó a la cantidad correcta de 24 colaciones en total. Luego, la profesora introdujo el problema de la lección, planteando la pregunta, y permitiendo a los estudiantes trabajar individualmente en su hoja de trabajo.

Profesora:	Todos estos son nuestros datos [muestra la fotografía de las colaciones proyectada sobre la pizarra]. Ustedes tienen que representarlos acá [muestra la hoja de trabajo] buscando una estrategia para representarlos. Ustedes van a buscar sus propias formas de representación de estas colaciones [que les permita responder a la pregunta que está por escrito en la pizarra].

Las representaciones de los datos. En el *Análisis (A)*, los estudiantes trabajaron autónomamente, organizaron y representaron los datos a partir de la variable tipo de colación y/o calidad nutricional de la colación, y activaron sus conocimientos contextuales previos. Hubo una amplia variedad de representaciones producidas, cuatro de ellas correspondieron a *Listas*, tres a *Diagramas*, dos a *Tablas*, ocho fueron consideradas como *Otras Representaciones*; además, ninguno construyó *Gráficos*. Estas representaciones permitieron que los estudiantes iniciaran un análisis exploratorio de los datos para resolver el problema en el marco de la estadística temprana.

La conclusión al problema. Al término de la lección, algunos estudiantes explicaron sus representaciones de datos y contestaron *¿de qué manera podemos organizar nuestras colaciones para saber si son saludables?* En la *Conclusión (C)*, los estudiantes indicaron que la mayoría de las colaciones son "chatarras", puesto que tenía un bajo valor nutricional. A continuación, se exhibe un extracto del término de la lección.

Profesora:	¿Qué podemos decir, para cerrar, con esta imagen [indica la proyección de las colaciones], sobre nuestras colaciones? ¿Qué podrían decir ustedes de sus colaciones?
Estudiante-4:	Es que algunas son saludables y algunas son chatarras
Estudiante-5:	La mayoría son chatarras
Profesora:	La mayoría son chatarras, ¿ya?
Estudiante-6:	En realidad, todas son chatarras
Profesora:	¿Qué más podrían decir? En realidad, me parece que sí. Ah, al final el "juguito" [señala un jugo envasado en caja], ¿es saludable o no?
Estudiantes:	¡No!
Estudiante-7:	Tiene mucho sodio.
Estudiante-8:	Tiene mucha azúcar.
Profesora:	Mucho sodio, mucha azúcar, las galletitas también. Entonces, ¿qué podríamos hacer después? Empezar a traer, ¿qué tipo de …?
Estudiante-9:	El Agustín trae colación saludable [manzana].
Profesora:	Felicitaciones Agustín. ¿Se comprometen a traer colaciones saludables?

También, surgió un cuestionamiento sobre la clasificación de una colación. A continuación, un extracto de la discusión entre dos estudiantes.

Estudiante-10:	Las dos manzanas, yo las puse en lo saludable, y la barrita de cereal también lo puse en lo saludable porque tiene cereal y tiene, así como frutas.
Profesora:	¡Ah!, la compañera puso dentro de lo saludable manzana y la barrita de cereal. Si bien, es cierto, contiene trocitos de frutas y contiene avena, hay que fijarse que también trae harto saborizante, harto colorante, mucha azúcar, entonces tan saludable no es.
Estudiante-4:	Profesora!, descubrí que mi cereal tiene cero azúcares y cero grasas.
Profesora:	¡Ah! Vamos a verlo después.

El conocimiento previo del contexto de la experiencia de aprendizaje estimuló en los estudiantes el razonamiento estadístico en la resolución de la tarea, tal conocimiento media la construcción del razonamiento involucrado, según Pfannkuch (2011). En este sentido, el rol del contexto es fundamental para provocar la actitud estadística de escepticismo al analizar el comportamiento de los datos, al cuestionar las limitaciones o explicaciones que pueden conformar la conclusión al problema. En la lección, las colaciones que llevaron los estudiantes a la escuela y el cuestionamiento sobre el valor nutricional de sus propias colaciones, permitieron que los estudiantes construyan representaciones y argumentaran sobre ellas, despertando la necesidad de los datos y la construcción de representaciones con sentido.

Dada la oportunidad de resolver un problema estadístico mediante el ciclo investigativo, los estudiantes fueron capaces de representar datos categóricos y argumentar sobre ellos, tal como indican otros estudios (e.g., Estrella *et al.*, 2018; English, 2012, 2018).

6.1.2 La lección en términos de las génesis del ETM-E idóneo y su relación con el ciclo investigativo

A continuación, se presenta la lección analizada por el ETM-E idóneo en términos de las génesis en el paradigma del análisis exploratorio de datos y su relación al ciclo investigativo.

Génesis semiótica. La lección fomentaba que el estudiante observara la hoja de trabajo con las colaciones para responder a la pregunta, se esperaba que decodificara cada colación como dato de al menos una variable (tipo y/o calidad nutricional de la colación) y codificara al dibujar íconos o escribir en palabras cada colación, como registro de cada dato. Dichas acciones son presentadas mayormente en el tránsito de *Datos* a *Análisis* en el PPDAC, provocando una activación potencial de la génesis semiótica.

Génesis instrumental. La lección contempló que el estudiante fuera adaptando las herramientas que tenía para dibujar o escribir cada colación, con o sin colorear, en los espacios disponibles en la hoja de trabajo para construir representaciones de datos de tipo lista, tabla, diagrama u otra representación distinta, que le permitiera hacer sus conteos. Dichas acciones son presentadas mayormente en el tránsito de *Análisis* a *Conclusiones* en el PPDAC, provocando una activación potencial de la génesis instrumental.

Génesis discursiva. La lección promovía que el estudiante, dada la tarea, utilizara una estrategia de clasificación y conteo para determinar las categorías de la variable con su respectiva frecuencia, asociadas al tipo de colación y/o calidad nutricional de las colaciones. Ello provee en el estudiante una manera de comparar las frecuencias de las categorías de la variable entre sí para concluir al problema y obtener así la moda como medida de tendencia central (implícita o explícita en las representaciones de datos que construyeron). Dicha comparación entre frecuencias se hizo por uso del criterio aritmético de orden entre los números naturales en lista o tabla; o bien, por inspección visual, reconociendo la mayor longitud entre íconos alineados o barras en un pictograma, diagrama o gráfico, construido de manera vertical u horizontal. Dichas acciones son presentadas mayormente en el tránsito de *Conclusiones* a *Problema* en el PPDAC, provocando una activación potencial de la génesis discursiva.

Hay estudios que indican que los docentes, al momento de diseñar una lección de estadística, también vivencian el ciclo investigativo, lo cual contribuye a su alfabetización y razonamiento estadístico (e.g., Estrella *et al.*, 2020; Estrella y Vidal-Szabó, 2017). En este caso, las etapas *Problema (P)* y *Plan (P)* son diseñadas por el equipo docente, mientras que las etapas de *Datos (D)*, *Análisis (A)* y *Conclusiones (C)* lo vivencian los estudiantes durante el desarrollo de la lección junto a los andamiajes que realiza, anticipadamente, la profesora producto del análisis previo del equipo docente.

6.2 Visión local de las implicancias de la lección en tres estudiantes

6.2.1 Aproximación al ETM-E personal de Miguel (10 años)

Miguel produjo una lista icónica como representación de los datos, la cual contiene íconos, textos y dígitos (ver Anexo 2). La lista posee íconos que indican la categorización de las colaciones, según la variable "tipo de colación"; y los textos bajo cada ícono dan cuenta de la categorización, según la variable "calidad nutricional de la colación" (Figura 5).

En un episodio ocurrido durante la lección, mientras Miguel terminaba de construir su lista, uno de los investigadores le pregunta respecto a su representación.

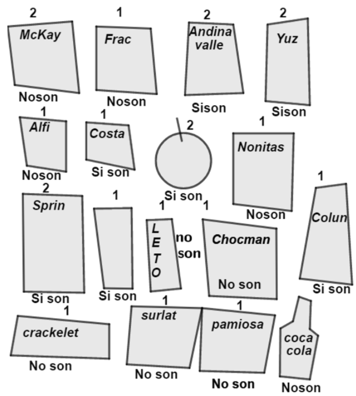


Figura 5: Representación de los datos mediante una lista (estudiante Miguel).

Miguel: Estoy haciendo lo que es... lo que "noson" o lo que "sison", estoy ordenando en 2, ahí hay 2 [indica el primer ícono de su lista], aquí hay 1 [indica el segundo ícono de su lista] y aquí dicen lo que son "sison" o "noson".

Investigador: ¿qué cosa?

Miguel: Aquí, abajo dice lo que "noson" o lo que "sison", aquí y aquí [lo indica en su representación]

Investigador: Ya, por ejemplo, te refieres como no son saludables y sí son saludables, ¿algo así?

Miguel: Sí.

En una entrevista, posterior a la lección, Miguel explica su representación.

Investigador:	¿Te acuerdas lo que era? ¿Sí? ¿Qué era? [indica las colaciones presentes en la fotografía]
Miguel:	Era la colación que usamos para saber la que son buenas, la que son saludables o la que son malas.
Investigador:	Cuéntanos, ¿qué hiciste acá?
Miguel:	Puse lo que estaban ahí [indica las colaciones presentes en la fotografía] y lo puse que "noson" y lo que "sison".
Investigador:	Y ¿qué significa eso que "sison", "noson"?
Miguel:	Lo que "noson" son las que son malas para la salud y las que "sison" son las que son saludables.

Para Miguel el dígito sobre cada ícono indica la cantidad de datos que dicha categoría contiene y el texto bajo los íconos refiere a una segunda clasificación, en la que cada tipo de colación fue categorizada como *no son saludables* (representado como "noson") y, *sí son saludables* (representado como "sison"). Sin embargo, su clasificación no es exhaustiva porque representó 22 de las 24 colaciones.

La *génesis semiótica* de Miguel se activó al decodificar el representamen de las colaciones de su hoja de trabajo, en que visualiza las colaciones como datos, según la variable "tipo de colación". Luego, codifica en íconos que dibuja como categorías de la variable "tipo de colación" y después vuelve a decodificar, visualizando una segunda variable "calidad nutricional de la colación", en que para cada categoría inicial vuelve a codificar con los rótulos "noson" y "sison".

La génesis instrumental de Miguel fue activada al construir la lista –producto de la instrumentación que hace de los íconos dibujados para las 22 colaciones consideradas–, aunque dificulta responder la pregunta. En la lista, cada ícono con cardinal representa una categoría de la variable "tipo de colación" con su respectiva frecuencia, y luego rotula dichos íconos como "sison" o "noson", que remiten a la categoría de la variable "calidad nutricional de la colación".

La génesis discursiva de Miguel se activó al poner en uso su conocimiento contextual y estadístico, en que primero clasifica las colaciones como datos de la variable tipo de colación en varias categorías con su frecuencia, y después vuelve a clasificar como datos de la variable calidad nutricional de la colación en dos categorías, lo cual permitió argumentar si las colaciones son o no mayormente saludables o sanas, con la salvedad de que consideró 22 de las 24 colaciones.

En el ETM-E personal de Miguel, el plano [Dis-Sem] es el privilegiado (ver plano vertical tachado en Figura 6) porque, el problema sobre lo saludable de las colaciones, fue abordado considerando dos variables durante el análisis exploratorio de los datos. Sin embargo, la lista que construye no consideró a todas las colaciones y dificulta comunicar a otros la información del comportamiento de la mayoría de los datos, lo que muestra una génesis instrumental en proceso de consolidarse.

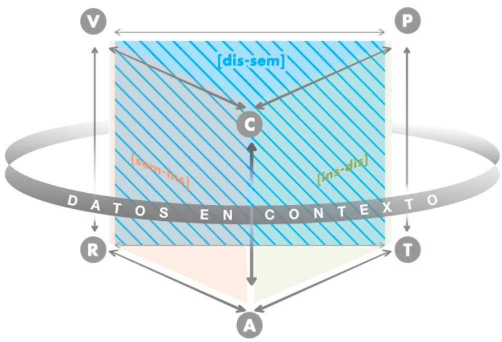


Figura 6: ETM-E personal del estudiante Miguel y activación del plano [Dis-Sem].

6.2.2 Aproximación al ETM estadístico personal de José (10 años)

José produjo dos representaciones relacionadas (ver Anexo 3). Primeramente, construyó una lista del tipo icónica textual, esto es, íconos repetidos en celdas de una grilla para representar cada dato sin cardinal, utilizando palabras (registro textual) para rotular la categoría de la variable (Figura 7a). Luego, a partir de la primera representación construye la segunda, la que corresponde a una tabla con categorías de la variable representadas por rectángulos de color con sus respectivas frecuencias absolutas marginales y frecuencia total (Figura 7b). Su clasificación es exhaustiva porque representó las 24 colaciones. Sin embargo, la cantidad de categorías de la variable de la lista que corresponde a seis, no coincide numéricamente con las cinco categorías de la variable de la tabla que consideró en su construcción.

Figura 7a: Sección lista icónica textual.

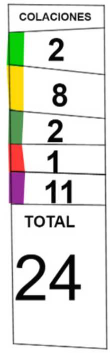


Figura 7b: Sección tabla.

Figura 7: Representación de los datos mediante una lista y tabla (estudiante José).

En un episodio ocurrido durante la lección, mientras José terminaba de construir su tabla, uno de los investigadores le entrevistó, de acuerdo con su representación.

Investigador: Ya José, ¿qué hiciste?

José: Primero lo dibujé y después los pinté para clasificarlo por color.

Investigador: ¿Y qué significa por ejemplo amarillo y 8? [indica sección de la tabla]

José: Son los jugos porque [yo] los pinto de amarillo y aquí tengo el amarillo y significa jugo.

Al final de la lección, José presenta su representación de datos frente al grupo de su curso y señala:

Profesora: José di lo que hiciste.

José: Yo primero los dibujé, hice 24 colaciones en total. Puse 11 galletas, 1 bebida, 2 frutas, 2 leches y 8 jugos. Después los pinté por cada color, los jugos amarillos, leche verde, galleta morada, bebida roja y fruta verde más claro. Después lo fui viendo por colores [en la tabla], por ejemplo, la leche, habían 2.

Cuando José pinta, no lo hace de manera azarosa, sino que establece una estrategia de clasificación en el que presenta para cada color una única categoría de la variable. Por ejemplo, indica que pinta de amarillo los íconos dibujados que remiten a jugos.

La *génesis semiótica* de José se activó al decodificar el representamen, visualizando a los datos asociados a la variable "tipo de colación", en que luego codifica en íconos por categoría de la variable siguiendo una lógica de distribución espacial en la grilla para clasificar. Después, decodifica los íconos de una misma categoría (Figura 7a), haciendo uso de un color para cada categoría, exceptuando el color celeste que representa aguas, codificando en rectángulos de color y dígitos que representan la frecuencia de cada categoría en la tabla (Figura 7b).

La *génesis instrumental* de José se activó de manera doble, ya que la tabla (Figura 7b) sintetiza la lista que construyó (Figura 7a), la cual fue conseguida por los artefactos que instrumentaliza a través de los íconos que dibuja y colorea en espacios determinados en la grilla que elabora.

La *génesis discursiva* de José que fue activada no respondió al problema de la lección, pues no es posible argumentar, a partir de su representación de datos, si las colaciones son o no mayormente saludables porque consideró la variable estadística tipo de colación, y además restó una categoría de la variable al transitar de la primera a la segunda representación.

En el ETM-E personal de José, el plano [Sem-Ins] es el privilegiado (ver plano vertical tachado en Figura 8) porque al razonar estadísticamente, progresó en la comprensión del comportamiento de los datos utilizando solamente la variable tipo de colación. Aunque, José activó una *génesis discursiva* que no se ajustó a lo esperado para concluir al problema de la lección por no considerar la variable calidad nutricional de la colación, posee una génesis instrumental adecuada para la variable estadística que consideró.

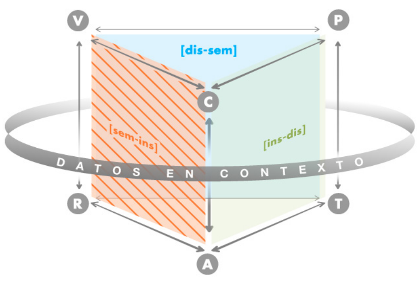


Figura 8: ETM-E personal del estudiante José y activación del plano [Sem-Ins]

6.2.3 Aproximación al ETM estadístico personal de Javier (9 años 5 meses)

Javier produjo dos representaciones, una lista icónica textual y una escala con cinco niveles, en que ambas representaciones están vinculadas entre sí (ver Anexo 4). Primeramente, construyó una lista icónica textual, esto es, repetición del dato como ícono sin cardinal de forma horizontal y un texto que nombra la categoría de la variable "tipo de colaciones" (Figura 9a). Luego, construyó una escala con cinco niveles sobre la "calidad de la colación" (Figura 9b). Efectuó una clasificación exhaustiva puesto que representó todas las colaciones.

Figura 9a: Sección lista icónica-textual. *Figura 9b: Sección escala con niveles.*

Figura 9: Representación de los datos mediante una lista con escala (estudiante Javier).

En un episodio ocurrido durante la lección, mientras Javier terminaba de construir su lista, uno de los investigadores le entrevistó de acuerdo con su representación.

Investigador: Javier ¿me puedes explicar cómo lo hiciste?

Javier: Sí. Primero tengo manzanas que es lo más saludable. Después los jugos que igual tienen grasa, pero un poquito. Después las galletas y después los chocman [queques pequeños cubiertos de chocolate] que también son (...) que tienen un poco de chocolate y las bebidas que son lo más chatarra por así decirlo, y eso.

Al final de la lección, Javier presenta su representación de datos frente al pleno del curso y señala:

Javier:	La manzana son saludables, los jugos son medio saludable, las galletas son medio chatarra, los chocman son chatarra y la bebida es muy chatarra.
Profesora:	¿Y cuántos te dieron en total?
Javier:	24 [colaciones].

Javier al explicar su representación –lista con escala– evidencia que el orden de su lista estaba implícitamente graduado en niveles desde "lo más saludable" a "lo más chatarra" en sus palabras. La representación final de Javier muestra la variabilidad de los datos en la lista con la escala de cinco niveles.

La *génesis semiótica* de Javier se activó al decodificar el representamen, mediante una visualización de los datos asociados a la variable "tipo de colación", después codifica los datos en íconos referidos al tipo de colación (Figura 9a), en que activó una visualización de los datos asociados a la variable "calidad nutricional de la colación" con cinco niveles graduados (Figura 9b).

La *génesis instrumental* de Javier se activó al construir su representación mediante íconos que dibuja –artefactos que representan datos– explicitando las categorías de la variable "tipo de colación", y cuyo orden responde a la variable "calidad nutricional de la colación" (Figura 9a). Después, a través de la lista de datos, construye una escala de cinco niveles de forma textual para representar las categorías de la variable "calidad nutricional de la colación", explicitando en su representación de datos final la coordinación que hizo de ambas variables (Figura 9b).

La *génesis discursiva* de Javier se activó al analizar exploratoriamente los datos, coordinando dos variables estadísticas en la organización y clasificación de los datos, coherente al contexto del problema. En ese sentido, la escala graduada evidencia un razonamiento sobre la variabilidad de los datos que es movilizado por el conocimiento contextual disponible.

El ETM-E personal de Javier es completo (ver todos los planos verticales tachados en Figura 10), en el sentido que activó las tres génesis. La argumentación basada en la variabilidad de los datos en contexto, evidencia un razonamiento estadístico robusto a su nivel educativo, sustentado por su representación y el uso de dos variables estadísticas que interactúan entre sí, lo cual permitió concluir sobre la calidad nutricional de las colaciones correctamente.

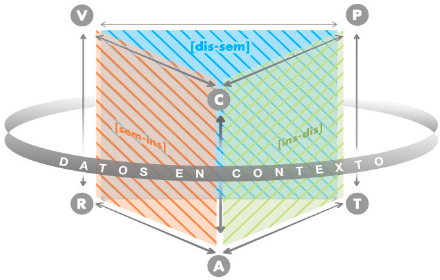


Figura 10: ETM-E personal del estudiante Javier y activación de los tres planos verticales.

En síntesis, los tres estudiantes exhiben un ETM-E personal en el paradigma análisis exploratorio de datos, tal como lo proponía el ETM-E idóneo. En particular, tanto Miguel como Javier realizan representaciones de datos en las que consideraron dos variables estadísticas coordinadas (i.e., tipo y calidad nutricional de las colaciones), mientras que José consideró una única variable en su representación de datos que no se relacionaba con el contexto del problema.

La capacidad de invención de los tres estudiantes y la funcionalidad de las representaciones de Miguel y Javier dan cuenta de su competencia meta-representacional en desarrollo, la cual describe la completa gama de capacidades que los sujetos tienen para construir y usar representaciones (*Cf.*, Estrella *et al.*, 2018). Las representaciones de datos que construyeron los mismos estudiantes –no necesariamente las que propone el currículo escolar– permitió desarrollar la toma de conciencia del contexto de los datos, además de tener las oportunidades de comprender, interpretar y explicar los datos basados en evidencia empírica (Rumsey, 2002).

Los datos y sus representaciones son ideas fundamentales del currículo de la estadística (Burrill, y Biehler, 2011), las que permiten a los estudiantes desarrollar habilidades como el visualizar la distribución empírica de los datos, como también, el modelar y comunicar el comportamiento de estos. Dichas habilidades pueden desarrollarse desde los primeros años escolares, lo cual reafirma los principales desafíos que sintetiza Ben-Zvi (2016) para el razonamiento estadístico de los estudiantes en el paradigma del análisis exploratorio de datos; en especial, la comprensión de centrarse en uno o unos pocos dentro del total y a la vez comprender globalmente el comportamiento de los datos, lo que refiere a la capacidad de buscar, reconocer, describir y explicar patrones en un conjunto de datos mediante la observación de las distribuciones y/o mediante parámetros o técnicas estadísticas (*Cf.*, Ben-Zvi y Arcavi, 2001).

7. CONCLUSIONES

Esta investigación buscó describir y caracterizar una lección orientada por el ciclo investigativo (PPDAC) y se examinaron los desempeños que propició en tres estudiantes de primaria (9-10 años). Para ello, se realizó un análisis cualitativo de los aprendizajes estadísticos con la mirada de los espacios de trabajo matemático orientado por una tarea basada en el ciclo investigativo. Esta investigación propuso una extensión del modelo ETM, ajustándolo a la disciplina estadística (ETM-E) –relevando el rol de los datos en contexto como idea fundamental en el aprendizaje y enseñanza de la estadística–, con el fin de analizar desde una perspectiva global la lección y examinar localmente las producciones de tres estudiantes.

Desde el análisis global de la lección, se concluye que potencialmente la lección en el marco de la estadística temprana, permitió que los estudiantes pudieran aproximarse a los procedimientos que utiliza un estadístico para pensar y aprender más en la esfera del contexto, tal como lo indican Pfannkuch y Wild (2004). La lección orientada por el ciclo investigativo, fomentó un ambiente de aprendizaje estadístico como diseño de enseñanza en el paradigma del análisis exploratorio de datos y en el contexto de las colaciones con datos reales y cercanos a la realidad de los estudiantes partícipes de la lección. En consecuencia, el ciclo investigativo propició en los sujetos un trabajo estadístico temprano como un espacio organizado e intencionado, lo cual permite comprender el comportamiento de los datos en contexto, promoviendo la alfabetización y razonamiento estadístico durante el proceso cíclico. Los estudiantes tuvieron que activar sus conocimientos previos –en cuanto a sus experiencias personales y sus predisposiciones frente al contexto– para organizar los datos que fueron presentados sin orden en la hoja de trabajo y poder así construir sus propias representaciones que permitieran conectar ideas y concluir exploratoriamente.

Desde el análisis local del desempeño de los tres estudiantes, se concluye que, a través de sus representaciones, pudieron descubrir, razonar y comunicar ideas estadísticas de distintas formas como una oportunidad de aprendizaje propiciado por la lección y sus experiencias previas. Por consiguiente, esta investigación concuerda con los estudios que recomiendan que el currículo y los textos escolares promuevan la organización y representación de datos –bajo las propias formas que entiendan y decidan los estudiantes (e.g., Estrella y Estrella, 2020)– de modo que facilite el razonamiento estadístico a partir de sus representaciones, y experimenten aspectos fundamentales del análisis de datos (e.g., English, 2010, 2012, 2018; Estrella, Olfos, Morales y Vidal-Szabó, 2017; Makar, 2018), enfrentándose a problemas auténticos y cercanos a la realidad que les rodea (Franklin *et al*., 2007; National Council of Teachers of Mathematics, 2015).

El término *plano dirigido* en el ETM que se conforma por la coordinación de dos génesis en que una de ellas da inicio al trabajo y se observa privilegiada por sobre la otra en la activación del plano vertical (Menares, 2019), es posible reconocerlo en el trabajo estadístico de los estudiantes porque los tres casos evidenciaron que la génesis semiótica estuvo privilegiada y se coordinó con la génesis instrumental y/o con la génesis discursiva.

Incluir la participación de niños y niñas en los componentes básicos de la elaboración de modelos de datos, a saber, la visualización de las categorías de la variable, la estructuración y representación de los datos, la identificación de la variabilidad en los datos; son aspectos esenciales para la diversificar oportunidades de aprendizaje estadístico, en concordancia con English (2010, 2012, 2018), Estrella y Vidal-Szabó (2017). Por tanto, promover desde el currículo y diseños de enseñanza la construcción de representaciones usuales e inusuales con datos reales, facilitaría el desarrollo de la alfabetización y razonamiento estadístico desde los primeros años formativos.

Dentro de las limitaciones de esta investigación, se encuentra la falta de seguimiento de la discusión estadística de los estudiantes, referida al conocimiento contextual de la calidad nutricional de sus propias colaciones; lo que impidió desde la enseñanza, afianzar una actitud escéptica –la que forma parte de una de las dimensiones del pensamiento estadístico (*Cf*., Pfannkuch y Wild, 2000, 2004; Wild y Pfannkuch, 1999)– frente a las distintas conclusiones e inferencias informales.

Esta investigación amplía el ETM a la disciplina estadística y, sugiere nuevos estudios que precisen otros paradigmas presentes en la estadística con fines educativos, o bien, examinen la influencia de los ETM-E personales de los profesores en el ETM-E idóneo, entre otros tópicos de interés en la Didáctica de la Estadística.

AGRADECIMIENTOS

La investigación presentada fue financiada por: CONICYT-PCHA / Doctorado Nacional: 2016-21161569; Proyecto MEC Núm. 80170103; Proyecto CONICYT FONDECYT N° 1200346; ANID / PIA / Fondos Basales para Centros de Excelencia FB0003; y Proyecto VRIE-PUCV 039.439/2020.

REFERENCIAS

Ben-Zvi, D. (2014). Data Handling and Statistics Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education, 1*, 137-140. https//doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Ben-Zvi, D. (2016). Three paradigms in developing students' statistical reasoning. En Estrella *et al.* (Eds), *Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 13-22). Chile: SOCHIEM-PUCV. http://static.ima.ucv.cl.s3.amazonaws.com/wp-content/uploads/2016/03/Acta-XXJNEM-final.pdf#page=13

Ben-Zvi, D. y Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics, 45*, 35-65.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-15). Springer. https//doi.org/10.1007/1-4020-2278-6

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Springer. https//doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly, 104*(9), 801-823. https//doi.org/10.2307/2975286

English, L. (2010). Young children's early modelling with data. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 24-47. https//doi.org/10.1007/BF03217564

English, L. (2012). Data modeling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 15-30. https//doi.org/10.1007/s10649-011-9377-3

English, L. (2018). Young Children's Statistical Literacy in Modelling with Data and Chance. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris and E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education. Early Mathematics Learning and Development* (pp. 295-313). Springer. https//doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_14

Estrella, S. y Estrella, P. (2020). Representaciones de datos en estadística: de listas a tablas. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(1), 21-34. https//doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.20

Estrella, S., Olfos, R., Morales, S., y Vidal-Szabó, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(3), 345-370. https//doi.org/10.12802/relime.17.2034

Estrella, S, Olfos, R., Morales, S., y Vidal-Szabó, P. (2018). ETM en el dominio de la estadística temprana: dos casos de estudiantes de grado 2 y sus representaciones de datos. *MENON: Journal of Educational Research, 4*, 93-109. http://www.edu.uowm.gr/site/content/menon-journal-educational-research-4th-thematic-issue-november-2018

Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., y Estrella, P. (2018). Competencia metarrepresentacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 143-163. https//doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2143

Estrella, S., y Vidal-Szabó, P. (2017). Alfabetización estadística a través del Estudio de Clase: representaciones de datos en primaria. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78*, 12-17.

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R. y Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education.* https//doi.org/10.1007/s10857-018-09423-y

Flores-González, M., y Montoya-Delgadillo, E. (2016). Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación matemática, 28*(2), 85-117. https//doi.org/10.24844/EM2802.04

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assesment and instruction in statistics education (GAISE) report: a preK-12 curriculum framework*. American Statistical Association. http://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEPreK-12_Full.pdf#page=5

Gal, I. (2004). Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47-78). Springer. https//doi.org/10.1007/1-4020-2278-6

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 861-874. https//doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4), 5-15.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 721-737. https//doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Makar, K. (2018). Theorising Links Between Context and Structure to Introduce Powerful Statistical Ideas in the Early Years. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education. Early Mathematics Learning and Development* (pp. 3-20). Springer. https//doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_14

Makar, K. y Fielding-Wells, J. (2011) Teaching Teachers to Teach Statistical Investigations. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 347-358). Springer. https//doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_33

MacKay, R. J. y Oldford, W. (1994). *Stat 231 Course Notes Fall 1994*. University of Waterloo.

Menares, R. (2019). Planos dirigidos en el ETM al personal de profesores en formación: una herramienta metodológica. En L. Vivier *et al.* (Eds.), Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique (pp. 245-256). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. http://www.pucv.cl/uuaa/site/artic/20200102/asocfile/20200102160133/actes_etm6.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2012). Matemática. *Bases Curriculares para la Educación Básica* (pp. 85-135).

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International statistical review, 65*(2), 123-137. http://iase-web.org/documents/intstatreview/97.Moore.pdf

Moore, D. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of the American Statistical Association*, *93*, 1253-1259. http://www.stat.purdue.edu/~dsmoore/articles/LibArts.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (2015). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. En A. Gasca (Ed. y Trad.), *De los principios a la acción: garantizando el éxito matemático de todos*. http://www.nctm.org/PtA/ (Trabajo original publicado en 2014).

Parzysz, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4-1), 65-82. https//doi.org/10.12802/relime.13.1743

Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1 y 2), 27-46.

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D. y Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM Mathematics Education*, *50*(7), 1113-1123. https//doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Pfannkuch, M. y Wild, C. (2000). Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. *Statistical science*, *15*(2), 132-152. https//doi.org/10.1214/ss/1009212754

Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 17-46). Springer. https//doi.org/10.1007/1-4020-2278-6

Rumsey, D. (2002). Statistical Literacy as a Goal for Introductory Statistics Courses. *Journal of Statistics Education*, *10*(3), 1-12. https//doi.org/10.1080/10691898.2002.11910678

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Tukey, J. (1962). The future of data analysis. *The annals of mathematical statistics*, *33*(1), 1-67. https//doi.org/10.1214/aoms/1177704711

Tukey, J. (1977). *Exploratory data analysis*. Addison-Wesley.

Tukey, J. (1980). We Need Both Exploratory and Confirmatory. *The American Statistician, 34*(1), 23-25. https//doi.org/10.2307/2682991

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265. https//doi.org/10.2307/1403699

Wild, C., Utts, J. y Horton, N. (2018). What Is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5-36). Springer. https//doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_2

Zieffler, A., Garfield, J. y Fry, E. (2018). What is Statistics Education? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 37-70). Springer. https//doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7

Pedro Vidal-Szabó

Dirección: Zenteno 1482, depto. 315, Santiago, Chile;
código postal: 8360510

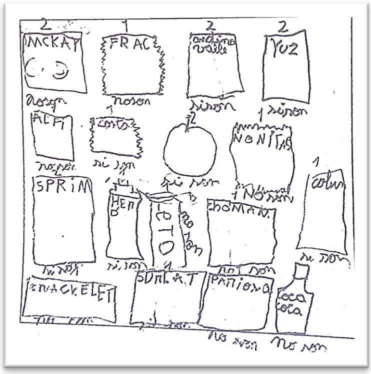
Teléfono: 56993123936

ANEXOS

Anexo 1

Fotografía real que cada uno de los estudiantes poseía al momento de concluir al problema de la lección. Ésta fue reproducida en la Figura 4.

Anexo 2

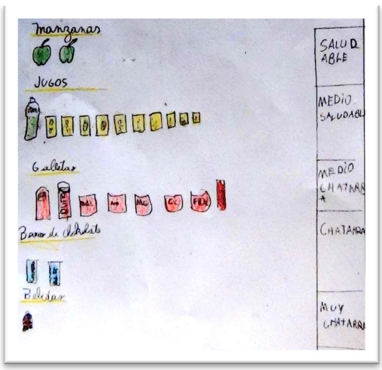


Fotografía real de la producción de Miguel. Ésta fue reproducida en la Figura 5.

Anexo 3

Fotografía real de la producción de José. Ésta fue reproducida en la Figura 7.

Anexo 4



Fotografía real de la producción de Javier. Ésta fue reproducida en la Figura 9.

 DOI: 10.24844/EM3202.10

Conocimiento sobre tablas estadísticas por estudiantes chilenos de tercer año de Educación Primaria

Knowledge of statistical tables by Chilean students third year of primary education

Danilo Díaz-Levicoy[1]
Rodolfo Morales[2]
Pedro Arteaga[3]
María del Mar López-Martín[4]

Resumen. Esta investigación reporta resultados del conocimiento sobre tablas estadísticas por estudiantes de tercer año de Educación Primaria en Chile. Para la recolección de los datos se diseñó un cuestionario compuesto por tres ítems que abordan actividades relacionadas con las tablas estadísticas incluidas en libros de texto de cursos previos. Este cuestionario se aplicó en tres escuelas municipalizadas de la comuna de San Carlos, región del Bío-Bío en Chile, considerando una muestra intencionada de 79 estudiantes. Los resultados exponen que los estudiantes abordan con mayor éxito las actividades de leer y completar una tabla y, presentan mejores resultados en las actividades donde se exige un nivel de lectura literal que en las centradas en el desarrollo de

Fecha de recepción: 16 de diciembre de 2017. **Fecha de aceptación**: 11 de noviembre de 2018.

[1] Departamento Matemática, Física y Estadística, Universidad Católica del Maule, Chile, dddiaz01@hotmail.com, orcid.org/0000-0001-8371-7899.

[2] Sumo Primero en Aula. Comunidad Virtual de Aprendizaje, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, rodolfo.morales@pucv.cl, orcid.org/0000-0002-1892-1671.

[3] Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España, parteaga@ugr.es, orcid.org/0000-0002-8347-7669.

[4] Departamento de Educación, Universidad de Almería, España, mdm.lopez@ual.es, orcid.org/0000-0001-8677-9606.

cálculos y comparaciones. Estos resultados evidencian que los estudiantes dominan aspectos básicos del trabajo con tablas estadísticas.

Palabras clave: *comprensión, tablas estadísticas, estadística, Educación Primaria.*

Abstract: This paper shows the results of a research on the knowledge of statistical tables by Chilean students of third year of Primary Education in Chile. For data collection, a questionnaire was designed and validated with three items, which address different activities related to statistical tables and which are included in textbooks at previous courses. This questionnaire was applied in three municipal schools in the locality of San Carlos, Bío-Bío region in Chile, considering an intentional sample of 79 students. The results show that students are more successful in reading and completing a table and that they perform better in activities where literal reading is required above activities where the students had to develop calculations and comparisons. These results show that students master basic aspects of working with statistical tables.

Keywords: *understanding, statistical tables, statistical, Primary Education.*

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la estadística se ha convertido en un área de gran importancia en diferentes situaciones de nuestra vida cotidiana (científicas, sociales y humanidades). Este hecho viene reflejado por la gran cantidad de información estadística (en forma de tablas, gráficos y resúmenes estadísticos) que se observa en diferentes medios de comunicación (televisión, internet, periódicos, etc.) (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011).

En este contexto, las tablas estadísticas son usadas frecuentemente para ordenar información, permitiendo resumir gran cantidad de datos en espacios reducidos (Beltrão, 2012; Eudave, 2009), razón por la que se consideran como un elemento de la *cultura estadística* (Cazorla y Utsumi, 2010; Gal, 2002; Watson, 1997). Este término hace referencia al conocimiento que todo ciudadano debe tener para manejar los elementos básicos de la estadística (Batanero, 2004; Wallman, 1993). Además, al igual que los gráficos estadísticos, las tablas son consideradas "una de las modalidades específicas de registro y organización de la información útil cognitivamente para una multiplicidad de usos" (Gabucio, Martí, Enfedaque, Gilabert y Konstantinidou, 2010, p. 184).

Desde el punto de vista de las directrices curriculares, diferentes países señalan que, las tablas y los gráficos estadísticos, así como otros temas de estadística y probabilidad, deben ser trabajados desde los primeros cursos de Educación Primaria (e.g., Common Core State Standards Initiative, 2010; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Las bases curriculares para Educación Primaria de Chile (Ministerio de Educación, 2012, 2013a, 2013b) especifican el trabajo con tablas estadísticas desde el primer curso, tal como se observa en la Tabla 1. En el primer curso se deben abordar las tablas de conteo, relacionadas con actividades de lectura y registro de datos e información afín a los estudiantes y su contexto inmediato. Mientras que en el segundo curso las tablas de conteo están asociadas al registro y representación de datos relativos al lanzamiento de dados y monedas. Además, se enfatiza el trabajo con tablas simples para organizar la información de juegos con monedas y dados. El trabajo con estas representaciones se mantiene en los cursos posteriores dentro de la Educación Primaria. Esta investigación se limita a describir los objetivos e indicadores de evaluación relacionados con las tablas estadísticas de los cursos ya realizados por los estudiantes de la muestra.

De acuerdo con estas consideraciones, en esta investigación se plantea el objetivo de *analizar el conocimiento que declaran estudiantes de tercer año de Educación Primaria al trabajar actividades sobre tablas estadísticas*, que se han seleccionado y adaptado de un estudio previo sobre la presencia de estas representaciones en libros de texto en los dos primeros cursos de Educación Primaria en Chile.

El presente trabajo se ha estructurado en varios apartados: en la sección 2 se exponen los elementos teóricos que han sido empleados, en la sección 3 se recogen algunas de las investigaciones previas desarrolladas en estos niveles educacionales, la metodología del estudio (característica de la muestra y del instrumento de evaluación) se presenta en la sección 4 y en la sección 5 se muestran los principales resultados (a nivel general, según nivel de lectura y por actividad). Para finalizar, la sección 6 presenta las conclusiones más destacadas del estudio.

Tabla 1. Objetivos e indicadores de evaluación para 1º y 2º de Educación Primaria

Curso	Objetivo	Indicador de evaluación
Primero (Ministerio de Educación, 2013a, p. 105)	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.	• Recolectan y organizan datos del entorno, usando material concreto y pictórico, registros informales y tablas de conteo. • Responden preguntas, utilizando la información recolectada.
Segundo (Ministerio de Educación, 2013b, p. 116, 136)	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.	• Recolectan datos acerca de lanzamientos de dados y monedas. • Registran datos en una tabla de conteo acerca de datos de lanzamientos de monedas y dados. • Registran datos acerca de lanzamientos de dados y monedas, usando cubos apilables. • Responden preguntas en el contexto de juegos con monedas, usando registros expresados en cubos apilables.
	Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.	• Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en tablas. • Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en gráficos de barra simple.

2. MARCO TEÓRICO

En este apartado exponemos el concepto de tabla estadística y sus elementos, así como los niveles de lectura de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001), que permiten describir la actividad cognitiva que se puede realizar con estas representaciones y que es un elemento teórico de nuestro estudio.

2.1. TABLAS ESTADÍSTICAS

Se entienden como un instrumento de *transnumeración* (Wild y Pfannkuch, 1999), es decir, una forma de obtener una nueva información al cambiar de un sistema de representación a otro. Esta idea se refiere, por ejemplo, del paso de datos (no agrupados) a su recolección en una tabla estadística, permitiendo así observar algunos elementos estadísticos como la moda, el valor máximo, entre otros. Por otro lado, Campbell-Kelly, Croarken, Flood y Robson (2003) y Gabucio *et al.* (2010) consideran dicho instrumento como un formato de organización gráfica que utiliza un doble eje para cruzar información concerniente a dos conjuntos de categorías o variables, relacionadas y organizadas recíprocamente; y donde cada celda (casilla) representa datos cuantitativos. Posteriormente, Estrella (2014) define las tablas estadísticas como:

> [...] un arreglo rectangular con una estructura que comprende un conjunto de filas y columnas [...], permite presentar los datos correspondientes a una o más variables (características del fenómeno bajo estudio) en forma clasificada y resumida, para permitir la visualización del comportamiento de los datos y facilitar la comprensión de la información que se puede extraer (p. 6).

Estrella (2014) menciona que algunos de los elementos que pueden ser incluidos en las tablas estadísticas son: (a) *título*: transmite la idea principal sobre la información representada y su contexto; (b) *cuerpo de datos*: corresponde al bloque rectangular interior compuesto por aquel grupo de celdas formadas por la intersección de filas y columnas; (c) *encabezado lateral* (primera columna): refleja las categorías de la variable; (d) *encabezado superior*: presenta el nombre del contenido de las columnas, por ejemplo, frecuencias; (e) *totales*: relativo a las sumas por fila o columna y/o totales.

2.2. TIPOS DE TABLAS ESTADÍSTICAS

Existen diferentes tipos donde, si bien algunos de sus elementos son similares, cada una de ellas tiene características propias. Lahanier-Reuter (2003) describe algunas que son usadas en Educación Primaria, entre las que se destacan:

Tablas de datos. Son tablas simples, en las que no se trabaja la idea de frecuencia ni de distribución, sino sólo la idea de variable y valor. Un ejemplo es registrar la temperatura durante una semana de una determinada ciudad.
Tablas de frecuencias. Son aquellas en las que se representan las frecuencias (obtenidas mediante agrupación o recuento de datos iguales) asociadas a los valores o categorías de las variables. Ejemplo de esta situación es registrar las edades de los estudiantes de un curso.
Tabla de doble entrada. Tabla en la que se cruzan dos variables, es decir, un valor está relacionado con dos variables a la vez. Situación por la que se consideran como las más complejas. Por ejemplo, representación de las edades de los estudiantes de una clase según su género.

Además de las mencionadas, Mingorance (2014) indica que las *tablas de conteo* pueden ser trabajadas en el ámbito escolar. Estas tablas son una versión simplificada de las tablas de frecuencia, en las que se realizan recuentos por medio de marcas o símbolos dentro de una misma celda. Un ejemplo es representar con una equis (x) cada vez que un niño menciona sus caricaturas favoritas.

2.3. NIVELES DE COMPRENSIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS

En ocasiones los profesores creen que el trabajo con tablas estadísticas es una actividad fácil para los niños, por lo que no se dedica el tiempo suficiente a su enseñanza y aprendizaje, olvidando que su correcta lectura y construcción moviliza diferentes objetivos matemáticos (Batanero, 2001).

Algunos autores, conscientes de esta complejidad, describen y tratan de caracterizar los diferentes niveles de comprensión para tablas y gráficos estadísticos. Por ejemplo, Curcio (1989) y Friel *et al.* (2001) proponen diferentes niveles para la lectura de gráficos, que se han adaptado en diferentes investigaciones con tablas estadísticas (e.g., Castellanos, 2013; Díaz-Levicoy, Morales y López-Martín, 2015; Díaz-Levicoy, Sepúlveda, Vásquez y Opazo, 2016; Méndez y Ortiz, 2012; Mingorance, 2014).

A continuación se presentan los cuatro niveles de lectura de gráficos y tablas que van desde el más elemental (lectura literal) al más complejo (análisis críticos de la información) propuestos por Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel *et al.*, 2001), los cuales sirven como marco para dar cuenta del cocimiento, por medio de la comprensión, de estos objetos matemáticos por parte de los estudiantes.

Nivel 1. Leer los datos. Demanda solo una lectura literal de la información presentada en la tabla, no requiere interpretación. Algunas actividades relacionadas con este nivel son aquellas donde los estudiantes deben leer una frecuencia, una categoría o el título general de la misma.

Nivel 2. Leer dentro de los datos. Pide encontrar un valor por medio de comparaciones u operaciones aritméticas sencillas, además incluye la interpretación de la información contenida en ella. Una actividad relacionada con este nivel consistiría en calcular la cantidad total de estudiantes que participaron en la encuesta, entre otras.

Nivel 3. Leer más allá de los datos. Demanda determinar una información ausente en la tabla por medio de predicciones o estimaciones. Ejemplo de una actividad asociada a este nivel sería inferir la temperatura máxima a partir de las temperaturas máximas de una ciudad mostradas en la tabla.

Nivel 4. Leer detrás de los datos. Pide valorar críticamente la manera en que se recogieron los datos, también demanda interpretar la crítica que otras personas hacen del mismo, o bien cuestionar la calidad de los datos. Supone una reflexión del conocimiento matemático y del contexto. Por ejemplo, analizar si la pregunta utilizada para recoger los datos es la apropiada o no.

Por la edad de los estudiantes que son parte de esta investigación y por los resultados de los estudios sobre libros de texto que se describe en el apartado siguiente, solo se utilizarán los dos primeros niveles (leer los datos y leer dentro de los datos).

3. ANTECEDENTES

Las investigaciones sobre tablas estadísticas van tomando importancia y asumiendo presencia en la Educación Estadística. Sin embargo, si se remite a trabajos con estudiantes de Educación Primaria se observa que estos son aún escasos. Este hecho puede ser consecuencia, principalmente, del carácter no obligatorio que tenían estos temas en los primeros cursos de Educación Primaria. En lo que sigue, describimos estudios centrados en libros de texto y con estudiantes, ambos en Educación Primaria.

En la línea de los libros de texto, Guimarães, Gitirana, Cavalcanti y Marques (2008) estudian las actividades que usan diferentes representaciones gráficas (gráficos, tablas estadísticas y no estadísticas) de 17 grupos de textos de 1º a 4º de Educación Primaria. Las autoras analizan un total de 2,080 actividades. La mayor porción de las actividades alude a las tablas, y de ellas más de la mitad no hacen referencia a la organización de la información. También, observan una distribución no uniforme de las actividades y, además, las que se relacionan con gráficos estadísticos privilegian la interpretación sobre la construcción. En este mismo contexto educativo, Amorim y Silva (2016) analizan cómo se presentan y utilizan las tablas estadísticas en cuatro libros de texto (dos de cuarto y dos de quinto) de Educación Primaria en Brasil. Los resultados muestran que la mayoría de las actividades que hablan de tablas aluden a cuadros y bancos de datos. Se destaca que en tres de los cuatro libros de texto más del 40% de las actividades se centran en la interpretación de la información mientras que ese porcentaje alcanza niveles muy bajos en relación a las de construcción. Igualmente, se destaca una mayor presencia de datos reales que ficticios, es decir, la mayoría de las tareas están relacionadas con situaciones de la vida cotidiana (por ejemplo, número de habitantes en una ciudad o el sándwich preferido).

En el contexto chileno, Díaz-Levicoy *et al.* (2015) caracterizan el trabajo con tablas estadísticas propuestas en dos libros de texto de primero y dos de segundo curso de Educación Primaria. Entre los resultados destacan que el tipo de tabla más frecuente son las de *conteo*, aunque también se observa la presencia de las de *frecuencia*, *datos* y *doble entrada*. Respecto a los niveles de lectura de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel *et al.*, 2001) solo se encuentran los dos primeros niveles (*leer los datos* y *leer dentro de los datos*), con el predominio del nivel 2, asociado a la comparación de información y al desarrollo de cálculos sencillos. También se halla una variedad de actividades, entre ellas: *leer* (se pide una lectura literal de la tabla); *ejemplo* (que aclara o define algún concepto o muestra procedimientos); *completar* (pretende que se finalice la construcción de una tabla); *calcular* (realizar operaciones o comparaciones con la información de una tabla); *traducir* (a partir de la tabla construir un gráfico); *formular preguntas* (indicar la pregunta que permite recoger información de la tabla); *explicar* (indicar procesos de alguna actividad realizada o justificar la respuesta); *recoger datos* (aplicar algún instrumento para recoger información). Entre ellas, las más frecuentes son *calcular*, *completar*, *traducir*, *ejemplo* y *leer*. Tomando como base estos resultados, se ha diseñado y validado el cuestionario empleado en esta investigación con el fin de estudiar el conocimiento que manifiestan estudiantes de tercer año de Educación Primaria, y cuyo proceso se detalla en la sección de metodología.

Sobre las investigaciones centradas en los niveles de lectura en tablas estadísticas se encuentra la desarrollada por Espinoza (2015) donde se realiza un estudio exploratorio en el contexto peruano. A través de una experiencia de aula, la autora analiza cómo un grupo de 15 estudiantes de 1º grado de Educación Primaria (6 y 7 años) desarrollan actividades de lectura de información presentada en tablas estadísticas y gráficos de barras. Los resultados muestran que los estudiantes logran leer información directa en ambas representaciones (*leer los datos*) y responden a preguntas relativas a las cantidades correspondientes de cada una de las categorías de la tabla presentada.

Ochoa (2015), también dentro de un contexto de una experiencia de aula, investiga cómo un grupo de estudiantes peruanos de entre 7 y 8 años de edad desarrollan actividades de completar e interpretar tablas de doble entrada. Los resultados destacan que estos estudiantes son capaces de responder con éxito a preguntas del primer nivel de *leer los datos*, pero encuentran mayores dificultades en aquellas relacionadas con el nivel *leer dentro de los datos*. Sin embargo, hay estudios como el de Pereira y Conti (2012) que indican que estudiantes de tercero de Educación Primaria de Brasil responden adecuadamente a preguntas planteadas sobre análisis e interpretación de tablas de doble entrada, específicamente a preguntas donde se realiza una lectura literal y cálculos aritméticos.

Gabucio *et al.* (2010) aplican un cuestionario para estudiar la comprensión sobre tablas estadísticas en una muestra de 205 estudiantes de 5º y 6º de Educación Primaria y de 1º y 2º de Educación Secundaria de Barcelona (España). Este instrumento considera cuatro aspectos: comprender la estructura tabular, lectura directa de los datos, inferencia de datos e inferencia global. Los resultados muestran que las actividades más sencillas para los estudiantes son las de leer algún dato de la tabla y conocer la estructura de la tabla. Mientras que los de inferencia global son más complejos que los de inferencia a partir de un dato, y estos a su vez más complejos que los de lectura directa. Además, se observa que los ítems más complejos son los más difíciles para los estudiantes de todos los niveles, indiferentes al curso que estos pertenezcan.

Desde otra perspectiva, en el contexto chileno, solo se encuentra el trabajo de Estrella y Olfos (2015), quienes investigan el pensamiento transnumerativo en 80 estudiantes de tercer año de Educación Primaria. Los investigadores indagan sobre las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta "¿De qué manera podemos ordenar y organizar los datos de nuestras colaciones para saber si estamos en riesgo de contraer alguna enfermedad?". Los resultados muestran las técnicas transnumerativas (Chick, 2003) que los estudiantes realizan: ordenamiento, agrupamiento, selección de subconjunto, cambio de tipo de variable, cálculo de frecuencia, graficación y otros cálculos. Solo 5 estudiantes logran construir tablas de frecuencias (de forma básica).

Con el desarrollo de esta investigación se quiere aportar resultados tanto en el contexto internacional, como en el contexto chileno, dado que son escasos, sobre todo considerando que la inclusión de la estadística en las directrices curriculares de Educación Primaria es relativamente reciente. En concreto, pretendemos ampliar información sobre el conocimiento que presentan los estudiantes al trabajar con estas representaciones.

4. METODOLOGÍA

Seguimos una metodología cualitativa (Pérez-Serrano, 1994) y de nivel descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). El método utilizado para examinar las respuestas entregada por los estudiantes fue el análisis de contenido (López-Noguero, 2002). Los pasos seguidos en dicho análisis son:

- Elegir el ítem a analizar. Dado que las respuestas de los estudiantes serán transformadas en porciones mínimas de contenido.
- Se establecen, a priori, las categorías que se utilizaran en el análisis de las respuestas de los estudiantes (correctas, parcialmente correctas e incorrectas), las que pueden variar de acuerdo a la codificación de los datos.
- Se codifican las respuestas. Mediante una revisión detallada de las respuestas, estas se relacionan con las categorías definidas a priori, siguiendo un proceso inductivo y cíclico.
- Análisis descriptivo de los datos. Posterior a la codificación y depuraciones de los datos realizamos tablas estadísticas que resumen la información obtenida.

La muestra estuvo compuesta por 79 estudiantes de edades entre 7 y 10 años (Media: 8,25; D. Estándar: 0,65). Estos estudiantes cursaban tercero de Educación Primaria y pertenecían a tres escuelas municipalizadas de la comuna de San Carlos, Provincia de Ñuble, en la región del Bío-Bío, distribuida según se muestra en la Tabla 2. La selección de la muestra fue intencional, por la facilidad al acceso a estos centros educativos y la disposición por colaborar con la investigación. A ellos se accedió por medio de la autorización del Alcalde de la Ilustre Municipalidad de San Carlos, y del Departamento de Administración de Educación Municipal (DAEM).

Los datos recogidos se han ingresado en una plantilla de Excel, para su posterior análisis.

Tabla 2. *Distribución de la muestra de estudiantes*

Escuelas	Estudiantes	Porcentaje de la muestra
1	25	31,6
2	27	34,2
3	27	34,2
Total	79	100

4.1 EL INSTRUMENTO DE LEVANTAMIENTO DE DATOS

La herramienta empleada en la investigación ha sido un cuestionario enfocado en evaluar el conocimiento sobre tablas estadísticas, con actividades extraídas y adaptadas según los resultados de un estudio sobre el tratamiento de este tema, en libros de texto de 1º y 2º de Educación Primaria (Díaz-Levicoy *et al.*, 2015) y validado por juicio de expertos (Díaz-Levicoy, Morales, Cruz y López-Martín, 2016). El cuestionario final quedó conformado por tres ítems, véase Figura 1.

En el primer ítem se presenta una situación, en la que interviene una tabla de conteo, sobre las asignaturas preferidas por estudiantes de un tercer año de Educación Primaria. De acuerdo a la tabla se plantean 3 actividades, donde la pregunta 1 (identificación del título) se corresponde con el nivel 1 de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel *et al.*, 2001) de *leer los datos*, mientras que la 2 y 3 exigen un nivel 2 *leer entre los datos*. Respecto al tipo de actividad, la primera se clasifica como una actividad de *leer* un dato de la tabla, mientras que la segunda y tercera se clasifican como de *calcular* (Díaz-Levicoy *et al.*, 2015).

En el segundo ítem se presentan los colores favoritos de un grupo de estudiantes de tercer año de Educación Primaria, en dicho ítem se deben realizar cinco actividades, las dos primeras exigen un nivel 1 de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel *et al.*, 2001) *leer los datos*, mientras que las tres siguientes exigen un nivel 2 *leer entre los datos*. Estas preguntas hacen referencia a actividades como: *completar una tabla* (actividad 1), *leer* (actividad 2), *calcular* (actividad 3, 4 y 5) de acuerdo a como lo describen Díaz-Levicoy *et al.* (2015).

Por último, el tercer ítem consta de cuatro actividades: una de *completar* tabla, dos de *leer* y una de *calcular*. Respecto a los niveles de lectura, la actividad 1 implica un nivel de lectura 2 *leer dentro de los datos*, ya que el estudiante debe contabilizar los iconos asociados a cada fruta y multiplicarlo por 2. Las actividades 2 y 3 piden un nivel 1 *de leer los datos*, ya que se debe leer una categoría y una frecuencia, respectivamente, con información fácilmente extraíble de la tabla. Del mismo modo la actividad 4 conlleva realizar una suma entre la cantidad de frutillas y naranjas que hay en total, lo que implica realizar una adición con dichos valores.

Si bien estas actividades se han extraído de libros de texto de 1º y 2º de Educación Primaria, se ha decidido aplicar a estudiantes de tercer grado, a mediados del primer semestre del curso, para asegurarnos que estos temas hayan sido trabajados en clases, incluso en los casos que los contenidos finales de segundo se hayan trabajo a comienzos de tercero.

De las respuestas entregadas por los estudiantes (E*x*, donde *x* es el número que se asigna al estudiante para la codificación de los datos) realizamos un análisis de contenido, lo que ha permitido clasificarlas de acuerdo a tres grandes grupos de respuestas: correctas (cuando el estudiante hace un uso adecuado de los datos y responde de acuerdo a lo pedido), parcialmente correctas (cuando trabaja correctamente con los datos, pero con pequeños errores al desarrollar algún cálculo o al redactar su respuesta) e incorrectas (cuando la respuesta no está relacionada con lo que se pide y no realiza los cálculos necesarios para llegar a una respuesta correcta o simplemente no responde la actividad). En el apartado de resultados, se detalla cada una de estas categorías, ya que en cada apartado no se puede utilizar el mismo criterio, dado que dependerá del tipo de tarea, su complejidad y las respuestas de los estudiantes.

ACTIVIDAD 1. Lee la siguiente situación y responde las preguntas.
A un grupo de estudiantes de tercer año básico se les aplicó una encuesta y las respuestas a una de las preguntas se organizaron en la siguiente tabla.

Asignatura preferida		
Asignatura	**Conteo**	**Cantidad de votos**
Educación Tecnológica	||||	4
Matemática	|||||||||	9
Educación Física	|||||||	7
Ciencias	||||||	6

De acuerdo a la tabla:
1. ¿Cuál es el título de la tabla?
2. ¿Qué asignatura obtuvo la mayor votación?
3. ¿Cuál es la cantidad total de estudiantes que respondieron a la pregunta? Escribe el proceso seguido.

ACTIVIDAD 2. Lee la siguiente situación y desarrolla las actividades.
A cada uno de los estudiantes de tercer año básico se les preguntó por su color favorito. Las respuestas de cada uno de ellos fueron las siguientes:

rojo, azul, verde, rojo, amarillo, rojo, verde, verde, verde, azul, amarillo, rojo, rojo, verde, azul, azul, azul, verde, rojo, amarillo, azul, azul, amarillo, rojo, rojo

1. Complete la siguiente tabla con la información anterior

Color preferido		
Color	**Conteo**	**Cantidad**
Rojo		
Azul		
Amarillo		
Verde		

2. ¿Cuántos estudiantes prefieren el color azul?
3. ¿Cuál es el color de mayor preferencia?
4. ¿Cuál es la diferencia entre las cantidades del color de mayor y menor preferencia?
5. ¿Cuántos estudiantes respondieron la pregunta?

ACTIVIDAD 3. Lee la siguiente situación y desarrolla las actividades.
A un grupo de estudiantes de tercer año básico se les realizó una pregunta sobre su fruta preferida cuya información se organizó en el siguiente pictograma. Cada círculo representa el voto de dos estudiantes (: 2 estudiantes).

1. Complete la tabla

Frutas favoritas	
Tipo Fruta	**Cantidad de votos**
Frutilla	
Piña	
Durazno	
Naranja	

2. Qué fruta fue la favorita solamente por 8 estudiantes?
3. ¿Cuántos estudiantes prefieren la piña?
4. ¿Cuántos estudiantes en total prefieren las frutillas y las naranjas?

Figura 1. Cuestionario de evaluación (Díaz-Levicoy *et al.*, 2015).

5. RESULTADOS

Analizamos la respuesta de los estudiantes a cada una de las actividades de los ítems, clasificándolas como correctas, parcialmente correctas e incorrectas. A continuación mostramos una descripción de cómo consideramos los tres criterios de clasificación y ejemplos representativos en algunos casos. Posteriormente, mostramos un análisis de acuerdo a los niveles de lectura y finalizamos mostrando un resumen del porcentaje de logro por tarea pedida.

5.1. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DEL ÍTEM 1

Con el fin de analizar las respuestas de cada una de las actividades que constituyen el ítem 1, se han generado las categorías que se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3. *Codificación de las respuestas a las actividades del ítem 1*

	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta
Actividad 1.1	Escritura del título tal cual aparece en la tabla		No se menciona la información contenida en el título o simplemente no responde
Actividad 1.2	Se indica el nombre de la asignatura que tiene mayor votación	Se mencionan dos categorías que pueden ser las de mayor votación y no discrimina entre ellas	No se da respuesta
Actividad 1.3	Se responde la cantidad total solicitada	Se mencionan los sujetos que fueron encuestados, pero no la cantidad total	No se da respuesta alguna o se responde con el nombre de una categoría o la cantidad de votos de una de ella

La Tabla 4 recoge, a nivel general, las respuestas de los estudiantes a este ítem. De la información obtenida se observa que tanto la actividad 1.1 como la actividad 1.2 presentan un índice de logro elevado, 89,9% y 94,9% respectivamente. Sin embargo, la actividad 1.3, donde se pide calcular la cantidad total de encuestados de la tabla, ha supuesto mayor dificultad para los estudiantes ya que el 36,7% de las respuestas no han sido clasificadas como correctas.

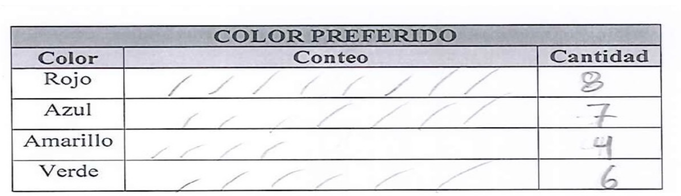
Tabla 4. *Distribución de la frecuencia (porcentaje) de los tipos de respuestas en el ítem 1*

Pregunta del ítem	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas
1.1	71(89,9)	0(0)	8(10,1)
1.2	75(94,9)	1(1,3)	3(3,8)
1.3	50(63,3)	1(1,3)	28(35,4)

5.2. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DEL ÍTEM 2

En la primera actividad de este ítem se propone completar una tabla de conteo a partir de un conjunto de datos. En este contexto, las respuestas de los estudiantes permitieron generar las siguientes categorías.

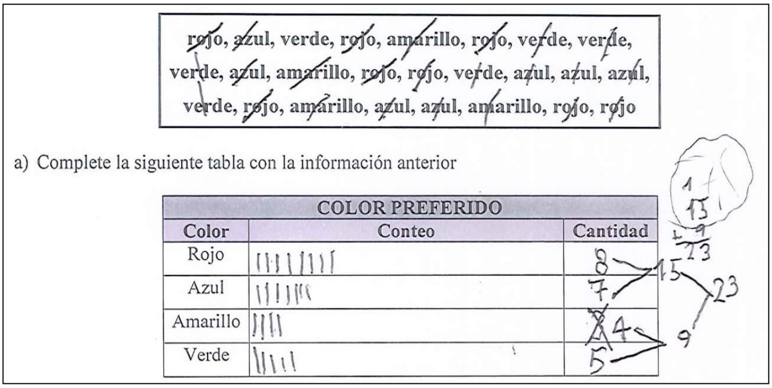
- *Correcta.* Cuando el estudiante completa las columnas "conteo" y "cantidad" de la tabla con la información otorgada tal como lo hace E23 (Figura 2).



COLOR PREFERIDO		
Color	Conteo	Cantidad
Rojo		8
Azul		7
Amarillo		4
Verde		6

Figura 2. Respuesta de E23.

- *Parcialmente correcta.* En esta categoría se han considerado aquellos casos en el estudiante comete algún error al registrar el conteo o la cantidad (recuento). Ejemplo de ello se ve en la Figura 3 donde el estudiante E74 realiza el conteo y recuento de tres de los cuatro colores, faltando solo agregar un verde al que no está marcado en la parte superior de la Figura.

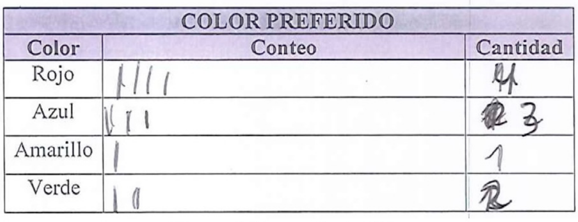

rojo, azul, verde, rojo, amarillo, rojo, verde, verde, verde, azul, amarillo, rojo, rojo, verde, azul, azul, azul, verde, rojo, amarillo, azul, azul, amarillo, rojo, rojo

a) Complete la siguiente tabla con la información anterior

COLOR PREFERIDO		
Color	Conteo	Cantidad
Rojo	IIIIIIII	8
Azul	IIIIIII	7
Amarillo	IIII	~~X~~ 4
Verde	IIIII	5

Figura 3. Respuesta de E74.

- *Incorrecta*. Cuando las columnas conteo y cantidad se completan en su mayoría con cantidades que no corresponden a las solicitadas o, simplemente, no completan la tabla. En la Figura 4 se ve un ejemplo de esta situación, en la que el estudiante E64 realiza un conteo que es insuficiente para determinar las frecuencias correctas.



COLOR PREFERIDO		
Color	Conteo	Cantidad
Rojo	IIII	4
Azul	III	3
Amarillo	I	1
Verde	II	2

Figura 4. Respuesta de E64.

En la segunda actividad se pide leer la cantidad de preferencias del color azul. Las respuestas de los estudiantes a esta actividad se han categorizado de la siguiente manera:

- *Correcta*. Cuando el estudiante responde “siete” en símbolo o en palabra, por lo que es capaz de leer la frecuencia asociada a la preferencia del color azul.
- *Parcialmente correcta*. Cuando el estudiante nombra la cantidad de preferencia del color azul pero añade otra categoría más, tal como lo hace el estudiante E63 (Figura 5), que menciona correctamente la cantidad “siete” y el color correspondiente (azul), pero añade otra categoría (color rojo).

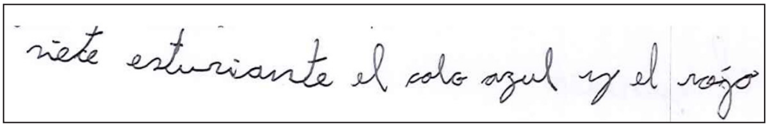


Figura 5. Respuesta del estudiarte E63.

- *Incorrecta*. Cuando el estudiante responde con una cantidad expresada en símbolo o palabra, o con una de las categorías, diferente a la solicitada, o cuando no responde a la actividad.

En la tercera actividad se propone que los estudiantes identifiquen la categoría que tiene mayor preferencia. Las respuestas de los estudiantes se han categorizado de la siguiente manera:

- *Correcta*. Cuando el estudiante responde con la categoría "rojo" como color de mayor preferencia, obtenido por medio de la comparación de las frecuencias como lo hace E3.
- *Parcialmente correcta*. Cuando el estudiante nombra las dos categorías con mayor preferencia o escribe la cantidad asociada a la categoría de la mayor frecuencia. Ejemplo de ello es la respuesta dada por E40 donde indica el valor "8" sin asociarlo a su color.
- *Incorrecta*. Cuando el estudiante nombra una categoría diferente a la de mayor preferencia o cuando el estudiante no responde, tal como lo hace E18 que responde "amarillo".

En la cuarta actividad se propone calcular la diferencia entre las categorías de mayor y menor preferencia. Las respuestas de los estudiantes se han categorizado de la siguiente manera:

- *Correcta*. Cuando el estudiante calcula la diferencia entre las cantidades de mayor y menor preferencia, y la expresa en palabras o de forma simbólica. En la Figura 6 se ejemplifica la respuesta del estudiante E18 que se ha categorizado como correcta.

Figura 6. Respuesta del estudiante E18.

- *Parcialmente correcta*. Cuando el estudiante menciona las categorías de mayor y menor preferencia pero no hace el cálculo correspondiente y no nombra la cantidad de la diferencia. Un ejemplo de ello es la respuesta de E2 que responde "rojo y amarillo", mencionando la categoría de mayor y menor preferencia, pero sin indicar las cantidades que corresponden a cada una de ellas y menos aún su diferencia.
- *Incorrecta*. Cuando se mencionan las categorías de mayores preferencias y se establece, o no, la diferencia entre las cantidades de ambas; solo menciona la categoría de mayor preferencia; menciona todas las cantidades de todas las categorías; suma todas las cantidades de todas las categorías; menciona las características cualitativas o cuantitativas de las cantidades de mayor preferencia por ejemplo: "uno es alto y el otro es bajo" o "uno es mayor y el otro es menor"; y cuando no responde a la actividad. La Figura 7 muestra una respuesta del estudiante E1, puesto que menciona las categorías con mayores preferencias y sus respectivas cantidades estableciendo la diferencia entre ambas, esta respuesta se ha clasificado como incorrecta.

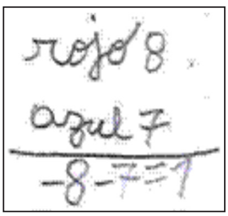


Figura 7. Respuesta del estudiante E1.

En la quinta actividad se pide calcular la cantidad total de estudiantes que respondieron a la pregunta sobre el color preferido. Las respuestas de los estudiantes se han categorizado de la siguiente manera:

- *Respuesta correcta*. Cuando el estudiante obtiene 25 como resultado de la suma de los valores de todas las categorías (8+7+4+6), como se observa en la respuesta de E73 (Figura 8).

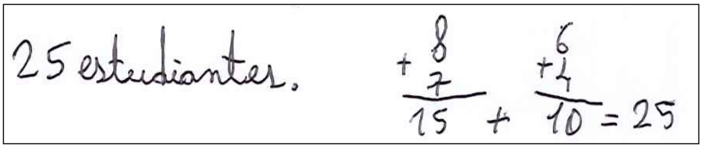


Figura 8. Respuesta del estudiante E73.

- *Parcialmente correcta*. Cuando el estudiante escribe las cantidades (aunque haya una cantidad diferente a la correcta) de cada una de las categorías en forma de suma, pero no llega a efectuarla o, cuando al efectuar la operación comete algún error de cálculo. Un ejemplo de este tipo de respuesta se muestra en la Figura 9 donde el estudiante E26 escribe las frecuencias en forma de suma, pero no llega a efectuarla, y por tanto no responde a la cantidad total de encuestados.

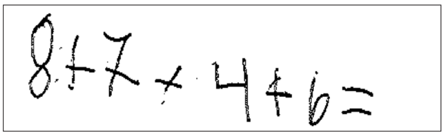


Figura 9. Respuesta del estudiante E26.

- *Incorrecta*. Cuando el estudiante escribe la suma con los sumandos incorrectos y con un total errado o, cuando entrega un resultado errado sin indicar el procedimiento que ha seguido para llegar a él (Figura 10) o cuando no responde a esta actividad.

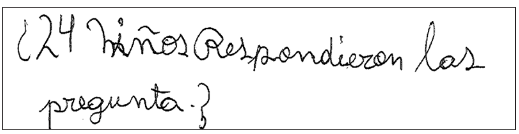


Figura 10. Respuesta del estudiante E30.

A nivel general, como observamos en la Tabla 5, las actividades con mayor índice de logro fueron las actividades 2.2 y 2.3 con porcentajes de 79,7% y 78,5%

respectivamente, no obstante, destacamos la diferencia existente en el porcentaje de respuestas incorrectas entre las actividades 2.2 (19%) y 2.3 (12,7%); donde 2.3 tendría mayor logro al considerar las correctas y parcialmente correctas. Finalmente, las actividades 2.4 y 2.5 obtuvieron los menores niveles de logro, asimismo resaltamos el alto porcentaje de preguntas categorizadas como incorrectas (62% y 45,6%), considerándose difíciles para los estudiantes dado el nivel de logro que han alcanzado.

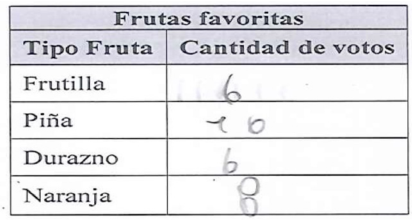
Tabla 5. *Distribución de la frecuencia (porcentaje) de los tipos de respuestas en el ítem 2*

Pregunta del ítem	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas
2.1	54(68,4)	19(24,1)	6(7,6)
2.2	63(79,7)	1(1,3)	15(19)
2.3	62(78,5)	7(8,9)	10(12,7)
2.4	17(21,5)	13(16,5)	49(62)
2.5	34(43)	9(11,4)	43(45,6)

5.3. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DEL ÍTEM 3

En la primera actividad se propone a los estudiantes completar una tabla a partir de un pictograma. Las respuestas de los estudiantes se han categorizado de la siguiente manera:

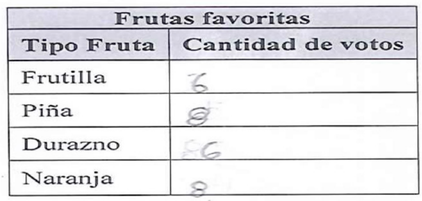
- *Correcta*. Cuando el estudiante completa la tabla con las cantidades de acuerdo a los convenios de lectura de los pictogramas, es decir, lee la cantidad de iconos y luego multiplica esta cantidad por su valor estadístico (cada icono equivale a 2 estudiantes). La Figura 11 muestra la respuesta correcta del estudiante E19.



Frutas favoritas	
Tipo Fruta	Cantidad de votos
Frutilla	6
Piña	10
Durazno	6
Naranja	8

Figura 11. Respuesta del estudiante E19.

- *Parcialmente correcta*. Cuando el estudiante se equivoca al completar la tabla con alguna de las cantidades. Un ejemplo de esta situación es la respuesta del estudiante E4 (Figura 12) en la que se equivoca con el valor correspondiente a la piña, dado que responde ocho donde su valor correcto es diez.



Frutas favoritas	
Tipo Fruta	Cantidad de votos
Frutilla	6
Piña	8
Durazno	6
Naranja	8

Figura 12. Respuesta del estudiante E4.

- *Incorrecta*. Cuando el estudiante completa la tabla con la información literal que aparece en el pictograma. Un ejemplo de respuesta incorrecta es la ofrecida por el estudiante E3 (Figura 13), donde considera que el valor de cada icono es uno, cuando su valor es dos. Dentro de esta categoría se han considerado también aquellas en las que el estudiante responde con cualquier otro número que no se corresponde con el valor de cada icono o simplemente no responde.

Frutas favoritas	
Tipo Fruta	**Cantidad de votos**
Frutilla	3
Piña	5
Durazno	3
Naranja	4

Figura 13. Respuesta de E3.

En la segunda actividad se pide identificar una categoría dada su frecuencia. La categorización realizada ha sido la que se muestra a continuación:

- *Correcta*. Cuando el estudiante logra leer correctamente la categoría dada su frecuencia. Un ejemplo de respuesta correcta es la del estudiante E78 que explicita "la naranja", para identificar aquella fruta que tiene 8 votos.
- *Incorrecta*. Cuando el estudiante otorga una categoría diferente a la fruta naranja o cuando no responde a la actividad. Por ejemplo, el estudiante E13 responde "la piña" en lugar de la naranja que tiene ocho preferencias, por tanto, su respuesta se ha categorizado como incorrecta.

En la tercera actividad se solicita leer una frecuencia asociada a una categoría de la tabla. De acuerdo a las respuestas de los estudiantes se definieron las siguientes categorías:

- *Correcta*. Cuando el estudiante señala la cantidad de votos (diez) correspondiente a la categoría piña.
- *Incorrecta*. Cuando el estudiante indica cualquier cantidad (simbólicamente o verbalmente) diferente a la correcta. Ejemplo de esta categoría es la respuesta de E58 donde contesta "5 estudiantes". También se han considerado en esta categoría aquellos casos en los que el estudiante no responde a la actividad.

Con respecto a la última actividad, en la que se solicita el cálculo de la cantidad total de votos asignados a dos de las frutas representadas en la tabla (frutillas y naranjas), las categorías definidas han sido:

- *Correcta*. Cuando el estudiante señala la cantidad total de votos (14) de ambas categorías. Un ejemplo de ello es la respuesta de E51 (Figura 14), donde además de indicar y sumar las cantidades de las categorías correspondientes a las frutillas y naranjas, señala la cantidad total de preferencias de ambas frutas.

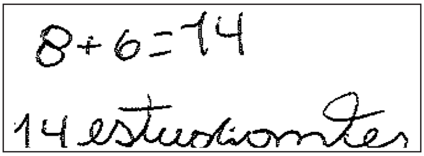


Figura 14. Respuesta del estudiante E51

- *Parcialmente correcta*. Cuando el estudiante solo menciona las categorías y sus cantidades respectivas, o cuando solo indica las cantidades, sin llegar a calcular el total (Figura 15).

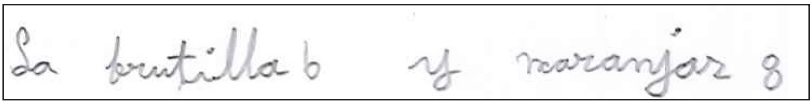


Figura 15. Respuesta del estudiante E22

- *Incorrecta*. Cuando el estudiante señala las categorías con cantidades diferentes a las correctas; cuando responde con una cantidad diferente a la correcta o cuando no responde a la actividad. Por ejemplo, E6 responde "doce".

En la Tabla 6 mostramos, a nivel general la distribución de las respuestas entregadas por los estudiantes. De la información recogida se observa que, a excepción de la actividad 3.4, los resultados han sido similares; han sido correctamente contestadas aproximadamente por 50% de estudiantes. Las respuestas incorrectamente alcanzan un porcentaje similar en las cuatro preguntas.

Tabla 6. *Distribución de la frecuencia (porcentaje) de los tipos de respuestas en el ítem 3*

Pregunta del ítem	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas
3.1	38(48,1)	4(5,1)	37(46,8)
3.2	43(54,4)	0(0,0)	36(45,6)
3.3	41(51,9)	0(0,0)	38(48,1)
3.4	31(39,2)	5(6,3)	43(54,4)

5.4. RESUMEN NIVELES DE LECTURA

En lo que sigue mostramos el estudio de los niveles de lectura alcanzado por los estudiantes en los tres ítems, para ello se ha considerado solo a los estudiantes que responden correctamente a cada pregunta de cada nivel. Las respuestas incorrectas y parcialmente correctas no se han tenido en cuenta dentro de estos niveles, ya que se consideró que lograr algunos de los niveles implica un manejo correcto de los convenidos de lectura y construcción de las tablas, entre ellos, el ser cuidadoso al trabajar con estas representaciones.

Tal y como señalamos en la subsección 2.3 solo se han incluido actividades que demandan los niveles 1 (leer los datos) y 2 (leer dentro de los datos) de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel *et al.*, 2001), ya que son los únicos niveles que se identificaron en el trabajo de Díaz-Levicoy *et al.* (2015). Por ejemplo, la respuesta correcta a la primera pregunta del ítem 1 se considera dentro del nivel 1, ya que el estudiante es capaz de leer correctamente el título de la tabla. En cambio, la respuesta del estudiante E19 (Figura 11) a la primera pregunta del ítem 3 es considerada de nivel 2, porque el estudiante realiza correctamente la lectura la cantidad de iconos y el cálculo de la frecuencia.

La Tabla 7 recoge los porcentajes de logro de cada una de las actividades teniendo en cuenta los dos niveles de lectura. Se observa que las actividades de nivel 1, asociados a la lectura literal de la información de la tabla, es la que los estudiantes responden con mayor facilidad (68,6%). Sin embargo, con respecto al nivel 2, en el que además de leer alguna información de la tabla se debe realizar algún cálculo o comparación, se obtuvo un menor logro (55,5%).

Tabla 7. *Distribución del porcentaje de logro según nivel de lectura.*

Nivel de lectura	Actividad ítem	Porcentaje de logro
1	1.1	89,9
	2.1	68,4
	2.2	79,7
	3.2	53,2
	3.3	51,9
	Media	68,6
2	1.2	94,9
	1.3	63,3
	2.3	78,5
	2.4	21,5
	2.5	43
	3.1	48,1
	3.4	39,2
	Media	55,5

5.5. RESUMEN POR TAREA PEDIDA

Por último, analizamos los resultados alcanzados por los estudiantes según el tipo de actividad a realizar. Las actividades aquí trabajadas las clasificamos de acuerdo a las establecidas en Díaz-Levicoy *et al.* (2015). Para esta investigación consideramos las siguientes actividades: leer, calcular, completar y formular preguntas.

De acuerdo a lo mostrado en la Tabla 8, la actividad donde los estudiantes respondieron con mayor facilidad fue *leer* (68,7%), donde se les pidió leer una información puntual de la tabla. En segundo lugar está la actividad de *completar* (58,3%), en la que se entregó la estructura de una tabla estadística y el estudiante la debió rellenar mediante la organización de los datos o del cambio de registro (pasar la información de un gráfico a tabla). Le sigue muy de cerca la actividad de *calcular* (56,7%), la que conlleva realizar operaciones aritméticas y comparación de información en la tabla.

Tabla 8. *Distribución del tipo de respuesta a tipo de actividad pedida*

Actividad	Pregunta del ítem	Porcentaje de logro
Leer	1.1	89,9
	2.2	79,7
	3.2	53,2
	3.3	51,9
	Media	68,7
Calcular	1.2	94,9
	1.3	63,3
	2.3	78,5
	2.4	21,5
	2.5	43
	3.4	39,2
	Media	56,7
Completar	2.1	68,4
	3.1	48,1
	Media	58,3

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

La reciente inclusión de la estadística y la probabilidad en las directrices curriculares chilenas de Educación Primaria plantea diversos desafíos para el sistema escolar en general. Por un lado, estos contenidos deben ser incluidos en los libros de texto con objeto de que los profesores tengan a su disposición diferentes actividades para desarrollar el proceso de instrucción; por otro, la formación inicial de los profesores de Educación Primaria, debe asegurar que los futuros profesores egresen con las competencias disciplinarias y didácticas para enseñar estos temas; y fomentar la formación continua de los profesores, para completar la formación y entregar nuevas herramientas para utilizar en el aula.

En nuestro caso, nos centramos en las tablas estadísticas, de las cuales ya hemos estudiado su tratamiento en los libros de texto de los dos primeros cursos de Educación Primaria (Díaz-Levicoy *et al.*, 2015) y cuyos resultados nos han servido para diseñar y validar un instrumento (Díaz-Levicoy *et al.*, 2016) con el fin de estudiar el conocimiento que tienen los escolares chilenos de tercer año sobre estas representaciones.

Los resultados muestran que en el caso del ítem 1 los estudiantes abordan con mayor éxito la lectura del título de la tabla y el cálculo de la moda. Al considerar las respuestas según el nivel de lectura de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel *et al.*, 2001), vemos que, en promedio, los mejores resultados son obtenidos en el nivel más elemental *leer los datos*, situación similar a los resultados de Espinoza (2015) y Ochoa (2015) donde este nivel es alcanzado con facilidad por estudiantes de primeros cursos de Educación Primaria.

En el segundo ítem, formado por cinco actividades, la muestra de estudiantes aborda con mayor facilidad leer información de la tabla y calcular (la moda), mientras que, en otras actividades de calcular, en las que se debe determinar la suma o la diferencia entre frecuencias, conllevan un mayor porcentaje de fracaso, en especial en esta última en que 62% de los estudiantes no responden la actividad o lo hacen mal. Respecto a los niveles de lectura, los resultados coinciden con los de Gabucio *et al.* (2010) y Pereira y Conti (2012), donde los estudiantes responden a actividades relacionadas con los niveles 1 y 2 de Curcio, aunque con más dificultades en este último.

Finalmente, en el tercer ítem es donde observamos mayores dificultades para los estudiantes en sus cuatro actividades planteadas. Uno de los principales errores, además de los cálculos, es cuando los estudiantes traducen la información de un pictograma a una tabla de frecuencias, donde el icono usado en el pictograma es diferente de la unidad (vale dos en este caso) y los estudiantes asumen que cada icono es igual a la unidad. Dificultad que Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero (2017) observan en estudiantes de 6º y 7º de Educación Primaria, por lo que existe el temor de que estas dificultades se mantengan con el paso de los años.

A nivel general, este trabajo muestra que los estudiantes chilenos de 3º de Educación Primaria, que fueron objeto de investigación, dominaron aspectos básicos de la lectura e interpretación de las tablas estadísticas, como la lectura literal de información y el desarrollo de cálculos sencillos, coincidiendo con estudios previos en otros contextos. Al considerar las respuestas según el tipo de actividad, vemos que estos tienen mejores resultados en leer y completar tablas que, en calcular lo que se puede justificar por los objetos matemáticos que intervienen en el desarrollo.

Respecto a los niveles de lectura, vemos la tendencia de que las actividades con mayor éxito son las del nivel 1 (leer los datos), pero con evidencia de que igual las actividades de nivel 2 (leer dentro de los datos) pueden ser abordadas con éxito por los estudiantes.

Por lo anterior, se puede confirmar que las tablas estadísticas se están trabajando en clase y que los estudiantes las comprenden. Sin embargo, creemos que los resultados pueden mejorar mediante metodologías que permitan trabajar con datos que surjan de los intereses de los propios estudiantes y que les resulten motivadores, ya que si bien las actividades de libros de texto chilenos se presentan en contextos próximos a los estudiantes, son escasas las oportunidades donde ellos recojan sus propios datos. Una metodología recomendable en el ámbito de la estadística, y que permite trabajar diversos temas del área y con diferente profundidad, es el trabajo con proyectos (Batanero y Díaz, 2011).

Una instrucción adecuada puede evitar que errores detectados en estos cursos se mantenga en el tiempo, situación preocupante ya que incluso profesores en formación de Educación de Infantil y Primaria presentan problemas al trabajar con estas representaciones en el contexto chileno (e.g., Rodríguez-Alveal y Sandoval, 2012; Díaz-Levicoy *et al.*, 2016).

AGRADECIMIENTOS

PID2019-105601GB-I00 (MICIN), FCT-16-10974 y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Amorim, N. D. y Silva, R. L. (2016). Apresentação e utilização de tabelas em livros didáticos de matemática do 4º e 5º anos do ensino fundamental. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 7*(1), 1-21.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 76*, 55-67.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana, 1*(1), 27-37

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.) (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.

Beltrão, T. M. S. (2012). Uma análise da transposição didática externa com base no que propõem documentos oficiais para o ensino de gráficos estatísticos. *Revista Paranaense de Educação Matemática, 1*(1), 131-152.

Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R. y Robson, E. (Eds.) (2003). *The history of mathematical tables. From sumer to spreadsheets*. Oxford University Press.

Castellanos, M. (2013). *Tablas y gráficos estadísticos en pruebas SABER-Colombia* (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada.

Cazorla, I. y Utsumi, M. C. (2010). Reflexões sobre o ensino de estatística na educação básica. En I. Cazorla y E. Santana (Eds.), *Do tratamento da informação ao letramento estatís*tico (pp. 9-18). Via Litterarum.

Chick, H. (2003). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. En R. Bragg, C. Campbell, G. Herbert y J. Mousley (Eds.), *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity. Proceedings of the 23rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 167-174). MERGA.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension*. National Council of Teachers of Mathematics.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2017). Chilean primary school student's levels in reading pictograms. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 740-747). DCU Institute of Education and ERME.

Díaz-Levicoy, D., Morales, R., Cruz, A. y López-Martín, M. M. (2016). Validación de un cuestionario para evaluar la comprensión sobre tablas estadísticas en Educación Primaria. En Escarbajal, A. (Ed.), *Libro de actas del IV Congreso Internacional de Investigación e Innovación en Educación Infantil y Educación Primaria* (pp. 518-524). Universidad de Murcia.

Díaz-Levicoy, D., Morales, R. y López-Martín, M. M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de Educación Primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática, 4*(7), 10-39.

Díaz-Levicoy, D., Sepúlveda, A., Vásquez, C. y Opazo, M. (2016). Lectura de tablas estadísticas por futuras maestras de Educación Infantil. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(3), 1099-1115.

Espinoza, N. (2015). *Tablas y gráficos de barras a través del ciclo del pensamiento estadístico. Un estudio con alumnos de primer grado de Educación Primaria* (Tesis de Magíster). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación, 14*(2), 1-23.

Estrella, S. y Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia. En P. Scott y Á. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas: 2015. Estadística y Probabilidad* (pp. 220-225). Comité Interamericano de Educación Matemática.

Eudave, D. (2009). Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México. *Educación Matemática, 21*(2), 5-37.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S. y Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación, 22*(2), 183-197.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Guimarães, G., Gitirana, V., Cavalcanti, M. y Marques, M. C. M. (2008). Análise das atividades sobre representações gráficas nos livros didáticos de matemática. En V. Gitirana, F. Bellemain y V. Andrade (Eds.), *Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-12). Universidad Federal de Pernambuco.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *SPIRALE. Revue de Recherches en Éducation, 32*, 143-154.

López- Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación, 4*, 167-180.

Méndez, M. y Ortiz, M. (2012). *Construcción y lectura de gráficos y tablas estadísticas en tesis de la licenciatura en Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional* (Tesis de licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional Ajusco.

Mingorance, C. (2014). *La estadística en las pruebas de diagnostico andaluzas* (Trabajo fin de grado). Universidad de Granada.

Ministerio de Educación (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación (2013a). *Matemática. Programa de estudio primer año básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación (2013b). *Matemática. Programa de estudio segundo año básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. MECD.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Ochoa, E. (2015). *El ciclo de investigación del pensamiento estadístico relacionado con tablas de doble entrada. Un estudio con alumnos del segundo grado de Educación Primaria* (Tesis de Magíster no publicada). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Pereira, E. L. y Conti, K. C. (2012). Interpretando tabelas e construindo gráficos com alunos do 3º ano do Ensino Fundamental. En M. Tommasiello, A. Marin, S. Pimenta, L. Carvalho y J. Fusari (Eds.), *Didática e práticas de ensino na realidade escolar contemporânea: constatações, análises e proposições* (pp. 5294-5302). Junqueira & Marin.

Pérez-Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I. Métodos*. La Muralla.

Rodríguez-Alveal, F. y Sandoval, P. (2012). Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en Enseñanza Básica. *Avaliação. Revista da Avaliação da Educação Superior, 17*(1), 207-235.

Watson, J. (1997). Assessing statistical literacy through the use of media surveys. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). IOS Press.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association, 88*(421), 1-8.

Danilo Díaz-Levicoy

Dirección: Departamento Matemática, Física y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas
Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística (CIEMAE)
Universidad Católica del Maule, Avda. San Miguel 3605, Talca, Chile

Teléfono: (+56) 9 7806 5371

DOI: 10.24844/EM3202.11

José Marcos López Mojica: un inesperado adiós y un recuerdo permanente

Lilia P. Ake[1]
María S. García González[2]
Ana María Ojeda Salazar[3]

José Marcos nació el día 6 de octubre de 1984, en la ciudad de Chilpancingo de los Bravo en el estado de Guerrero. Como carrera profesional eligió la enseñanza de las matemáticas, y fue así que se matriculó en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero de la ciudad que le vio nacer, y optó por especializarse en Matemática Educativa. Sus profesores en estos años, lo recuerdan como un estudiante responsable, inteligente y curioso por aprender más de los temas que se le enseñaban. José Marcos comentaba que, entre ellos, Patricia Colín lo impulsó a participar en los que fueron sus primeros congresos de Matemática Educativa, en los que encontró un espacio propicio para la discusión y reflexión de la disciplina que había elegido como profesión.

[1] Universidad Autónoma de Querétaro, México. lake86@gmail.com, orcid.org/0000-0003-4303-4895.
[2] Universidad Autónoma de Guerrero, México. mgargonza@gmail.com, orcid.org/0000-0001-7088-1075.
[3] Cinvestav-IPN, México. amojeda@cinvestav.mx, orcid.org/0000-0001-7918-7557.

La carrera de José Marcos como investigador ha sido muy corta y, sin embargo, muy talentosa y prometedora. Motivado por consolidar su formación ingresó a la maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN y al concluirla continuó con el doctorado. Su formación en la investigación fue acelerada y constante; a cada paso dio muestras de entusiasmo, perseverancia y dedicación. Al inicio de su segundo año en la maestría, en el año 2008, encauzó su interés en la problemática de la educación en estocásticos, tema que en general ha merecido poca atención, pero menos aún para ser investigado en la educación especial y todavía menos en un Centro de Atención Múltiple (CAM), sitio en el que convergen distintas discapacidades. Sus resultados obtenidos al cabo de un año de trabajo se reunieron en la tesis *Estocásticos en el Segundo Año de Educación Especial*, que mostró la desatención a esta modalidad de la educación, que va desde la formación del docente, al tratamiento educativo de los niños con discapacidad y a la actualización de los docentes en servicio. Sobre esta base, José Marcos, inició su investigación de doctorado, que culminó en diciembre de 2013 con la tesis *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en Educación Especial*. Como la anterior, la desarrolló *in situ*, en la complejidad de las aulas pero ahora de preescolar, de primaria y de secundaria. Su investigación estableció un marco de referencia para la enseñanza de los temas de estocásticos en la Educación Especial básica y la conveniencia de incluirlos en ella para promover el uso de esquemas compensatorios, según la discapacidad de que se tratase. Pionera en México, esta tesis doctoral originó una línea de investigación no sólo pertinente, sino apremiante por la problemática que identificó. En su corta estancia en Cinvestav como estudiante, su participación fue muy activa en los seminarios y en los coloquios, en distintos congresos internacionales y regionales en los que iba presentando sus resultados.

Ya como investigador, al integrarse al campo laboral como profesor universitario, su participación en una diversidad de actividades académicas se intensificó con paso firme, responsable y cada vez más consolidado. Fue en 2014 que se incorporó a la Universidad de Colima a través de su participación en una convocatoria de plazas a concurso abierto. En continuidad con su trabajo doctoral sobre probabilidad y discapacidad, sus investigaciones posteriores configuraron una sinergia entre la Matemática Educativa y la Educación Especial. En ese entonces, inició diversos estudios con tesistas y colegas interesados en el tema; algunos de estos trabajos se concretaron en su primer libro colaborativo: *Matemática Educativa y Educación Especial. Una aproximación desde la* *formación docente y procesos de enseñanza*. Se distinguía por tener un trabajo académico activo, congruente y con iniciativas: tenía presencia en congresos, realizaba estancias y entrelazaba colaboraciones con colegas de diferentes instituciones. Su fuerte compromiso institucional impulsó la obtención del Perfil Deseable y a conformar un Cuerpo Académico. Había iniciado en la investigación y como profesor universitario con paso firme y responsable.

Posteriormente, continuó su vida académica en la Universidad Autónoma de Guerrero donde se incorporó en el 2018. Con rigor teórico y metodológico abordaba una problemática emergente ante la educación inclusiva y la incorporación de las personas con discapacidad en las aulas regulares. Sus investigaciones entretejían sus intereses e inquietudes sobre los alcances y limitaciones del desarrollo del pensamiento matemático en personas con diferentes tipos de discapacidad. Sus reflexiones sobre este tema lo condujeron a trabajar, en lo que denominaría, *Matemática Educativa Inclusiva*, sus últimos trabajos se enfocaron en este constructo. Una segunda obra colegiada, aún sin publicar sobre esta línea de investigación es: *Educación Especial en Matemática Educativa. Fundamentos teórico-metodológicos para la investigación*. En este y todos los trabajos de José Marcos se sumaban esfuerzos y se teñían del mismo propósito: aproximar el estudio de las matemáticas a las personas con discapacidad orientando a la docencia desde la investigación.

Las huellas de su trayectoria le permitieron la distinción del Nivel 1 en el Sistema Nacional de Investigadores mexicanos en 2017. Para José Marcos esta distinción representó un aliciente y reconocimiento a cada uno de los trabajos realizados que ratificaba su compromiso de continuar con la generación y aplicación del conocimiento. No era la primera vez que recibía una distinción por su trabajo. En 2009 la Sociedad Matemática Mexicana reconoció como mejor tesis de maestría en Matemática Educativa su trabajo *Estocásticos en el Segundo Grado de Educación Especial*. En 2014 el Cinvestav otorgó el "Premio Arturo Rosenblueth" a su tesis de doctorado *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en Educación Especial*, misma que en 2015 fue acredora de una mención honorífica del "Premio Simón Bolívar" por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Entre sus obras figuran 24 artículos de investigación, 16 capítulos de libros y dos libros, sin olvidar las tesis de licenciatura y maestría que dirigió. Organizó también congresos regionales y la Escuela de Invierno en Matemática Educativa en 2017. Además, incentivó la formación, organización y proyección de grupos de investigación. Además de múltiples arbitrajes que realizó para artículos en revistas académicas, en particular la revista *Educación Matemática* le agradece su participación en todas las veces que se le invitó como árbitro.

Un espíritu tenaz, afable y reservado caracterizaba a Marcos, sus cualidades permeaban cualquier ámbito en el que tenía injerencia. Colega respetuoso, comprometido y constante, aunque en su andar llevaba "pies de plomo", como él decía. Se distinguía por su predisposición a la colaboración pues pensaba que las investigaciones tienen mayor continuidad cuando existe trabajo estructurado y conjunto: el investigador, como el ser humano, no es una isla. En este inesperado adiós, conserva el cariño de alumnos, tesistas y colegas que tuvieron la oportunidad de conocerlo, trabajar a su lado y construir conocimiento juntos. Amigo sincero, cercano e incondicional, tenía siempre palabras cálidas para esos momentos difíciles. Su ausencia deja, en todos los contextos y corazones, un lugar irremplazable.

Lilia P. Ake

Domicilio postal: Cerro de las Campanas, S/N; Colonia Las Campañas; C.P: 76010. Santiago de Querétaro, Querétaro, México
Teléfono: (442) 192 12 00 Ext: 71101

Educación Matemática *vol. 32 • núm. 2 • agosto de 2020*

www.revista-educacion-matematica.com